

Zestaw zadań 9: Przestrzenie wektorowe.¹

- (1) Wykazać, że $V = \mathbb{C}$ ze zwykłym dodawaniem jako dodawaniem wektorów i operacją mnożenia przez skalar

$$\begin{aligned} * & : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ (z, v) & \mapsto z * v := \bar{z} \cdot v \end{aligned}$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

- (2) Niech V będzie zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich, a dodawanie wektorów niech będzie mnożeniem liczb. Operację mnożenia przez liczby rzeczywiste określimy następująco:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V & \rightarrow V, \\ (a, v) & \mapsto v^a \end{aligned}$$

Wykazać, że wyżej opisana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

- (3) Niech K będzie dowolnym ciałem oraz niech $V = K^\infty$ (zbiór wszystkich nieskończonych ciągów elementów ciała K). Określimy działania dodawania wektorów oraz mnożenia wektorów przez skalary z ciała K następująco:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \dots] + [b_1, b_2, \dots] & : = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots], \\ a \cdot [a_1, a_2, \dots] & : = [aa_1, aa_2, \dots]. \end{aligned}$$

Pokazać, że wyżej zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią wektorową nad ciałem K .

- (4) Niech A będzie niepustym zbiorem oraz niech K będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy symbolem K^A zbiór wszystkich funkcji $A \rightarrow K$. Sumą funkcji $f : A \rightarrow K$ oraz funkcji $g : A \rightarrow K$ nazywamy funkcję $f + g : A \rightarrow K$ taką, że $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ dla każdego $a \in A$. Iloczynem funkcji $f : A \rightarrow K$ przez skalar x z ciała K nazywamy funkcję $xf : A \rightarrow K$ taką, że $(xf)(a) = xf(a)$ dla każdego $a \in A$. Pokazać, że tak zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem K .
- (5) Oznaczmy symbolem $K[X]$ zbiór wszystkich wielomianów zmiennej X o współczynnikach z ciała K . Sprawdzić, że z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez elementy ciała K , zbiór $K[X]$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K .
- (6) Oznaczmy symbolem $K(X)$ zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej X o współczynnikach z ciała K . Sprawdzić, że z działaniami dodawania funkcji wymiernych i mnożenia funkcji wymiernej przez element ciała K zbiór $K(X)$ jest przestrzenią wektorów nad ciałem K .
- (7) Niech A będzie dowolnym zbiorem, a $P(A)$ niech będzie zbiorem wszystkich jego podzbiorów. Działanie dodawania w zbiorze $P(A)$ definiujemy następująco: $B \div C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$. Mnożenie elementów $P(A)$ przez elementy ciała $\mathbb{Z}_2$ definiujemy w oczywisty sposób: $0 \cdot B = \emptyset$, $1 \cdot B = B$. Sprawdzenie łączności działania $\div$ jest dość kłopotliwe.
- (a) Zakładając, że działanie $\div$ jest łączne, sprawdzić, że spełnione są również pozostałe aksjomaty przestrzeni liniowej.
- (b) Wykazać łączność działania $\div$.
- (8) Niech $V = \mathbb{C}^4$, $U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in V : z_1 = z_2 = 0\}$. Wektory dodawać będziemy w zwykły sposób natomiast mnożenie przez skalary definiujemy na cztery różne sposoby:

¹Pojęcie przestrzeni wektorowej (przestrzeni liniowej) aksjomatycznie zdefiniował Hermann Günter Grassmann, jako podsumowanie doświadczeń matematyków przynajmniej od czasów Gaussa

- a) $z\alpha = \theta$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.
- b) $z\alpha = \alpha$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.
- c) $z\alpha = (\operatorname{Re} z)\alpha$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.
- d) $z\alpha = \begin{cases} z\alpha & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \in U \\ \bar{z}\alpha & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \notin U \end{cases}$.

Sprawdzić, że w każdym z czterech powyższych przykładów dokładnie jeden z aksjomatów przestrzeni liniowej nie jest spełniony.

