

ZADANIE 15.20. Obliczyć całkę  $\int (\ln x)^2 dx$ .

Rozwiązanie. Zakładamy, że  $x > 0$ . Całkujemy przez części przyjmując

$$u = (\ln x)^2, \quad dv = dx, \quad \text{skąd} \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \quad v = \int dx = x.$$

Obliczamy

$$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx.$$

Na podstawie zadania 15.18 mamy w dalszym ciągu

$$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2x (\ln x - 1) + C = x ((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2) + C.$$

ZADANIE 15.21. Obliczyć całkę  $\int \operatorname{arctg} x dx$ .

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx, \quad \text{skąd} \quad du = \frac{dx}{x^2+1}, \quad v = \int dx = x.$$

Wówczas mamy

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{x^2+1}.$$

Ostatnią całkę obliczamy podstawiając  $x^2+1=t$ , skąd  $x dx = \frac{1}{2} dt$  (por. zad. 15.8). Za-  
uważmy, że  $t > 0$ . Mamy

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln (x^2+1).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + C.$$

### Zadania

Obliczyć całki (zad. 15.22 - 15.83):

$$15.22. \int \left( 5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx.$$

$$15.24. \int (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) dx.$$

$$15.26. \int \frac{x dx}{1+x^2}.$$

$$15.28. \int \frac{x^2 dx}{a^3+x^3}, \quad a \neq 0.$$

$$15.23. \int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx.$$

$$15.25. \int (x^2+4)^5 x dx.$$

$$15.27. \int \frac{x dx}{(x^2+3)^6}.$$

$$15.29. \int \frac{x^3 \sqrt{x} + 4 \sqrt{x}}{x^2} dx.$$

$$15.30. \int \frac{x \sqrt{x} - x^4 \sqrt{x}}{3 \sqrt{x}} dx.$$

$$15.32. \int \frac{\sqrt{x} - 2 \sqrt[3]{x^2} + 4 \sqrt[4]{5x^3}}{6 \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$15.34. \int \sqrt{3x+1} dx.$$

$$15.36. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^2-1}}.$$

$$15.38. \int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}} dx.$$

$$15.40. \int \frac{x}{\sqrt{x^2-6}} dx.$$

$$15.42. \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

$$15.44. \int \frac{dx}{2 \cos^2 3x}.$$

$$15.46. \int \sin^5 x \cos x dx.$$

$$15.48. \int \frac{\sin x}{a+b \cos x} dx, \quad b \neq 0.$$

$$15.50. \int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}.$$

$$15.52. \int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3+1)}.$$

$$15.54. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$15.56. \int x \ln(1+x^2) dx.$$

$$15.58. \int 6^{1-x} dx.$$

$$15.60. \int \frac{\ln |\operatorname{arctg} x| dx}{1+x^2}.$$

$$15.31. \int (3+2 \sqrt[4]{x})^3 dx.$$

$$15.33. \int \frac{3+5 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} dx.$$

$$15.35. \int \sqrt{a+bx} dx.$$

$$15.37. \int x \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$15.39. \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$15.41. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{x^3+1}}.$$

$$15.43. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$15.45. \int x \sin(2x^2+1) dx.$$

$$15.47. \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx.$$

$$15.49. \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx.$$

$$15.51. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$$

$$15.53. \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$$

$$15.55. \int \frac{e^x dx}{2e^x+1}.$$

$$15.57. \int \frac{\sqrt{2+\ln|x|}}{x} dx.$$

$$15.59. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2|x|}}.$$

$$15.61. \int x e^{x^2} (x^2+1) dx.$$

15.62.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

15.64.  $\int \frac{(\pi - \arcsin x) dx}{\sqrt{1-x^2}}$

15.66.  $\int x^4(1+x)^3 dx$

15.68.  $\int x^3 e^x dx$

15.70.  $\int x \cos x dx$

15.72.  $\int x^2 \sin 5x dx$

15.74.  $\int e^{-2x} \sin 3x dx$

15.76.  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

15.78.  $\int \frac{(\ln|x|)^2}{x^5} dx$

15.80.  $\int \frac{\ln|x|}{x^4} dx$

15.82.  $\int x^3(\ln x)^2 dx$

15.63.  $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}$

15.65.  $\int \frac{x dx}{x^4+1}$

15.67.  $\int x^2 e^x dx$

15.69.  $\int x^4 e^{2x} dx$

15.71.  $\int x^2 \cos x dx$

15.73.  $\int e^x \cos x dx$

15.75.  $\int e^x \cos \frac{2}{3}x dx$

15.77.  $\int (\ln|x|)^3 dx$

15.79.  $\int \sqrt{x}(\ln|x|)^3 dx$

15.81.  $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} dx$

15.83.  $\int x^n \ln x dx, n \neq -1$

## Rozdział XVI

## CAŁKI FUNKCJI WYMIERNYCH

## § 16.1. UWAGI OGÓLNE

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Całka funkcji wymiernej jest więc postaci

$$(16.1.1) \quad \int \frac{W_1(x)}{W_2(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} dx.$$

