zatem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{900e^{-0{,}02t}-500}{800e^{-0{,}02t}}=\tfrac{9}{8}-\tfrac{5}{8}e^{0{,}02t}$$

Obliczamy drugą pochodną; ponieważ $\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}=-\tfrac{1}{80}e^{0{,}02t}$ więc

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{-\frac{1}{80}e^{0{,}02t}}{800e^{-0{,}02t}}=-\frac{1}{64000}e^{0{,}04t}$$

Moment największego wzniesienia pocisku znajdziemy rozwiązując równanie $dy/dt=0$ (albo $dy/dx=0$), czyli

$$900e^{-0{,}02t}-500=0,\qquad \text{skąd}\qquad e^{-0{,}02t}=\tfrac{5}{9}$$

Aby rozwiązać to równanie, stosujemy logarytmy dziesiętne; otrzymujemy

$$-0{,}02t\log e=\log\tfrac{5}{9},\qquad \text{czyli}\qquad -0{,}02t\cdot 0{,}4343=-0{,}2553\,.$$

Stąd

$$t=50\cdot\frac{0{,}2553}{0{,}4343}\approx 29{,}4\ \text{s}\,.$$

Pozostaje do obliczenia wartość $x=40000(1-e^{-0{,}02t})$, gdzie $e^{-0{,}02t}=\frac{5}{9}$; otrzymujemy

$$x=40000\cdot(1-\tfrac{5}{9})=40000\cdot\tfrac{4}{9}\approx 17800\ \text{m}\,.$$

Wreszcie

$$y=45000\cdot\tfrac{4}{9}-500\cdot 29{,}4=5300\ \text{m}\,.$$

A więc pocisk osiągnie najwyższy poziom po upływie $t=29{,}4$ s od momentu wystrzału w odległości poziomej 17800 m i na wysokości 5300 m.

ZADANIE 10.57. Działo, którego lufa jest nachylona do płaszczyzny poziomej pod kątem α, wyrzuca pocisk z prędkością początkową v_0 (rys. 10.42). Znając przyśpieszenie ziemskie g wyznaczyć kąt α, przy którym pocisk padnie na płaszczyznę poziomą w odległości największej (oporu powietrza i działania wiatru nie bierze się pod uwagę):

Rys. 10.42

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t,\qquad y=v_0\sin\alpha\cdot t-\tfrac{1}{2}gt^2,$$

gdzie t oznacza czas liczony od momentu wystrzału.

Rozwiązanie. Aby znaleźć moment upadku pocisku na płaszczyznę poziomą, należy rozwiązać równanie $y=0$, czyli

$$v_0\sin\alpha\cdot t-\tfrac{1}{2}gt^2=0,\qquad \text{skąd}\qquad t=\frac{2v_0}{g}\sin\alpha\,.$$

Wówczas odległość x wynosi

$$x=v_0\cos\alpha\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

Jest rzeczą widoczną, że wartość x będzie największa, gdy $\sin 2\alpha$ będzie największe, czy gdy $\sin 2\alpha=1$, a to osiągniemy biorąc $\alpha=45°$.

Zadania

Znaleźć ekstrema następujących funkcji oraz punkty przegięcia odpowiadających im krzywych (zad. 10.58 - 10.69):

10.58. $y=x^3+12x^2+36x-50$.

10.59. $y=2x^3-9x^2-24x-12$.

10.60. $y=x^3-6x^2+9x-2$.

10.61. $y=-x^3+x^2$.

10.62. $y=x^3+x+1$.

10.63. $y=x(3-x)^2$.

10.64. $y=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$.

10.65. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$.

10.66. $y=x+\dfrac{4}{x}$.

10.67. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

10.68. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

10.69. $y=x\sqrt{4-x^2}$.

10.70. Wykazać, że krzywa $y(x^2+a^2)=a^2(a-x)$ ma trzy punkty przegięcia leżące na jednej prostej.

10.71. Dobrać α tak, aby krzywa $y=x^3+\alpha x^2+1$ miała punkt przegięcia przy $x=1$.

10.72. Zbadać, przy jakiej wartości α krzywa $y=x^4+\alpha x^3+\frac{3}{2}x^2+1$ będzie wklęsła.

Znaleźć ekstrema następujących funkcji i równania asymptot odpowiadających im krzywych (zad. 10.73 - 10.81):

10.73. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$.

10.74. $y=\dfrac{2x+1}{x-4}$.

10.75. $y=\dfrac{6x}{x^2+2x+4}$.

10.76. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$.

10.77. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$.

10.78. $y=\dfrac{x^3+x}{x^4+x^2+1}$.

10.79. $y=\dfrac{(x+2)^4}{(x+1)^3}$.

10.80. $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$.

10.81. $y=4x-\operatorname{tg}x$ w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$.

Zbadać przebieg zmienności następujących funkcji (zad. 10.82 - 10.124):

10.82. $y=x^3+x^2-16x-16$.

10.83. $y=-x^3+9x$.

10.84. $y=x(x-1)^2$.

10.85. $y=x^4-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$.

10.86. $y=x^2(x^2-4)^3$.

10.87. $y=(x+3)(x-2)^2(x-4)$.

10.88. $y=2\ x-x^2$.

10.89. $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$.

10.90. $y=\dfrac{5}{(2x+1)^2}$.

10.91. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

10.92. $y=x+\dfrac{4}{x-5}$.

