

Sprawdzian 1 – grupa 1.

- (1) Wyznaczyć wszystkie rozwiązania całkowite równania $2520x + 6600y = 240$.

ROZWIĄZANIE: Korzystając z rozszerzonego algorytmu Euklidesa otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} 6600 &= 2 \cdot 2520 + 1560, \\ 2520 &= 1 \cdot 1560 + 960, \\ 1560 &= 1 \cdot 960 + 600, \\ 960 &= 1 \cdot 600 + 360, \\ 600 &= 1 \cdot 360 + 240, \\ 360 &= 1 \cdot 240 + 120, \\ 240 &= 2 \cdot 120. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} 120 &= 360 - 1 \cdot 240 = \\ &= 360 - 1 \cdot (600 - 1 \cdot 360) = 2 \cdot 360 - 1 \cdot 600 = \\ &= 2 \cdot (960 - 1 \cdot 600) - 1 \cdot 600 = 2 \cdot 960 - 3 \cdot 600 = \\ &= 2 \cdot 960 - 3 \cdot (1560 - 1 \cdot 960) = 5 \cdot 960 - 3 \cdot 1560 = \\ &= 5 \cdot (2520 - 1 \cdot 960) - 3 \cdot 1560 = 5 \cdot 2520 - 8 \cdot 1560 = \\ &= 5 \cdot 2520 - 8 \cdot (6600 - 2 \cdot 2520) = 21 \cdot 2520 - 8 \cdot 6600. \end{aligned}$$

Tym samym $120 = 21 \cdot 2520 - 8 \cdot 6600$ i mnożąc obydwie strony równania przez 2 otrzymujemy, że $240 = 42 \cdot 2520 - 16 \cdot 6600$ i możemy przyjąć $x_0 = 42$, $y_0 = -16$ za rozwiązanie bazowe. Wszystkie rozwiązania otrzymamy według wzoru $x = 42 + 6600t$, $y = -16 - 2520t$, $t \in \mathbb{Z}$.

- (2) Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 9y = 4 \end{cases}$$

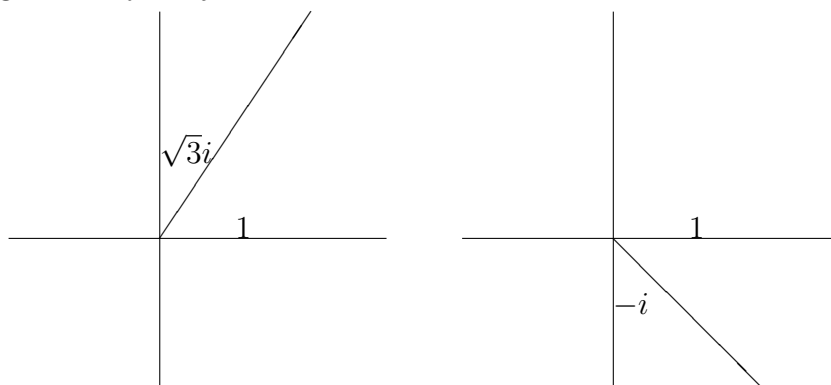
w ciele $\mathbb{Z}_{17}$

ROZWIĄZANIE: Stosujemy metodę przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 9y = 4 \end{cases} \xrightarrow{I \cdot 10 + II} \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 8y = 7 \end{cases} \xrightarrow{II \cdot 15} \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 2 + 12 \cdot 3 = 4 \\ y = 3 \end{cases} \xrightarrow{I \cdot 6} \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

- (3) Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\frac{(1+i\sqrt{3})^{76}}{(1-i)^{37}}$. Wynik zapisać jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

ROZWIĄZANIE: Z pomocą poniższych ilustracji bez trudu przekształcamy liczby $1 + i\sqrt{3}$ oraz $1 - i$ do postaci trygonometrycznej:



otrzymując $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ oraz $1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$. Wobec tego

$$\begin{aligned}(1 + i\sqrt{3})^{76} &= 2^{76}(\cos \frac{76\pi}{3} + i \sin \frac{76\pi}{3}) = 2^{76}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}), \\ (1 - i)^{37} &= \sqrt{2}^{37}(\cos \frac{37 \cdot 7\pi}{4} + i \sin \frac{37 \cdot 7\pi}{4}) = 2^{18}\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).\end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned}\frac{(1 + i\sqrt{3})^{76}}{(1 - i)^{37}} &= \frac{2^{76}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})}{2^{18}\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})} = \\ &= 2^{57}\sqrt{2} \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{57}\sqrt{2} \frac{(-1 - i\sqrt{3})(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{4} = \\ &= 2^{55}\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})) = 2^{56} - 2^{56}\sqrt{3} + i(2^{56} + 2^{56}\sqrt{3}).\end{aligned}$$

W pozostałych grupach zadania rozwiązujemy stosując takie same metody. Dla uproszczenia podajemy tu tylko wyniki końcowe.

Sprawdzian 1 – grupa 2.

- (1) Wyznaczyć wszystkie rozwiązania całkowite równania $2520x + 6600y = 20$.

ROZWIĄZANIE: Sprawdzamy, że $NWD(2520, 6600) = 120$. Ponieważ $120 \nmid 20$, równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

- (2) Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 9y = 4 \end{cases}$$

w ciele $\mathbb{Z}_{19}$

ROZWIĄZANIE: $x = 16, y = 6$.

- (3) Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\frac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}$. Wynik zapisać jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

ROZWIĄZANIE: $\frac{\sqrt{3}}{2^{11}} - \frac{i}{2^{11}}$.

Sprawdzian 1 – grupa 3.

- (1) Wyznaczyć wszystkie rozwiązania całkowite równania $17160x + 2280y = 240$.

ROZWIĄZANIE: $x = 4 + 2280t, y = -15 - 17160t$.

- (2) Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 14x + 9y = 4 \end{cases}$$

w ciele $\mathbb{Z}_{17}$

ROZWIĄZANIE: $x = 4, y = 15$.

- (3) Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\frac{(1+i\sqrt{3})^{76}}{(1-i)^{37}}$. Wynik zapisać jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

ROZWIĄZANIE: patrz Grupa 1.

Sprawdzian 1 – grupa 4.

- (1) Wyznaczyć wszystkie rozwiązania całkowite równania $1430x + 4370y = 20$.

ROZWIĄZANIE: $x = -110 + 4370t, y = 36 - 1430t$.

- (2) Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 14x + 9y = 4 \end{cases}$$

w ciele $\mathbb{Z}_{19}$

ROZWIĄZANIE: $x = 14, y = 4$.

- (3) Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\frac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}$. Wynik zapisać jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

ROZWIĄZANIE: patrz Grupa 2.