Można wykazać, że całka funkcji wymiernej jest zawsze równa pewnej kombinacji liniowej (por. notkę na str. 149) następujących funkcji: funkcji wymiernej, logarytmu funkcji liniowej, logarytmu funkcji kwadratowej (o wyróżniku ujemnym) oraz arcustangensa funkcji liniowej. Przy obliczaniu całki (16.1.1) należy postępować w następujący sposób:

1° Jeżeli  $n \geq m$ , to licznik dzielimy przez mianownik i funkcję podcałkową przedstawiamy jako sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej, w której już stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika ( $n < m$ ).

2° Jeżeli  $n < m$ , to funkcję podcałkową rozkładamy na tzw. *ułamki proste*, tj. na wyrażenia postaci

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^p},$$

gdzie  $A, B, C, a, b, c, d, e$  są stałe, przy czym  $d^2 - 4ce < 0$  (wyróżnik trójmianu  $cx^2 + dx + e$  jest ujemny), a  $k$  i  $p$  są liczbami naturalnymi.

Sposób rozkładania funkcji wymiernej na ułamki proste oraz obliczenia całek ułamków prostych zostanie przedstawiony w podanych niżej zadaniach.

## § 16.2. METODY CAŁKOWANIA

ZADANIE 16.1 Obliczyć całkę

$$(1) \quad \int \frac{dx}{ax+b} \quad (a \neq 0).$$

## DO ROZDZIAŁU XIV

14.5.  $x = 2,8$ .

14.6. 1) pierwsze przybliżenie  $x_1 = 0,4$ ; drugie przybliżenie  $x_2 = 0,342 \dots$ ; 2)  $x_1 = 0,333 \dots$ ,  $x_2 = \frac{52}{153} = 0,340 \dots$

14.7.  $x = -1,65$  (dokładniej:  $-1,6506292$ ). 14.8.  $x = 3,63$ .

14.9.  $x = 1,612$  (dokładniej:  $1,6117663$ ). 14.10.  $x_1 = -10,26$ ,  $x_2 = 9,88$ .

14.11.  $2,094$  (dokładniej:  $2,09455148$ ). 14.12.  $x = 0,038$  (dokładniej:  $0,03856$ ).

14.13.  $2,89$  (dokładniej:  $2,8931$ ). 14.14.  $-2,874$ ,  $-0,514$ ,  $3,388$ .

14.15.  $-3,5042$ . 14.16.  $-1,6920$ ,  $-1,3569$ ,  $3,0489$ .

14.17.  $1,0448$ . 14.18.  $1,17$ . 14.19.  $3,07$ .

14.20.  $0,95$ . 14.21.  $0,44$ . 14.22.  $1,85$ .

14.23.  $2,90$ . 14.24.  $2,25$ . 14.25.  $0,21$ .

14.26.  $1,38$ . 14.27.  $\pm 1,73$  i  $0$ . 14.28.  $2,45$  i  $0,019$ .

14.29.  $0,31$  i  $4$ . 14.30.  $2,506$ . 14.31.  $4,493$ .

14.32.  $1,831177$ . 14.33.  $1,493$ . 14.34.  $0,62945$ .

14.35.  $x = -1,9742$ ,  $y = 2,0221$ . 14.36.  $x = 1,88371$ ,  $y = \pm 2,71592$ .

14.37.  $x = 0,68881$ ,  $y = 1,50754$ . 14.38.  $x = 1,4142$ ,  $y = 2,8284$ .

## DO ROZDZIAŁU XV

15.22.  $I = \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \ln|x| - 5x^{-1}$  (<sup>1</sup>). 15.23.  $I = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \ln|x|$ .

15.24.  $I = \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x$ . 15.25.  $I = \frac{1}{12}(x^2 + 4)^6$ .

15.26.  $I = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ . 15.27.  $I = \frac{-1}{10(x^2 + 3)^5}$ .

15.28.  $x \neq -a$ ,  $I = \frac{1}{3} \ln(a^3 + x^3)$ . 15.29.  $x > 0$ ,  $I = 3x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-3/4}$ .

15.30.  $x > 0$ ,  $I = \frac{6}{13}x^{13/6} - \frac{12}{23}x^{23/12}$ .

