WYKŁAD 11

11. Baza i wymiar

Def. 1: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Podzbiór $B \subset V$ nazywamy bazą przestrzeni V, jeśli:

(1) B jest liniowo niezależny

(2) B jest generujący

Przykłady: (1) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}^n$, F^n $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

(2) $M_n^m(F)$ $\quad i\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $F[X]$ $\quad (1, X, X^2, X^3, \dots)$

(4) $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

Tw. 1: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $B \subset V$. Następujące warunki są równoważne:

(1) B jest bazą

(2) B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V.

Dowód: $(1) \Rightarrow (2)$ Załóżmy, że B jest bazą.
Przypuśćmy, że istnieje liniowo niezależny podzbiór $B \subsetneq B' \subset V$.
Niech $v \in B' \setminus B$. Ponieważ $V = \mathrm{lin}(B)$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$, $a_1, \dots, a_m \in F$. Wówczas $v - a_1 v_1 - \dots - a_m v_m = \theta$ oraz $1 \neq 0$, a więc B' nie jest liniowo niezależny.

$(2) \Rightarrow (1)$ Załóżmy, że B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V. Wystarczy pokazać, że B jest generujący.
Ustalmy $v \in V$. Jeśli $v \in B$, to $v \in \mathrm{lin}(B)$.
Jeśli $v \notin B$, to $B \cup \{v\}$ jest liniowo zależny, a więc $av + a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \theta$ dla pewnych $a, a_1, \dots a_m \in F$, $v_1, \dots, v_m \in B$.
Ponieważ $v_1, \dots, v_m$ są liniowo niezależne, więc $a \neq 0$.
Zatem $v = -\frac{a_1}{a} v_1 - \dots - \frac{a_m}{a} v_m \in \mathrm{lin}(A)$ $\square$

Wniosek 1: Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Dowód: Jeżeli $V = \{\theta\}$ to zbiór pusty jest bazą.
Jeżeli $V \neq \{\theta\}$ to istnieje $v \in V$, $v \neq \theta$ i $A = \{v\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym. W rodzinie niepustej

$$\mathcal{X} = \{ B \subset V : A \subset B \text{ i } B \text{ jest liniowo niezależny} \}$$

uporządkowanej przez inkluzję każdy łańcuch ma ograniczenie górne, a więc wobec lematu Kuratowskiego – Zorna istnieje element maksymalny, który wobec tw. 1 jest bazą. $\square$

Tw. 2 Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $B \subset V$. Następujące warunki są równoważne:

(1) B jest bazą

(2) B jest generujący i dla każdego $v \in V$ istnieje dokładnie jedna kombinacja liniowa taka, że:

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

dla $a_1, \ldots, a_m \in F$, $v_1, \ldots, v_m \in B$.

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2) Ustalmy $v \neq \Theta$ i przypuśćmy, że

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = a_1' v_1' + \ldots + a_n' v_n'$$

dla $v_1, \ldots, v_m, v_1', \ldots, v_n' \in B$ oraz $a_1, \ldots, a_m, a_1', \ldots, a_n' \in F$. Wówczas:

$$\Theta = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m - a_1' v_1' - \ldots - a_n' v_n'$$

i ponieważ $v \neq \Theta$, nie wszystkie a_i, a_j' są równe 0, skąd $v_1, \ldots, v_m, v_1', \ldots, v_n'$ są liniowo zależne lub $n = m$ i $v_i = v_i'$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Przypuśćmy, że B jest liniowo zależny. Wówczas

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

dla pewnych $v, v_1, \ldots, v_m \in B$ oraz $a_1, \ldots, a_m \in F$ i $v = 1 \cdot v$ oraz $v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$ są dwoma kombinacjami wektorów z B dającymi v. $\square$

Def. 2: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $B \subset V$ będzie bazą. Dla $v \in V$ jednoznacznie wyznaczone skalary $a_1, \ldots, a_m \in F$ takie, że dla pewnych $v_1, \ldots, v_m \in B$

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

nazywamy współrzędnymi v w bazie B.

