WYKŁAD 10

10. Kombinacje liniowe wektorów.

<u>Def. 1:</u> Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, a $A \subset V$ pewnym zbiorem. Najmniejszą podprzestrzeń przestrzeni V zawierającą zbiór A nazywamy <u>podprzestrzenią generowaną przez A</u> i oznaczamy $\operatorname{lin}(A)$. Każdy zbiór A o tej własności, że $\operatorname{lin}(A) = U$ nazywamy <u>zbiorem generatorów</u> podprzestrzeni U. Jeśli $A = \{v_1, \dots, v_m\}$ to oznaczamy

$$\operatorname{lin}(v_1, \dots, v_m) = \operatorname{lin}(A).$$

Mówimy, że podprzestrzeń U jest <u>skończenie generowana</u>, gdy istnieją takie wektory $v_1, \dots, v_m \in V$, że:

$$U = \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_m).$$

<u>Tw. 1 (o postaci elementów podprzestrzeni generowanej przez zbiór):</u> Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F oraz niech $A \subset V$. Wówczas:

$$\operatorname{lin}(A) = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, v_1, \dots, v_m \in A\}$$

<u>Dowód:</u> Oznaczmy

$$U = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, v_1, \dots, v_m \in A\}.$$

Pokażemy, że $U < V$.

Istotnie, jeśli $a_1v_1 + \dots + a_mv_m$, $a_1'v_1' + \dots + a_n'v_n' \in U$, to $a_1v_1 + \dots + a_mv_m + a_1'v_1' + \dots + a_n'v_n' \in U$.

Ponadto dla $\lambda \in F$ $\lambda(a_1v_1 + \dots + a_mv_m) = \lambda a_1v_1 + \dots + \lambda a_mv_m \in U$.

Pokażemy, że $U = \operatorname{lin}(A)$.

Inkluzja $(\supset)$ jest oczywista, pozostaje wykazać $(\subset)$.

Dowód prowadzimy indukcyjnie względem m.

Dla $m = 1$ niech $v_1 \in A$. Wówczas a_1v_1 należy do każdej podprzestrzeni zawierającej v_1, w szczególności do $\operatorname{lin}(A)$.

Dla $m > 1$ ustalmy $v_1, \dots, v_m \in A$, $a_1, \dots, a_m \in F$ i załóżmy, że

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m \in \operatorname{lin}(A).$$

Ustalmy $a_{m+1} \in F$, $v_{m+1} \in A$. Wówczas

$$\underbrace{\underbrace{a_1v_1 + \dots + a_mv_m}_{\operatorname{lin}(A)} + \underbrace{a_{m+1}\underbrace{v_{m+1}}_{\operatorname{lin}(A)}}_{\operatorname{lin}(A)}} \in \operatorname{lin}(A)$$

$\square$

<u>Def. 2:</u> Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v_1, \dots, v_m \in V$, niech $a_1, \dots, a_m \in F$. Wektor

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m$$

nazywamy <u>kombinacją liniową</u> wektorów $v_1, \dots, v_m$.

Przykład: Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Wektor

$$1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

jest kombinacją liniową wektorów $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

Def. 3: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v_1, \dots, v_m \in V$. Wektory $v_1, \dots, v_m$ są liniowo niezależne jeśli:

$$\forall a_1, \dots, a_m \in F \quad a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0.$$

Jeśli wektory nie są liniowo niezależne, to są liniowo zależne.

Przykłady: (1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^3$ (...)

(2) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ są liniowo zależne w $\mathbb{R}^3$ (...)

Tw. 2: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $v_1, \dots, v_m \in V$. Wektory $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne wtw. gdy istnieje wektor $v \in \{v_1, \dots, v_m\}$ będący kombinacją liniową pozostałych.

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne. Wówczas istnieją skalary $a_1, \dots, a_m \in F$ takie, że

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \theta$$

z których przynajmniej jeden jest niezerowy, powiedzmy a_1. Wobec tego:

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \frac{a_3}{a_1} v_3 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m$$

($\Leftarrow$) Załóżmy, że wektor v_1 jest kombinacją liniową $v_2, \dots, v_m$:

$$v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_m v_m.$$

Wówczas $1 \cdot v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_m v_m = \theta$ oraz $1 \neq 0$ □

Tw. 3: Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F, niech $A \subset B \subset V$. Wówczas:

(1) jeśli A jest liniowo zależny, to B jest liniowo zależny

(2) jeśli B jest liniowo niezależny, to A jest liniowo niezależny

(3) jeśli A jest liniowo zależny, to istnieją wektory $v_1, \dots, v_m \in A$ które są liniowo zależne.