

Zestaw zadań 10: Rzędy macierzy. ¹ Struktura zbioru rozwiązań układu równań.

(1) Obliczyć rzędy następujących macierzy (nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych):

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad (e) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \\ -5 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (f) \begin{bmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$(g) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (h) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (i) \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(j) \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Obliczyć rzędy następujących macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

¹Pojęcie rzędu macierzy wprowadził Sylvester.

$$(d) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}, \quad (e) \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix},$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}, \quad (g) \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

(3) W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 10 \\ -1 & \lambda & -6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Obliczyć rzędy następujących macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 12 & 2 & 11 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{13}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5.$$

(5) Obliczyć rzędy następujących macierzy zespolonych:

$$(a) \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1+3i \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1+2i \\ 1-5i & -7-4i & 4-7i \\ 1-i & -1-2i & 2-i \\ 2+4i & 7-i & 1+7i \end{bmatrix}.$$

(6) Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z, t dla których:

$$(a) \begin{cases} x+4y+10z+20t=x \\ -6y-20z-45t=y \\ 4y+15z+36t=z \\ -y-4z-10t=t \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x+4y+10z+20t=-x \\ -6y-20z-45t=-y \\ 4y+15z+36t=-z \\ -y-4z-10t=-t \end{cases}, \quad (c) t=0, \quad (d) x=y.$$

Znaleźć bazę podprzestrzeni rozwiązań każdego z powyższych układów równań.

- (7) W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:
- (a) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + ay + 2z = b \end{cases}$, (b) $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + z + t = b \end{cases}$.
- (8) W zależności od parametru $a \in \mathbb{Z}_7$ wyznaczyć wymiary podprzestrzeni rozwiązań układów równań:
- (a) $\begin{cases} 2x + 2y + az + t = 0 \\ x + y + 6z + at = 0 \\ x + y + 2t = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + ay + 4z + 3t = 0 \\ ay + 3z + t = 0 \end{cases}$.
- (9) Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{Z}_7$, układy równań liniowych U_1 oraz U_2 (nad ciałem $\mathbb{Z}_7$) mają równe zbiory rozwiązań, jeżeli
- $$U_1 : \begin{cases} x + 2y + 6z + 4t = 1 \\ 3x + y + 2z + t = 0 \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} 5x + ay + 2t = 2 \\ 3x + 5y + bz = 1 \end{cases}$$
- (10) Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest:
- (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$, (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,
- (c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.
- (11) Rozwiązać za pomocą wzorów Cramera następujące układy równań:
- (a) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} x + y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$,
- (d) $\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases}$, (e) $\begin{cases} y - 3z + 4t = -5 \\ x - 2z + 3t = -4 \\ 3x + 2y - 5z = 12 \\ 4x + 3y - 5z = 5 \end{cases}$.
- (12) W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:
- (a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$.
- (13) Dla jakich parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ każdy układ równań z danymi lewymi stronami ma rozwiązanie?
- (a) $\begin{cases} ax + by + cz + dt \\ bx - ay + dz - ct \\ cx - dy - az + bt \\ dx + cy - bz - at \end{cases}$, (b) $\begin{cases} a^2x + ay + az + at \\ ax + (b^2 - 1)y + (2b + 1)z + (3b + 1)t \\ ax + (2b + 1)y + (c^2 + 5)z + (3c + 7)t \\ ax + (3b + 1)y + (3c + 7)z + (d^2 + 1)t \end{cases}$.
- Jak zmieni się odpowiedź, jeżeli dopuścić $a, b, c, d \in \mathbb{C}$? Podać wzory na rozwiązanie układu a) oraz b) (przy dowolnych prawych stronach równań).