

3. WYKŁAD 7: INDUKCJA I REKURSJA STRUKTURALNA. TERMY I PODSTAWIANIE TERMÓW.

Dla uniknięcia nieporozumień notacyjnych wprowadzimy rozróżnienie między funkcjami i operatorami. **Operatorem** γ w zbiorze X jest funkcja $\gamma : 2^X \rightarrow 2^X$. Operator $\gamma : 2^X \rightarrow 2^X$ jest **monotoniczny** gdy

$$A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \subset \gamma(B)$$

Zauważmy, że operator monotoniczny jest po prostu funkcją monotoniczną względem inkluzji.

Rodzinę $\mathcal{L} = \{A_i : i \in I\}$ podzbiorów zbioru X nazwiemy **łańcuchem**, jeżeli dla dowolnych $A_i, A_j \in \mathcal{L}$ zachodzi

$$A_i \subset A_j \text{ lub } A_j \subset A_i.$$

Operator $\gamma : 2^X \rightarrow 2^X$ jest **ciągły** gdy

$$\gamma\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \gamma(A_i).$$

dla każdego łańcucha $\{A_i : i \in I\} \subset 2^X$. Zauważmy w szczególności, że każdy operator ciągły jest monotoniczny.

Operator $\gamma : 2^X \rightarrow 2^X$ jest **zwarty** gdy dla każdego $A \subset X$ i dla każdego $x \in \gamma(A)$ istnieje podzbiór skończony $A' \subset A$ dla którego $x \in \gamma(A')$.

Stwierdzenie 1. *Operator monotoniczny i zwarty jest ciągły.*

Dowód. Załóżmy, że operator $\gamma : 2^X \rightarrow 2^X$ jest monotoniczny i zwarty. Niech $\mathcal{L} = \{A_i : i \in I\} \subset 2^X$ będzie łańcuchem podzbiorów X . Oczywiście $A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ dla każdego $i \in I$, wobec czego

$$\gamma A_i \subset \gamma\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right),$$

dla każdego $i \in I$, ponieważ γ jest monotoniczny. Innymi słowy

$$\bigcup_{i \in I} \gamma A_i \subset \gamma\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

i pozostaje wykazać drugą inkluzję.

Założmy teraz, że $x \in \gamma\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$. Ponieważ γ jest zwarty, istnieje podzbiór skończony $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, dla którego $x \in \gamma(B)$. Wobec tego istnieje podłańcuch skończony

$$A_i \subset \dots \subset A_j, \text{ gdzie } A_i, \dots, A_j \in \mathcal{L}$$

dla którego $B \subset A_i \cup \dots \cup A_j = A_j$. Tym samym

$$x \in \gamma(B) \subset \gamma(A_j)$$

czyli

$$\gamma\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} \gamma A_i.$$

□

Niech Σ będzie pewnym ustalonym alfabetem, L językiem nad tym alfabetem, a S ustalonym systemem dedukcyjnym. Przypomnijmy, że jako S rozumiemy pewien ustalony zbiór reguł wnioskowania, przy czym reguły bez przesłanek nazywamy aksjomatami; możemy zatem myśleć o S jako o parze (AX, R) , gdzie AX jest pewnym zbiorem aksjomatów, a R pewnym zbiorem reguł wnioskowania o niepustych zbiorach przesłanek.

Definiujemy **operator nasycenia** jako operator $\Phi_S : 2^L \rightarrow 2^L$ dany wzorem

$$\Phi_S(P) = P \cup AX \cup \bigcup_{r \in R} \{A : \frac{\pi_1, \dots, \pi_n}{A} r, \pi_1, \dots, \pi_n \in P\}.$$

O ile z kontekstu będzie jasne z jakim systemem aksjomatycznym pracujemy, będziemy po prostu pisać Φ zamiast Φ_S . Oczywiście operator nasycenia możemy wielokrotnie składać; w szczególności obraz zbioru pustego w n -krotnym złożeniu Φ oznaczać będziemy przez Φ_n . Bezpośrednio z określenia operatora nasycenia wynika, że jest on operatorem monotonicznym.

Stwierdzenie 2. *Niech S będzie systemem dedukcyjnym. Operator nasycenia Φ_S jest zwarty.*

Dowód. Załóżmy, że $x \in \Phi(P)$, czyli

- (1) $x \in P$, lub
- (2) x jest aksjomatem, lub
- (3) istnieją $\pi_1, \dots, \pi_n \in P$ i reguła r taka, że $\frac{\pi_1, \dots, \pi_n}{x} r$.

Ale wtedy $x \in \Phi(P')$ dla

$$P' = \begin{cases} \{x\}, & \text{gdy } x \in P, \\ \emptyset, & \text{gdy } x \in AX, \\ \{\pi_1, \dots, \pi_n\}, & \text{gdy } \frac{\pi_1, \dots, \pi_n}{x} r \text{ dla pewnych } \pi_1, \dots, \pi_n \in P \text{ oraz } r \in R. \end{cases}$$

□

Wniosek 1. *Niech S będzie systemem dedukcyjnym. Operator nasycenia Φ_S jest ciągły.*

Oznaczmy przez $[[S]]$ zbiór tez systemu dedukcyjnego S . Przypomnijmy, że obraz zbioru pustego w n -krotnym złożeniu Φ oznaczamy przez Φ_n .

