WYKŁAD 3

3. Ciało liczb zespolonych

<u>Tw. 1:</u> Niech $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. W zbiorze $\mathbb{C}$ określamy dodawanie:
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$$
oraz mnożenie:
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc).$$
Wówczas $(\mathbb{C},+,\cdot)$ jest ciałem, w którym elementem neutralnym dodawania jest $(0,0)$, a elementem neutralnym mnożenia jest $(1,0)$.

<u>Dowód:</u> Pokażemy dla przykładu, że każdy $\neq (0,0)$ element ma element odwrotny względem mnożenia.
Niech $(0,0)\neq(a,b)\in\mathbb{C}$. Rozważmy element:
$$\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)\in\mathbb{C}$$
Wówczas:
$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\ \frac{ab-ab}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$
□

<u>Def. 1:</u> Ciało $(\mathbb{C},+,\cdot)$ nazywamy <u>ciałem liczb zespolonych</u>.
Zwyczajowo piszemy $a+ib$ zamiast (a,b) oraz a zamiast $(a,0)$.
Liczbę a nazywamy <u>częścią rzeczywistą</u> liczby $a+bi$ i oznaczamy $\mathrm{Re}(a+ib)$. Liczbę b nazywamy <u>częścią urojoną</u> liczby $a+bi$ i oznaczamy $\mathrm{Im}(a+bi)$.

<u>Przykłady:</u> $(1-i)+(4+7i)$, $(-1+3i)\cdot(2-5i)$, $\frac{-1+3i}{2+5i}$

<u>Uwaga 1:</u> Ponieważ $i\cdot i=-1$, intuicyjnie przyjmujemy $\sqrt{-1}=i$.

<u>Def. 2:</u> Niech $z=a+bi\in\mathbb{C}$. <u>Liczbą sprzężoną</u> z liczbą z nazywamy liczbę $\bar z=a-bi$.

<u>Przykłady:</u> $\overline{1+2i}$

<u>Tw. 2:</u> Niech $z,w\in\mathbb{C}$. Wówczas:

(1) $\overline{z+w}=\bar z+\bar w$ (2) $\overline{z-w}=\bar z-\bar w$

(3) $\overline{zw}=\bar z\cdot\bar w$ (4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar z}{\bar w}$

<u>Dowód:</u> Pokażemy dla przykładu (4):
Niech $z=a+bi$, $w=c+di$. Wówczas
$$\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ca+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$$
skąd $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{ca+bd}{c^2+d^2}-\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$. Z drugiej strony:
$$\frac{\bar z}{\bar w}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)(c+di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i$$
□

<u>Def. 3:</u> Niech $z=a+bi\in\mathbb{C}$. <u>Wartością bezwzględną</u> (albo <u>modułem</u>) liczby z nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

<u>Przykłady:</u> $|3+4i|$

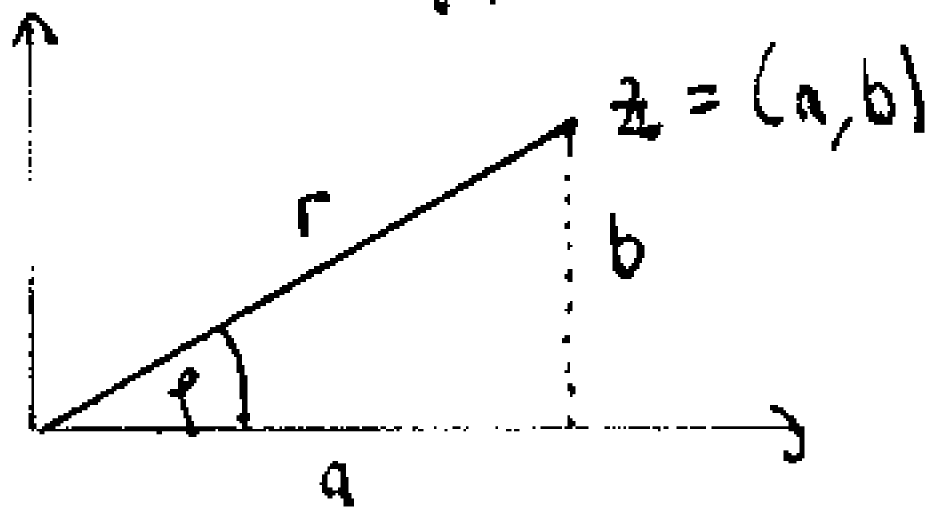
<u>Tw. 3:</u> Niech $z,w\in\mathbb{C}$. Wówczas:

(1) $|z-w|$ = odległości między punktami z i w

(2) $|zw|=|z|\cdot|w|$.

(3) $|z|^2=z\cdot\bar z$.

Def. 4: Niech $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Niech (r,φ) będą takimi liczbami, że $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$:



(tj. niech (r,φ) będą biegunowymi współrzędnymi punktu (a,b)), a więc niech $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Przedstawienie to nazywamy postacią trygonometryczną liczby z.
Kąt skierowany φ nazywamy argumentem liczby z i oznaczamy $\arg(z)$. Kąt skierowany $\theta \in [0, 2\pi)$ taki, że $\cos\theta = \cos\arg(z)$ i $\sin\theta = \sin\arg(z)$ nazywamy argumentem głównym liczby z i oznaczamy $\mathrm{Arg}(z)$.

Przykłady: $1+i$, $\sqrt{3}-i$

Tw. 4: Niech $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \in \mathbb{C}$. Wówczas:

(1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

(2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

(3) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$.

Dowód: Pokażemy dla przykładu (1):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$
□

Przykład: Postać trygonometryczna $(1+i)(\sqrt{3}-i)$

Wniosek 1 (de Moivre): Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$.
Wówczas $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Przykład: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{100}$

Tw. 5: Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas z ma n różnych pierwiastków stopnia n:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

gdzie $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$.

Dowód: Niech $w \in \mathbb{C}$ będzie taką liczbą, że $w^n = z$ i niech
$$w = s(\cos\theta + i\sin\theta).$$
Wówczas $s^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, skąd $s = \sqrt[n]{r}$ oraz
$$\cos n\theta = \cos\varphi \quad \text{i} \quad \sin n\theta = \sin\varphi.$$
Tym samym, wobec okresowości cos i sin:
$$n\theta = \varphi + 2k\pi$$
a więc $\theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$. □

Przykład: Pierwiastki stopnia 6 z -2