WYKŁAD 6

6. Metoda eliminacji Gaussa.

Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Podamy metodę rozwiązania tego układu przez eliminację Gaussa.

Etap 1: sprowadzenie do postaci trójkątnej.

Wybieramy równanie i niewiadomą o niezerowym współczynniku i nazywamy ją niewiadomą bazową 1 kroku.

Załóżmy, że jest nią x_1 ze współczynnikiem $a_{11} \neq 0$.

Mnożymy wybrane równanie (u nas równanie pierwsze) przez $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i odejmujemy od drugiego równania.

Postępując indukcyjnie mnożymy wybrane równanie przez $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ i odejmujemy od i-tego równania, $i \in \{2, \dots, m\}$.

Następnie przechodzimy do kroku 2, w którym wybieramy równanie spośród $i \in \{2, \dots, m\}$, niewiadomą bazową 2 kroku i powtarzamy procedurę dla równań $i \in \{3, \dots, m\}$.

Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \tilde{a}_{rr}x_r + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_r$ zostały wybrane jako niewiadome bazowe, a $x_{r+1}, \dots, x_n$ pozostają jako parametry.

Etap 2: sprowadzenie do postaci diagonalnej.

W ostatnim równaniu (u nas r) wybieramy niewiadomą bazową, powiedzmy x_r, i eliminujemy z równań $i \in \{1, \dots, r-1\}$ odejmując równanie r od i po uprzednim pomnożeniu przez $\frac{\tilde{a}_{ir}}{\tilde{a}_{rr}}$. Następnie postępujemy indukcyjnie z równaniami $i \in \{1, \dots, r-2\}$.

Na koniec tego etapu układ zostaje przekształcony do postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \qquad\qquad + \bar{a}_{1r+1}x_{r+1} + \bar{a}_{1r+2}x_{r+2} + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 \qquad + \bar{a}_{2r+1}x_{r+1} + \bar{a}_{2r+2}x_{r+2} + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{rr}x_r + \tilde{a}_{rr+1}x_{r+1} + \tilde{a}_{rr+2}x_{r+2} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r \end{cases}$$

Etap 3: zapisujemy rozwiązanie przenosząc parametry na prawą stronę i dzieląc przez współczynniki przy $x_1, \dots, x_r$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\bar{b}_1}{a_{11}} - \frac{\bar{a}_{1r+1}}{a_{11}} x_{r+1} - \ldots - \frac{\bar{a}_{1n}}{a_{11}} x_n \\ \quad x_2 = \frac{\bar{b}_2}{\tilde{a}_{22}} - \frac{\bar{a}_{2r+1}}{\tilde{a}_{22}} x_{r+1} - \ldots - \frac{\bar{a}_{2n}}{\tilde{a}_{22}} x_n \\ \quad \vdots \\ \qquad x_r = \frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rr}} - \frac{\tilde{a}_{rr+1}}{\tilde{a}_{rr}} x_{r+1} - \ldots - \frac{\tilde{a}_{rn}}{\tilde{a}_{rr}} x_n \end{cases}$$

<u>Przykład:</u>
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases} \qquad (\ldots)$$

<u>Uwaga:</u> Chcąc zaoszczędzić czas układy równań zapisujemy jako <u>macierze</u> tj. prostokątne tabliczki liczb, które są odpowiednimi współczynnikami w odpowiednich równaniach.

<u>Przykłady:</u> (1)
$$\begin{cases} x + 4y + 2z + 5t = 0 \\ 2x + y + z + 4t = 0 \\ 3x + 5y + 3z + 2t = 0 \\ x + 4y + 4z + 2t = 0 \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_7 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \text{ w } \mathbb{Z}_7 \quad (\ldots)$$

(2)
$$\left[\begin{array}{cccc:c} -2-4i & -2-6i & 3+4i & -2-i & 0 \\ 2i & -2i & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \text{ w } \mathbb{C} \quad (\ldots)$$

(3)
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 010 & 110 & 001 & 000 \\ 100 & 111 & 010 & 010 \end{array}\right] \text{ w } \mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+1) \quad (\ldots)$$