Stwierdzenie 3. $[[S]] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$.

Dowód. Niech $t \in [[S]]$. Wówczas istnieje skończony ciąg formuł $A_1, \dots, A_n$ taki, że

- (1) $A_n = t$,
- (2) dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ albo

$$A_i \in AX$$

albo istnieją $i_1, \dots, i_k < i$ oraz $r \in R$ takie, że

$$\frac{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}}{A_i} r.$$

Tym samym $t \in \Phi_n$, a więc również $t \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$.

Na odwrót, jeśli $t \in \Phi_n$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to istnieje skończony ciąg formuł $A_1, \dots, A_n$ taki, że

- (1) $A_n = t$,

(2) dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ albo

$$A_i \in AX$$

albo istnieją $i_1, \dots, i_k < i$ oraz $r \in R$ takie, że

$$\frac{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}}{A_i} r.$$

Tym samym t jest tezą systemu S , a więc $t \in [[S]]$. □

Pokażemy w dalszym ciągu, że zbiór tez jest najmniejszym zbiorem "domkniętym" względem indukcji. Najzgrabniej będzie to zrobić przy użyciu odrobiny matematyki dyskretniej. Przypomnijmy, że kratą nazywamy parę $(K, \leq)$, gdzie $K \neq \emptyset$ i $\leq$ jest porządkiem takim, że dowolny skończony podzbiór zbioru K ma kresy. Tradycyjnie oznaczamy

$$\inf_{\leq} \{x, y\} = x \wedge y \text{ oraz } \sup_{\leq} \{x, y\} = x \vee y.$$

Przez indukcję łatwo zauważamy, że każdy skończony podzbiór kraty ma kresy. Pojęcie to rozszerzamy na kraty nieskończone, o których mówimy, że są **zupełne**, jeżeli każdy ich podzbiór A ma kres dolny $\bigwedge A$ i kres górny $\bigvee A$. Przykładowo krata $(2^X, \subset)$ jest zupełna, a krata $(\mathbb{N}, \leq)$ nie jest. W szczególności kres górny kraty K oznaczają będziemy przez $\top$ a kres dolny przez $\perp$.

Jeżeli $(K, \leq)$ jest kratą, to funkcję $f : K \rightarrow K$ nazywamy **monotoniczną**, jeżeli dla dowolnych $x, y \in K$:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

W szczególności zauważmy, że operatory monotoniczne są funkcjami monotonicznymi w kracie $(2^X, \subset)$. Dalej, powiemy że $x \in K$ jest **punktem stałym** funkcji $f : K \rightarrow K$, jeżeli

$$f(x) = x.$$

Twierdzenie 1 (Tarski-Knaster). *Niech $(K, \leq)$ będzie zupełną kratą, $f : K \rightarrow K$ funkcją monotoniczną i $P = \{x \in K : f(x) \leq x\}$. Wtedy $\mu f = \bigwedge P$ jest najmniejszym punktem stałym f .*

Dowód. Z definicji infimum mamy bezpośrednio $\mu f \leq p$ dla każdego $p \in P$ więc

$$f(\mu f) \leq f(p) \leq p$$

czyli $f(\mu f)$ jest ograniczeniem dolnym zbioru P a to z kolei za sobą pociąga

$$f(\mu f) \leq \mu f$$

gdyż μf jest, z definicji, największym ograniczeniem dolnym P . Wobec tego

$$f^2(\mu f) \leq f(\mu f)$$

czyli $f(\mu f) \in P$ a to z kolei za sobą pociąga

$$\mu f \leq f(\mu f).$$

□

Niech $(K, \leq)$ będzie kratą zupełną. Funkcja $f : K \rightarrow K$ jest **ciągła** gdy

$$f\left(\bigvee S\right) = \bigvee f(S)$$

dla każdego łańcucha $S \subset K$. Widzimy, że każda funkcja ciągła jest monotoniczna. W szczególności operator ciągły $\gamma : 2^X \rightarrow 2^X$ jest funkcją ciągłą na kracie zupełnej $(2^X, \subset)$.

Twierdzenie 2 (Kleene). *Niech $(K, \leq)$ będzie kratą zupełną i niech $f : K \rightarrow K$ będzie funkcję ciągłą. Niech ponadto*

$$Indf = \bigvee \{f^n(\perp) : n \geq 0\}.$$

Wówczas

$$\mu f = Indf.$$

Dowód. Zbiór $\{f^n(\perp) : n \geq 0\}$ jest łańcuchem ponieważ f jest monotoniczna. $Indf$ jest więc punktem stałym f :

$$\begin{aligned} f(Indf) &= f\left(\bigvee \{f^n(\perp) : n \geq 0\}\right) \\ &= \bigvee f(\{f^n(\perp) : n \geq 0\}) \\ &= \bigvee \{f^{n+1}(\perp) : n \geq 0\} \\ &= \bigvee \{f^n(\perp) : n \geq 1\} \\ &= Indf \end{aligned}$$