- (9) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami wektorowymi:
 - a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\}$,
 - b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\}$,
 - c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$,
 - d) $U = \{[x, y, z, t] : x+y-z=0\}$,
 - e) $U = \{[x, y, z, t] : xy=0\}$,
 - f) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$.
- (10) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami liniowymi:
 - a) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t \leq u\}$,
 - b) $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$,
 - c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$.
- (11) Niech $\mathbb{R}^\infty$ będzie przestrzenią ciągów elementów ciała $\mathbb{R}$. Zbadać, które spośród następujących zbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$:
 - a) $U_1 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_{i+1} = a_i + a_{i-1} \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$;
 - b) $U_2 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1}) \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$;
 - c) zbiór wszystkich ciągów $[a_1, a_2, \dots]$, których prawie wszystkie wyrazy (wszystkie wyrazy z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby) są równe zero;
 - d) zbiór wszystkich ciągów ograniczonych.
- (12) Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym oraz niech $V = \mathbb{R}^A$ będzie przestrzenią funkcji $A \rightarrow \mathbb{R}$ (zob. zadanie ?? , str. ??). Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^A$ są podprzestrzeniami liniowymi:
 - a) zbiór wszystkich funkcji parzystych, gdy $A = \mathbb{R}$.
 - b) zbiór wszystkich funkcji nieparzystych, gdy $A = \mathbb{R}$.
 - c) zbiór wszystkich funkcji rosnących.
 - d) zbiór wszystkich funkcji monotonicznych.
 - e) $U = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$, gdy $A = [0, 1]$.
 - f) $U = \{f \in V : f(x) = 0 \text{ dla każdego } x \in B\}$, gdy $B \subset A$ i $B \neq A$.
- (13) Sprawdzić, które z określonych podzbiorów przestrzeni wielomianów $K[X]$ nad ciałem K są podprzestrzeniami wektorowymi:
 - a) $U = \{F \in K[X] : F(-1) = 0\}$,
 - b) $U = \{F \in K[X] : F(0) \cdot F(1) = 0\}$,
 - c) $K[X]_{10} = \{F \in K[X] : \operatorname{st} F \leq 10\}$,
 - d) $U = \{F \in K[X] : \operatorname{st} F = 10\}$.
- (14) Pokazać, że jeśli $U_1 = \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $U_2 = \operatorname{lin}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$, to

$$U_1 + U_2 = \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l).$$

- (15) Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni
 - a) $\mathbb{Z}_2^2$; b) $\mathbb{Z}_3^2$; c) $\mathbb{Z}_2^3$.

- (16) Pokazać, że jeśli U oraz W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V , to $U \cup W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset W$ lub $W \subset U$.
- (17) Sprawdzić, czy wektory α oraz β są kombinacjami liniowymi układu $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeżeli

$$\text{a) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Czy zapis wektora α w postaci kombinacji liniowej układu $\mathcal{A}$ jest jednoznaczny?

- (18) Dla jakiej liczby zespolonej $c \in \mathbb{C}$ wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$ jest kombinacją liniową wektorów $\begin{bmatrix} c \\ -1+i \\ 1+i \end{bmatrix}$

oraz $\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -c \end{bmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$?

- (19) Sprawdzić, czy układ $\left(\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ i \end{bmatrix} \right)$ wektorów przestrzeni $\mathbb{C}^3$ jest liniowo niezależny².

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1+2i \end{bmatrix}$ jako ich kombinację liniową.

- (20) Sprawdzić, że każda kombinacja liniowa $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ wektorów $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ z przestrzeni $\mathbb{C}^4$ spełnia warunek $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, a nie każda spełnia warunek $|x_4| \leq 2$.

- (21) Znaleźć taki wektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{Z}_2^3$, aby wektory $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ były liniowo niezależne. Ile rozwiązań ma to zadanie?

- (22) Zbiór $\mathbb{C}$ liczb zespolonych z działaniami dodawania liczb zespolonych i mnożenia liczb zespolonych przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią wektorów nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Oznaczamy ją symbolem $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Sprawdzić, że każde trzy wektory z $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ są liniowo zależne.

- (23) Sprawdzić, czy układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni K^4 jest liniowo zależny, jeżeli

$$\text{a) } K = \mathbb{Z}_7, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

²Pojęcie liniowej niezależności wektorów pochodzi od Grassmanna.

$$\text{b) } K = \mathbb{R}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } K = \mathbb{C}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4+i \\ 0 \\ 5+3i \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2i \\ i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } K = \mathbb{Z}_5, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli to możliwe, przedstawić jeden z wektorów tego układu jako kombinację liniową pozostałych.

- (24) Pokazać, że wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^n$ i znaleźć współrzędne wektora β w tej bazie, jeżeli

$$\text{a) } n = 3; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } n = 3; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } n = 4; \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (25) Wyznaczyć bazy podprzestrzeni rozwiązań następujących układów równań (nad $\mathbb{R}$):

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

- (26) Wyznaczyć bazę i wymiar³ podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ gdy:

$$\text{a) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (27) Wybrać bazę podprzestrzeni $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \subset \mathbb{Z}_7^m$ spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, jeżeli

³Pojęcie wymiaru przestrzeni wektorowej pochodzi od Grassmanna.

$$\text{a) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wybrać dowolne bazy powyższych podprzestrzeni, niekoniecznie spośród wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

(28) Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów postaci:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$