15.31.  $I = 27x + \frac{216}{5}x^{5/4} + 24x^{3/2} + \frac{32}{5}x^{7/4}$ . 15.32.  $I = \frac{1}{7}x^{-7/6} - \frac{1}{4}x^{4/3} + \frac{8}{17} \sqrt[12]{125x^{17}}$ .

15.33.  $I = \frac{-6}{\sqrt{x}} + 30 \sqrt[9]{x}$ . 15.34.  $x \geq -\frac{1}{3}$ ,  $I = \frac{2}{9}(3x + 1)^{3/2}$ .

<sup>(1)</sup> W rozwiązaniach całek nieoznaczonych pomijamy stałą C.

15.35.  $I = \frac{2}{3b} \sqrt{(a+bx)^3}$ ; podstawić  $a+bx=t^2$ .

15.36.  $x \neq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $x \neq -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $I = \frac{3}{8}(2x^2 - 1)^{2/3}$ .

15.37.  $I = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3}$ . 15.38.  $I = -\frac{1}{5} \sqrt{3-5x^2}$ .

15.39.  $I = \frac{3}{5}(x-4) \sqrt[3]{(x+1)^2}$ . 15.40.  $I = \sqrt{x^2 - 6}$ .

15.41.  $I = \frac{5}{12} \sqrt{(x^3+1)^4}$ . 15.42.  $I = -e^{1/x}$ .

15.43.  $I = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ . 15.44.  $I = \frac{1}{6} \operatorname{tg} 3x$ .

15.45.  $I = -\frac{1}{4} \cos(2x^2 + 1)$ . 15.46.  $I = \frac{1}{6} \sin^6 x$ .

15.47.  $I = 2 \sqrt{1 + \sin x}$ .

15.48.  $a + b \cos x \neq 0$ ,  $I = -\frac{1}{b} \ln|a + b \cos x|$ ; podstawić  $a + b \cos x = t$ .

15.49.  $I = e^{\sin x}$ . 15.50.  $\cos x^4 \neq 0$ ,  $I = \frac{1}{4} \operatorname{tg} x^4$ .

15.51.  $\cos x \neq 0$ ,  $I = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$ . 15.52.  $\cos(x^3 + 1) \neq 0$ ,  $I = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(x^3 + 1)$ .

15.53.  $x > 0$ ,  $I = \frac{1}{3} \ln^3 x$ . 15.54.  $I = \operatorname{arctg} e^x$ ; podstawić  $e^x = t$ .

15.55.  $I = \frac{1}{2} \ln(2e^x + 1)$ . 15.56.  $I = \frac{1}{2}(1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2$ .

15.57.  $I = \frac{2}{3} \sqrt{(2 + \ln|x|)^3}$ . 15.58.  $I = \frac{-6^{1-x}}{\ln 6}$ .

15.59.  $I = \arcsin(\ln|x|)$ . 15.60.  $I = \operatorname{arctg} x(\ln|\operatorname{arctg} x| - 1)$ .

15.61.  $I = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}$ . 15.62.  $-1 < x < 1$ ,  $I = \frac{1}{3} \arcsin x^3$ .

15.63.  $x \neq 0$ ,  $\ln|\operatorname{arctg} x|$ . 15.64.  $-1 < x < 1$ ,  $I = \pi \arcsin x - \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$ . 15.65.  $I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2$ .

15.66.  $I = \frac{1}{5}x^5(1+x)^3 - \frac{1}{10}x^6(1+x)^2 + \frac{1}{5}(\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{8}x^8)$ .

15.67.  $I = (x^2 - 2x + 2)e^x$ .

15.68.  $I = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$ . 15.69.  $I = e^{2x}(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4})$ .

15.70.  $x \sin x + \cos x$ . 15.71.  $(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$ .

15.72.  $I = -\frac{1}{5}x^2 \cos 5x + \frac{2}{25}x \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x$ .

15.73.  $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$ . 15.74.  $I = -\frac{1}{13}e^{-2x}(2 \sin 3x + 3 \cos 3x)$ .

15.75.  $I = \frac{9}{13}e^{-x}(-\cos \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \sin \frac{2}{3}x)$ . 15.76.  $I = \frac{2}{3}x^3(\ln x - \frac{2}{3})$ .

