WYKŁAD 9

9. Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie.

Def. 1: Niech A i B będą zbiorami. Działaniem zewnętrznym zbioru A na zbiorze B nazywamy funkcję $*: A \times B \to B$.

Def. 2: Niech F będzie ciałem. Algebrę $(V, F, +, \cdot)$, gdzie $V \neq \emptyset$, $+$ jest działaniem w zbiorze V zwanym dodawaniem wektorów a $\cdot$ jest działaniem zewnętrznym ciała F na V zwanym mnożeniem przez skalar nazywamy przestrzenią liniową (lub wektorową), jeżeli:

(1) $\forall v, w, u \in V \quad v+(w+u) = (v+u)+w$

(2) $\forall v, w \in V \quad v+w = w+v$

(3) $\forall v \in V \ \exists w \in W \quad v+w = \theta$, gdzie θ jest pewnym ustalonym elementem V

(4) $\forall v \in V \quad v+\theta = \theta+v = v$

(5) $\forall a, b \in F \ \forall v \in V \quad (a+b)v = av+bv$

(6) $\forall a \in F \ \forall v, w \in V \quad a(v+w) = av+aw$

(7) $\forall a, b \in F \ \forall v \in V \quad a(bv) = (ab)v$

(8) $\forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$

Elementy zbioru V tradycyjnie nazywamy wektorami.

Przykłady:

(1) E - płaszczyzna euklidesowa, $P \in E$

$S_P(E) = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in E\}$

(2) $S_{[0]}(E)$

(3) $F^n = \left\{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_i \in F\right\}$

(4) $F_n = \{[a_1 \ldots a_n] : a_i \in F\}$

(5) F^n_m

(6) F^∞

(7) $F^{(\infty)}$

(8) $A \neq \emptyset$

F^A

(9) F

$\{a\}$

(10) $C_n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f^{(n)} \text{ ciągła}\}$

(11) $F[X]$

(12) $F[X]_n$

(13) $F[x_1,\dots,x_m]$

(14) $F[x_1,\dots,x_m]_n$

(15) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

(16) $F \subset E$

(17) $V_1,\dots,V_m$ – p.l.

$V_1 \times \dots \times V_m$

<u>Tw.1:</u> Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Wówczas

(1) $\forall\, v,w,u \in V \quad v+w = v+u \Rightarrow w = u$

(2) $\forall\, v,w \in V \quad v = -w \Rightarrow v+w = \theta$

(3) $\forall\, v,w \in V \quad v-w = v+(-w)$

(4) $\forall\, a \in F \ \forall\, v \in V \quad a \cdot v = \theta \Leftrightarrow a = 0 \lor v = \theta$

(5) $\forall\, a \in F \quad a \cdot \theta = \theta$

(6) $\forall\, v \in V \quad 0 \cdot v = \theta$

(7) $\forall\, v \in V \quad -v = (-1)\cdot v$

(8) $\forall\, v,w,u \in V \quad v-(w+u) = (v-w)-u$

$v-(w-u) = (v-w)+u$

$-(v+u) = (-v)+(-u)$

(9) $\forall\, v,w \in V \ \forall\, a,b \in F \quad -(v-w) = (-v)+w$

$a(v-w) = av-aw$

$(a-b)v = av-bv$

$a(-v) = (-a)v = -av$

$(-a)(-v) = av$

<u>Def.3:</u> Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Podzbiór U przestrzeni V nazywamy <u>podprzestrzenią</u> jeśli

(1) $\forall\, v,w \in U \quad v+w \in U$

(2) $\forall\, a \in F \ \forall\, v \in U \quad av \in U$ Oznaczamy $U < V$.

<u>Tw.2:</u> Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F. Podzbiór U jest podprzestrzenią wtw, gdy $(U, +|_{U\times U}, \cdot|_{F\times U})$ jest przestrzenią liniową.

<u>Tw.3:</u> Niech U będzie układem równań jednorodnych o n niewiadomych. Wówczas $Sol(U) < F^n$.