Mamy

$$\perp \leq \mu f$$

Funkcja f jest (ciągła, a więc) monotoniczna, czyli

$$f^n(\perp) \leq f^n(\mu f) = \mu f$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, czyli

$$\mu f \in \bigcap_{s \in \{f^n(\perp) : n \geq 0\}} \{x \in K : s \leq x\}$$

Ale

$$Indf = \min \bigcap_{s \in \{f^n(\perp) : n \geq 0\}} \{x \in K : s \leq x\}$$

więc

$$Indf \leq \mu f.$$

□

Twierdzenie 3. *Założmy że $S = (AX, R)$ jest systemem dedukcyjnym nad językiem L . Zbiór tez $[[S]] \subset L$ jest najmniejszym podzbiorem (w sensie inkluzji) $\Omega \subset L$ dla którego*

- (1) $k \in \Omega$ dla każdego aksjomatu $k \in AX$;
- (2) $\pi_1, \dots, \pi_n \in \Omega \Rightarrow k \in \Omega$ dla każdej reguły $r \in R$ takiej, że $\frac{\pi_1, \dots, \pi_n}{k} r$.

Dowód. Niech zbiór $\Omega \subset L$ będzie taki, jak w założeniach twierdzenia. Wtedy

$$\Omega_1 = AX \subset \Omega$$

i

$$\Omega_2 = \bigcup_{r \in R} \{k : \frac{\pi_1, \dots, \pi_n}{k} r, \pi_1, \dots, \pi_n \in \Omega\} \subset \Omega$$

czyli

$$\Phi(\Omega) = \Omega \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega.$$

Odwrotnie, każdy punkt stały operatora Φ spełnia założenia twierdzenia. Ale

$$[[S]] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$$

jest na jmnieszym punktem stałym, co wnioskujemy z twierdzenia Kleene’a. $\square$

System dedukcyjny jest **deterministyczny**, gdy każde twierdzenie jest konkluzją dokładnie jednej reguły.

Stwierdzenie 4. *Niech $S = (AX, R)$ będzie systemem dedukcyjnym nad językiem L i niech X będzie pewnym zbiorem. Dane*

(1) *dla każdego aksjomatu $k \in AX$, element $\phi(k) \in X$,*

(2) *dla każdej reguły $r \in R$ takiej, że $\frac{\pi_1, \dots, \pi_n}{k} r$, element $\phi(k) = \phi(\phi(\pi_1), \dots, \phi(\pi_n)) \in X$*

określają relację

$$\phi \subset [[S]] \times [[S]]$$

która jest funkcją

$$\phi : [[S]] \rightarrow X$$

gdy S jest deterministyczny.

Dowód. Operator nasycenia $F : 2^{[[S]] \times X} \rightarrow 2^{[[S]] \times X}$:

$$F(P) = P \cup \bigcup_{k \in AX} \{(k, \phi(k))\} \cup \bigcup_{r \in R} \{(k, \phi(x_1, \dots, x_n)) : \frac{\pi_1, \dots, \pi_n}{k} r, (\pi_1, x_1), \dots, (\pi_n, x_n) \in P\}$$

jest monotoniczny i zwarty w stosunku do inkluzji, więc istnieje najmniejszy punkt stały

$$\mu F \subset [[S]] \times X$$

Ta relacja jest funkcją gdy S jest deterministyczny. $\square$

Na koniec zastosujemy poznaną teorię do zdefiniowania termów i ich podstawiania. **Język pierwszego rzędu** składa się z:

- symboli relacyjnych P_i , $i \in I$, gdzie $\sharp(P_i)$ oznaczać będzie ilość argumentów symbolu P_i ,
- symboli funkcyjnych f_j , $j \in J$, gdzie $\sharp(f_j)$ oznaczać będzie ilość argumentów f_j ,
- stałych c_k , $k \in K$.

Niezależnie od języka V będziemy też rozważali zbiór zmiennych indywiduowych V .

Zbiór **termów** języka L definiujemy następująco:

- $V \subset T$,
- $c_k \in T$ dla każdego $k \in K$,
- jeżeli f jest symbolem funkcyjnym n -argumentowym i $t_1, \dots, t_n$ są termami, to

$$ft_1 \dots t_n$$

jest termem.

Zbiór **zmiennych wolnych** termu, $vf(t)$, definiujemy następująco:

- $vf(x) = \{x\}$,
- $vf(c) = \emptyset$,
- $vf(ft_1 \dots t_n) = vf(t_1) \cup \dots \cup vf(t_n)$.

Z kolei zbiór **zmiennych związanych** termu $vb(f)$ jest zawsze zbiorem pustym.

Operację **podstawiania** termu t za zmienną x , (x/t) , definiujemy następująco:

- $y(x/t) = \begin{cases} t, & \text{gdy } x = y \\ y, & \text{gdy } x \neq y \end{cases},$
- $c(x/t) = c,$
- $ft_1 \dots t_n(x/t) = ft_1(x/t) \dots t_n(x/t).$