

1. PRZYKŁADOWE ZADANIA NA KOŁOKWIUM Z LOGIKI.

- (1) Udowodnić, że w dowolnej algebrze Boole'a zachodzą związki:
- (a) $x \cap y = 0 \Leftrightarrow x \leq -y, x \cup y = 1 \Leftrightarrow -y \leq x,$
 - (b) $x \cap -y = 0 \Leftrightarrow x \leq y, x \cup -y = 1 \Leftrightarrow y \leq x,$
 - (c) $-(-x) = x,$
 - (d) $-(x \cap y) = -x \cup -y, -(x \cup y) = -x \cap -y,$
 - (e) $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x.$

- (2) Udowodnić, że każda z poniższych formuł jest tezą klasycznego rachunku zdań:

- (a) $A \vee B \leftrightarrow B \vee A,$
- (b) $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A,$
- (c) $(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \vee B),$
- (d) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B),$
- (e) $\neg(A \wedge \neg A),$
- (f) $A \vee \neg A,$
- (g) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B),$
- (h) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$
- (i) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$

- (3) Udowodnić następujące tautologie:

- (a) $p \rightarrow (p \vee q) \in E(\mathcal{M}_2) \cap E(\mathcal{M}_3) \cap E(\mathcal{M}_T),$
- (b) $p \vee \neg p \in E(\mathcal{M}_2) \setminus E(\mathcal{M}_3) \setminus E(\mathcal{M}_T),$
- (c) $(p \vee \neg p) \rightarrow q \in E(\mathcal{M}_2) \cap E(\mathcal{M}_T) \setminus E(\mathcal{M}_3),$
- (d) $(\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)) \in E(\mathcal{M}_2) \cap E(\mathcal{M}_3) \setminus E(\mathcal{M}_T),$
- (e) $(p \rightarrow q) \notin E(\mathcal{M}_2) \cup E(\mathcal{M}_3) \cup E(\mathcal{M}_T).$

gdzie $\mathcal{M}_2$ jest matrycą klasycznej (dwuwartościowej) logiki zdań, $\mathcal{M}_3$ jest matrycą trójwartościowej logiki zdań Łukasiewicza, a $\mathcal{M}_T$ jest matrycą topologicznej logiki Tarskiego.

- (4) W formule $\forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(x, f(x), z))$ wskazać zmienne wolne i zmienne związane.
- (5) W formule $\forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(x, f(x), z))$ dokonać podstawienia termu $R(s, t, u)$ za zmienną x .
- (6) Namalować drzewko de Bruijna λ -wyrażenia $\lambda z.(\lambda u.zu)((\lambda u.uy)z)$.
- (7) Udowodnić następujące własności podstawiania λ -termów:

$$(a) F_V(M[x := N]) = \begin{cases} (F_V(M) \setminus \{x\}) \cup F_V(N), & \text{jeśli } x \in F_V(M); \\ F_V(M), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$$(b) \text{ Jeśli } x \notin F_V(M) \text{ to } M[x := N] = M.$$

$$(c) M[x := x] = M.$$

$$(d) \text{ Jeśli } \lambda x.P = \lambda y.Q \text{ to } P[x := y] = Q \text{ i } Q[y := x] = P.$$

- (8) Sprawdzić, że $\lambda x.Mx =_\beta M$, gdy M jest abstrakcją.

- (9) Sprawdzić, czy redukcja

$$\begin{aligned} & (\lambda x.xx)((\lambda zy.z(zy))(\lambda u.u)(\lambda w.w)) \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda y.(\lambda u.u)((\lambda u.u)y))(\lambda w.w)) \rightarrow \\ & \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda u.u)((\lambda u.u)(\lambda w.w))) \rightarrow (\lambda x.xx)((\lambda u.u)(\lambda w.w)) \rightarrow (\lambda x.xx)(\lambda w.w) \end{aligned}$$

jest standardowa.

- (10) Zdefiniować w rachunku λ poprzednik dla liczb naturalnych.