15.77.  $I = x((\ln|x|)^3 - 3(\ln|x|)^2 + 6 \ln|x| - 6)$ . 15.78.  $I = -\frac{1}{32x^4}(8(\ln|x|)^2 + 4 \ln|x| + 1)$ .

$$15.79. I = \frac{2}{27}x^3(9(\ln|x|)^3 - 18(\ln|x|)^2 + 24\ln|x| - 16).$$

$$15.80. I = -\frac{1}{3x^3}(\ln|x| + \frac{1}{3}).$$

$$15.82. x > 0, I = \frac{1}{4}x^4((\ln x)^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}).$$

$$15.81. I = 2\sqrt{x}(\ln x)^2 - 8\sqrt{x}\ln x + 16\sqrt{x}.$$

$$15.83. x > 0; I = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right).$$

## DO ROZDZIAŁU XVI

$$16.26. I = \frac{1}{8}(2x+1)^4 \quad (1).$$

$$16.28. x \neq 3, x \neq -2; I = \ln|x-3| + 2\ln|x+2|.$$

$$16.29. I = \ln|x^2 - 3x + 3|.$$

$$16.31. I = 5\ln|x + \frac{1}{2}| - 4\ln|x + 1|.$$

$$16.33. x \neq 1, x \neq \frac{3}{2}; I = \ln|2x^2 - 5x + 3|.$$

$$16.34. x \neq 2, x \neq -5; I = 3\ln|x-2| + 2\ln|x+5|.$$

$$16.35. I = \frac{2}{3}\ln|x+6| - \frac{1}{2}\ln|x-3|.$$

$$16.37. x \neq \frac{2}{3}, x \neq \frac{3}{2}, I = \ln \left| \frac{2x-3}{3x-2} \right|.$$

$$16.39. I = \frac{7}{10}\ln|4+5x^2|.$$

$$16.41. I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x + \sqrt{5} - 1}{2x - \sqrt{5} - 1} \right|.$$

$$16.43. I = \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1|.$$

$$16.45. x \neq \frac{1}{2}; I = \frac{1}{4} \left( \ln|2x-1| + \frac{1}{2x-1} \right).$$

$$16.46. I = 2\ln|x-5| + \frac{3}{x-5}.$$

$$16.48. I = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3}.$$

$$16.27. x \neq \frac{2}{3}; I = \frac{-1}{9(3x-2)^3}.$$

$$16.30. I = 3\ln|x-5| - 2\ln|x+1|.$$

$$16.32. I = 2\ln|x-3| + 4\ln|x - \frac{1}{2}|.$$

$$16.36. I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}} \right|.$$

$$16.38. I = \frac{1}{2}\ln|10x+x^2|.$$

$$16.40. I = \frac{1}{4}\ln \left| \frac{x-1}{5-x} \right|.$$

$$16.42. I = \frac{1}{2}\ln \left| \frac{x}{2-3x} \right|.$$

$$16.44. x \neq 3; I = 2\ln|x-3| - \frac{5}{x-3}.$$

$$16.47. I = 3\ln|x+2| + \frac{5}{x+2}.$$

$$16.49. I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{2}}.$$

$$16.50. I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2}.$$

$$16.51. I = \operatorname{arctg}(3x-1).$$

$$16.52. I = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$16.53. I = \ln|2x^2-2x+1| + \operatorname{arctg}(2x-1).$$

$$16.54. I = \ln|x^2-2x+5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2}.$$

$$16.55. I = \ln|x^2+2x+10| - 4 \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3}.$$

$$16.56. I = \ln|x^2-8x+25| - 4 \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3}.$$

$$16.57. I = \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+8| - \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2}.$$

$$16.58. I = \frac{1}{2}\ln|x^2-3| + \sqrt{3} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right|.$$

$$16.59. I = \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$16.60. I = 3\ln|x^2+4x+13| - 4 \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3}.$$

$$16.61. I = 5\ln|x^2-4x+20| - 6 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{4}.$$

$$16.62. I = 2\ln|x^2-6x+10| + 7 \operatorname{arctg}(x-3).$$

$$16.63. I = \frac{5}{3}x - \frac{10}{9}\ln|2+3x|.$$

$$16.64. I = \frac{1}{5}x - \frac{1}{25}\sqrt{60} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{12}}x.$$

$$16.65. I = 2x - \frac{5}{2}\ln|x^2+6x+25| - \frac{15}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{4}.$$

$$16.66. I = -3\ln|x+2| + 2\ln|x-4| + 8\ln|x-7|.$$

$$16.67. I = -\frac{29-30x+6x^2}{3(x-2)^3} + \ln|x-2|.$$

$$16.68. I = \frac{4}{7}\ln|x-2| + \frac{17}{14}\ln|x^2+3| + \frac{1}{7\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$16.69. I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x-2}{2(x^2+1)}.$$

(1) W rozwiązaniach pomijamy stałą C.