WYKŁAD 7 7. Algebra macierzy.

Def. 1: Macierzą nad ciałem F nazywamy prostokątną tablicę elementów ciała F. Zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ oznaczamy $M^m_n(F)$. Napis $A=[a_{ij}]$ oznacza, że macierz A składa się z elementów takich, że w i-tym wierszu i j-tej kolumnie znajduje się a_{ij}.
Macierze A i B są równe, gdy $A, B \in M^m_n(F)$ i jeśli $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, to $a_{ij}=b_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.
Sumę macierzy $A=[a_{ij}]$ i $B=[b_{ij}]$, $A, B \in M^m_n(F)$, definiujemy jako macierz $C=[c_{ij}]$, gdzie $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.
Iloczyn macierzy $A=[a_{ij}]$, $A \in M^m_n(F)$, przez skalar $\lambda \in F$ definiujemy jako macierz $C=[c_{ij}]$, gdzie $c_{ij}=\lambda a_{ij}$.
Macierz zerową Θ definiujemy jako $\Theta=[0]$.

Tw. 1: Niech $A, B, C \in M^m_n(F)$, niech $\lambda, \mu \in F$. Wówczas:

(1) $(A+B)+C = A+(B+C)$
(2) $A+B = B+A$
(3) $\Theta + A = A$
(4) $A+(-A) = \Theta$
(5) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
(6) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
(7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
(8) $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \Theta$
(9) jeśli $\lambda A = \Theta$, to $\lambda = 0$ lub $A = \Theta$.

Def. 2: Iloczynem macierzy $A=[a_{ij}]$ i $B=[b_{jk}]$, $A \in M^m_n(F)$, $B \in M^n_p(F)$, nazywamy macierz $C=[c_{ik}]$, $C \in M^m_p(F)$, daną wzorem

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Oznaczamy $C = A \cdot B$.

Przykłady: (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

Tw. 2: (1) $(AB)C = A(BC)$, $A \in M^m_n(F)$, $B \in M^n_p(F)$, $C \in M^p_q(F)$

(2) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $A \in M^m_n(F)$, $B \in M^n_p(F)$, $\lambda \in F$

(3) $(A+B)C = AC + BC$, $A, B \in M^m_n(F)$, $C \in M^n_p(F)$

(4) $D(A+B) = DA + DB$, $A, B \in M^m_n(F)$, $D \in M^p_m(F)$.

Def. 3: Macierz $I_n = [\delta_{ij}]$, $I_n \in M^n_n(F)$, gdzie

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

nazywamy macierzą identycznościową. Macierz $A \in M^n_n(F)$ nazywamy odwracalną (lub nieosobliwą), jeśli istnieje macierz $B \in M^n_n(F)$ taka, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Macierz B nazywamy wówczas macierzą odwrotną do A i oznaczamy A^{-1}

Tw. 3: (1) Macierz odwrotna wyznaczona jest jednoznacznie.

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $A, B \in M^n_n(F)$.

Dowód: (1) Jeśli $BA = I_n$ oraz $A \cdot B' = I_n$, to:

$$B = B \cdot I_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B'$$

(2) Wystarczy zauważyć, że:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \qquad \square$$

Tw. 4: Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i niech $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Wówczas A jest nieosobliwa i $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \Delta^{-1}$.

Dowód:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Delta^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Def. 4: Macierzami elementarnymi nazywamy macierze:

(1) E_{ij} powstałe z I_n przez zamianę i-tego i j-tego wiersza

(2) $E_i(\lambda)$ powstałe z I_n przez pomnożenie i-tego wiersza przez λ

(3) $E_{ij}(\lambda)$ powstałe z I_n przez dodanie do i-tego wiersza j-tego wiersza pomnożonego przez λ.

Przykłady:

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_{23}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tw. 5: Macierze $E \cdot A$, $A \in M^n_n(F)$, $E \in \{E_{ij}, E_i(\lambda), E_{ij}(\lambda)\}$, powstają z macierzy A przez wykonanie odpowiedniej operacji elementarnej.

Przykład:

$$E_{23} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \\ c & d \end{bmatrix}$$

Wniosek 1: Macierze elementarne są nieosobliwe oraz:

(1) $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ (2) $E_i^{-1}(\lambda) = E_i(\lambda^{-1})$ (3) $E_{ij}^{-1}(\lambda) = E_{ij}(-\lambda)$

Dowód: W tw. 5 wystarczy użyć $A = I_n$.

Def. 5: Macierze A i B, $A, B \in M_n^m(F)$, są <u>wierszowo równoważne</u> jeśli B można otrzymać z A przez ciąg operacji elementarnych na wierszach.

Uwaga 1: Macierze A i B są wierszowo równoważne, jeśli istnieją macierze elementarne $E_1, \dots, E_r$ takie, że:
$$B = E_r E_{r-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 A$$

Tw. 6: Niech A będzie macierzą nieosobliwą, $A \in M_n^n(F)$. Wówczas:
(1) A jest wierszowo równoważna I_n
(2) A jest iloczynem macierzy elementarnych

Tw. 7: Niech $A \in M_n^n(F)$ będzie wierszowo równoważna I_n. Wówczas A jest nieosobliwa i A^{-1} może być wyznaczona przez wykonanie tego samego ciągu operacji elementarnych na I_n jakie zostały wykonane na A aby otrzymać I_n.

Dowód: Przypuśćmy, że $E_r \cdot \ldots \cdot E_1 A = I_n$, tzn. $BA = I_n$ dla $B = E_r \cdot \ldots \cdot E_1$. Wówczas $B^{-1}(BA) = B^{-1} I_n$, a więc $A = B^{-1}$. Ponadto $A^{-1} = (B^{-1})^{-1} = B = E_r \cdot \ldots \cdot E_1 I_n$, a zatem A^{-1} jest otrzymana z I_n przez wykonanie odpowiednich operacji wierszowych. □

Przykład: Wyznaczyć macierz odwrotną do $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] R_2 - R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] (-1) R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] R_1 - 2R_2$$

a więc $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

WYKŁAD 8

8. Wyznaczniki

Def. 1: <u>Wyznacznikiem</u> macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ nazywamy liczbę
$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$
Zamiast $\det A$ piszemy też $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

<u>Minorem</u> $M_{ij}(A)$ macierzy $A \in M_n^n(F)$ nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. <u>Wyznacznik</u> macierzy $A \in M_n^n(F)$ wyznaczamy w oparciu o <u>rozwinięcie Laplace'a</u> według 1-ego wiersza:
$$\det A = a_{11} M_{11}(A) - a_{12} M_{12}(A) + \ldots + (-1)^{1+n} M_{1n}(A).$$

Przykład:
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

Tw. 1: Jeśli macierz A zawiera wiersz zerowy to $\det A = 0$.

Tw. 2: Jeśli $A = [a_{ij}]$ oraz $a_{ij} = 0$ dla $i < j$, to
$$\det A = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Tw. 3: Niech $A \in M_n^n(F)$. Wówczas

(1) $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A)$, $i \in \{1, \dots, n\}$

(2) $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A)$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Tw. 4: $\det A^T = \det A$, gdzie $A = [a_{ij}]$, $A^T = [a_{ji}]$.

Tw. 5: Jeśli dwa wiersze lub dwie kolumny macierzy A są równe, to $\det A = 0$.

Tw. 6: Jeśli dwa wiersze lub dwie kolumny macierzy A zostaną zamienione miejscami, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny.

Tw. 7: Jeśli wiersz pomnożony przez skalar zostanie dodany do innego wiersza, wyznacznik nie ulegnie zmianie.
To samo dla kolumn.

Przykład:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \dots$$