Przykłady: (1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ w $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (...)

(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ w $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (...)

Lemat 1: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n \in V$. Jeżeli $v \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$ oraz $v \notin \operatorname{lin}(w_1, \ldots, w_n)$, to dla pewnego $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$v_i \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$$

Dowód: Załóżmy, że $v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m + b_1 w_1 + \ldots + b_n w_n$, $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in F$. Istnieje $a_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, m\}$: gdyby $a_1 = \ldots = a_m = 0$, to wówczas $v = b_1 w_1 + \ldots + b_n w_n \in \operatorname{lin}(w_1, \ldots, w_n)$. Wobec tego:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} + \frac{1}{a_i} v - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \ldots - \frac{a_m}{a_i} v_m - \frac{b_1}{a_i} w_1 - \ldots - \frac{b_n}{a_i} w_n \quad \square$$

<u>Tw. 3 (lemat Steinitza[*)] o wymianie)</u>: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v_1,\dots,v_m, w_1,\dots,w_n \in V$. Załóżmy, że $V = \operatorname{lin}(v_1,\dots,v_m)$ oraz że $w_1,\dots,w_n$ są liniowo niezależne. Wówczas:

(1) $n \leq m$

(2) istnieją $i_1, i_2, \dots, i_{m-n}$ takie, że

$$V = \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n, v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n}})$$

<u>Dowód:</u> Dowód prowadzimy indukcyjnie względem n. Dla $n=0$ nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że jeśli $w_1,\dots,w_n$ są liniowo niezależne, to $n \leq m$ oraz istnieją $i_1,\dots,i_{m-n}$ takie, że $V = \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n, v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n}})$. Niech $w_1,\dots,w_{n+1}$ będą liniowo niezależne.
Jeśli $n<m$, to $n+1 \leq m$. Jeśli $n=m$ to, wobec założenia indukcyjnego, $V = \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n)$ i stąd $w_{n+1} \in \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n)$, a więc $w_1,\dots,w_n,w_{n+1}$ nie mogą być liniowo niezależne.
Pozostaje wykazać część (2). Wobec założenia indukcyjnego:

$$w_{n+1} \in V = \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n, v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n}})$$

Ponadto $w_{n+1} \notin \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n)$. Wobec Lematu 1, po ewentualnej zmianie notacji:

$$v_{i_{m-n}} \in \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n,w_{n+1},v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n-1}}),$$

~~Zauważmy, że ponieważ $V = \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n, v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n}})$, oraz każdy z wektorów $w_1,\dots,w_n,w_{n+1},v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n-1}}$ jest kombinacją liniową $w_1,\dots,w_n,v_{i_1}$~~

Zauważmy, że ponieważ każdy z wektorów $w_1,\dots,w_n,v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n}}$ jest kombinacją liniową wektorów $w_1,\dots,w_n,w_{n+1},v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n-1}}$ oraz ponieważ $V = \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n, v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n}})$, więc w konsekwencji $V = \operatorname{lin}(w_1,\dots,w_n,w_{n+1},v_{i_1},\dots,v_{i_{m-n-1}})$. □

<u>Wniosek 2:</u> Jeśli n-elementowy układ jest bazą przestrzeni V, to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.
<u>Dowód:</u> Niech $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ i $(\beta_1,\dots,\beta_m)$ będą bazami. Wówczas układ $(\beta_1,\dots,\beta_m)$ jest liniowo niezależny, a $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ generujący, więc z tw. Steinitza $m \leq n$. Przez symetrię $n \leq m$. □

<u>Def. 3:</u> Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy p. V nazywamy <u>wymiarem</u> i ozn. $\dim V$

---

*) Ernst Steinitz (1871-1928) urodzony w Laurahütte, dziś części Siemianowic Śląskich.