

Zestaw zadań 1: Indukcja matematyczna, NWD, NWW i algorytm Euklidesa.

- (1) Udowodnić następujące twierdzenia:
- (a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = s_1$
 - (b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = s_2$
 - (c) $\sum_{k=1}^n k^3 = s_1^2$
 - (d) $\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5}s_2(3n^2 + 3n - 1)$
 - (e) $\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{1}{3}s_1^2(2n^2 + 2n - 1)$
 - (f) $\sum_{k=1}^n k^6 = \frac{1}{7}s_2(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$
 - (g) $\sum_{k=1}^n k^7 = \frac{1}{6}s_1^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$
 - (h) $\sum_{k=1}^n k^8 = \frac{1}{15}s_2(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)$
- (2) Udowodnić następujące twierdzenia:
- (a) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 = \sigma_1$
 - (b) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1) = \sigma_2$
 - (c) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^3 = \sigma_1(2n^2 - 1)$
 - (d) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^4 = \frac{1}{5}\sigma_2(12n^2 - 7)$
 - (e) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^5 = \frac{1}{3}\sigma_1(16n^4 - 20n^2 + 7)$
 - (f) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^6 = \frac{1}{7}\sigma_2(48n^4 - 72n^2 + 31)$
- (3) Udowodnić następujące twierdzenia:
- (a) $2|n^2 - n$
 - (b) $6|n^3 - n$
 - (c) $30|n^5 - n$
 - (d) $42|n^7 - n$
 - (e) $546|n^9 - n$
 - (f) $9|10^n - 1$
 - (g) $12|10^n - 4$
 - (h) $11|10^n - (-1)^n$
 - (i) $101|10^{2n} - (-1)^n$
 - (j) $1001|10^{3n} - (-1)^n$
 - (k) $7|10^{3n+1} - 3(-1)^n$
 - (l) $13|10^{3n+1} + 3(-1)^n$
 - (m) $14|10^{3n+2} - 2(-1)^n$
 - (n) $52|10^{3n+2} + 4(-1)^n$
 - (o) $11|2^{6n+1} + 3^{2n+2}$
 - (p) $10|2^{2n} - 6$
 - (q) $41|5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$
 - (r) $25|2^{n+2}3^n + 5n - 4$
 - (s) $169|3^{3n} - 26n - 1$
 - (t) $11|5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$
- (4) Udowodnić następujące twierdzenia:
- (a) $(1 + a)^n \geq 1 + na$, $a > -1$ (Bernoulli, 1689)
 - (b) $(1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$, $a \geq 0$
 - (c) $(1 + a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3$, $a > -1$
 - (d) $(1 + a)^{1/n} \leq 1 + \frac{a}{n}$, $a > -1$
 - (e) $(1 + a)^{1+1/n} \geq 1 + \frac{a}{n(1+a)}$, $a > -1$

- (f) $(1+a)^{1+1/n} \geq 1 + (1+\frac{1}{n})a$, $a > -1$
- (g) $(1+a)^{1+m/n} \geq 1 + (1+\frac{m}{n})a$, $a > -1$
- (h) $(1+a)^{p/q} \geq 1 + \frac{p}{q}a$, $a > -1$, $p \geq q \geq 1$
- (i) $(1+a)^{p/q} \leq 1 + \frac{p}{q}a$, $a > -1$, $1 \leq p \leq q$

(5) Niech

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1,$$

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

Ciąg u_n nazywamy ciągiem Fibonacciego. Udowodnić następujące twierdzenia:

- (a) $\sum_{k=0}^n u_k = u_{n+2} - 1$
- (b) $\sum_{k=0}^n u_{2k+1} = u_{2n+2}$
- (c) $\sum_{k=0}^n u_{2k} = u_{2n+1} - 1$
- (d) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = u_{2n-1} - 1$
- (e) $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} u_k = u_{2n} + 1$
- (f) $\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_n u_{n+1}$
- (g) $\sum_{k=0}^{2n-1} u_k u_{k+1} = u_{2n}^2$
- (h) $u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n$
- (i) $u_{n+1} = u_m u_{n-m} + u_{m+1} u_{n-m+1}$, $n \geq m \geq 0$
- (j) $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$
- (k) $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$
- (l) $u_{3n} = u_n^3 + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3$
- (m) $u_n^4 = 1 + u_{n-2} u_{n-1} u_{n+1} u_{n+2}$
- (n) $\sum_{k=0}^n \frac{u_{k+2}}{u_{k+1} u_{k+3}} = \frac{u_3}{u_1 u_2} - \frac{u_{n+4}}{u_{n+2} u_{n+3}}$
- (o) $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, gdzie α i β są dwoma różnymi pierwiastkami równania

$$x^2 = x + 1.$$

(6) Podaj resztę z dzielenia liczby a przez b , jeżeli:

- (a) $a = 254$, $b = 15$,
- (b) $a = 254$, $b = -15$,
- (c) $a = -254$, $b = 15$,
- (d) $a = -254$, $b = -15$.

(7) Oblicz:

- (a) $NWD(60775, 120175)$ i $NWW(60775, 120175)$,
- (b) $NWD(107525, 20075)$ i $NWW(107525, 20075)$,
- (c) $NWD(150425, 65725)$ i $NWW(150425, 65725)$.

(8) Dla jakiej wartości parametru a równanie $644x - 588y = a$ ma rozwiązanie?

(9) Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania równania

- (a) $357x + 403y = 208$,
- (b) $97x + 123y = 360$,
- (c) $666x + 527y = 614$.

(10) Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania równania

- (a) $6x + 10y + 5z = 1$,
- (b) $2x + 8y + 112z = 9$,
- (c) $2x + 42y + 70z + 245t = 1$.

(11) Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania układu równań

$$(a) \begin{cases} x + y = 180, \\ NWD(x, y) = 30 \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} x + y = 720, \\ NWD(x, y) = 4 \end{cases}.$$

- (12) Do przewozu zboża są do dyspozycji worki 60-cio kilogramowe i 80-cio kilogramowe. Ile potrzeba poszczególnych worków do przewozu 440 kg zboża (zakładamy że worki muszą być pełne)?
- (13) Ile biletów po 3 zł i po 5 zł można kupić za 149 zł, jeśli należy wydać wszystkie pieniądze?
- (14) Fabryka wysyła towar w paczkach po 3 kg i po 5 kg. Wykazać, że można w ten sposób wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą niż 7. Czy można w tym zadaniu zastąpić dane liczby innymi liczbami?
- (15) Ile wspólnych wyrazów ma ją stuwyrazowe ciągi arytmetyczne 5, 8, 11, 14, ... oraz 3, 7, 11, 15, ...?