10.93. $y=\dfrac{(x+1)^2}{2x}$.

10.94. $y=\dfrac{x^2-x-4}{x-1}$.

10.95. $y=\dfrac{x^2+2x+25}{(x+1)^2}$.

10.96. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$.

10.97. $y=\dfrac{15x^2-13x-20}{8x^2+10x-7}$.

10.98. $y=\dfrac{x^4}{2-x^3}$.

x^3

10.100. $y=\dfrac{(x+3)^3}{\ldots}$

10.101. $y=x+2\sqrt{-x}$.

10.102. $y=$ [illegible]

10.103. $y=1-\sqrt[3]{(x-4)^2}$.

10.104. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

10.105. $y=x^{2/3}+(x-2)^{2/3}$.

10.106. $y=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$.

10.107. $y=x\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

10.108. $y=x\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

10.109. $y=x\sqrt{4x-x^2}$.

10.110. $y=x\sqrt{-x^2+8x+14}$.

10.111. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

10.112. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

10.113. $y=x^2\sqrt{36-x^2}$.

10.114. $y=\cos^2 x+2\sin^2 x$.

10.115. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

10.116. $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x$.

10.117. $y=2\sin(x+\frac{1}{6}\pi)\cos(x-\frac{1}{3}\pi)$.

10.118. $y=\sin x\sin(x+\frac{1}{3}\pi)$.

10.119. $y=\sin 2x+2\sin(\frac{1}{4}\pi-x)$.

10.120. $y=\sin^2 x\cos x$.

10.121. $y=\sin x\cos 2x$.

10.122. $y=\sqrt{\sin x^2}$.

10.123. $y=\sqrt{1-\cos x}$.

10.124. $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

Układ współrzędnych Oxy leży w płaszczyźnie pionowej, przy czym oś Ox jest pozioma, a oś Oy – pionowa. Ruch punktu jest wyznaczony równaniami parametrycznymi:

10.125. $x=2t+5$, $y=t^3-3t^2+4$.

10.126. $x=t^2+2t$, $y=t^3$.

10.127. $x=2\sin t$, $y=\sin 2t$.

Dla każdego z tych przypadków wyznaczyć pochodne dy/dx i drugie pochodne d^2y/dx^2 i obliczyć wartości tych pochodnych w punktach, w których tor osiąga największą i najmniejszą wysokość.

10.128. Dany odcinek a podzielić na takie dwa odcinki, żeby pole prostokąta zbudowanego z tych odcinków było największe.

10.129. W trójkąt o podstawie a i wysokości h wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden z boków prostokąta leży na danej podstawie trójkąta, a dwa pozostałe wierzchołki prostokąta leżą na pozostałych bokach trójkąta. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

10.130. W dany kwadrat o boku a wpisano prostokąt w ten sposób, że każdy wierzchołek prostokąta leży na jednym boku kwadratu i dwa boki prostokąta są równoległe do przekątnej kwadratu. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

10.131. W dane koło o promieniu r wpisano prostokąt. Zbadać przebieg zmienności

bieg zmienności pola S tego trójkąta.

10.133. W dane półkole o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, którego wierzchołek leży w środku koła. Zbadać przebieg zmienności pola S tego trójkąta.

10.134. Zbadać przebieg zmienności pola S trapezu wpisanego w dane półkole o promieniu r, gdy jedna z podstaw trapezu jest średnicą danego półkola.

10.135. W elipsę $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ wpisano prostokąt o bokach równoległych do osi elipsy. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

10.136. W daną półkulę o promieniu r wpisano stożek, którego wierzchołek leży w środku kuli, a podstawa jest równoległa do podstawy półkuli. Zbadać przebieg zmienności objętości V tego stożka.

10.137. W daną kulę o promieniu r wpisano prawidłowy ostrosłup czworokątny Zbadać przebieg zmienności objętości V tego ostrosłupa.

10.138. Na kuli o danym promieniu r opisano stożek obrotowy. Zbadać przebieg zmienności objętości V tego stożka.

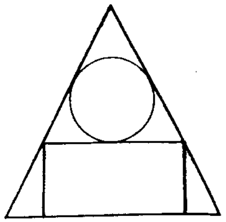
10.139. Zbadać przebieg zmienności objętości V walca wpisanego w kulę o promieniu R.

10.140. Zbadać przebieg zmienności powierzchni bocznej P walca wpisanego w kulę o promieniu R.

10.141. Nad płaszczyzną D znajduje się punktowe źródło światła S. Na jakiej wysokości h należy je zawiesić, aby w punktach płaszczyzny D w danej odległości a od rzutu punktu S na płaszczyznę D było najjaśniej?

Wskazówka. Jeżeli punktowe źródło światła znajduje się w odległości r od powierzchni oświetlonej i promienie światła tworzą z tą powierzchnią kąt α, to oświetlenie (ilość światła padającego na jednostkę powierzchni) jest proporcjonalne do $(\sin\alpha)/r^2$.

10.142. W stożek o promieniu podstawy R i tworzącej $2R$ wpisano walec i kulę w sposób podany na rysunku 10.43. Kiedy suma objętości V walca i kuli będzie ekstremalna?



Rys. 10.43

10.143. Określić najmniejszą wysokość drzwi w pionowej wieży $ABCD$, tak aby można było przez nie wnieść żelazny drąg o długości l, którego koniec ślizga się wzdłuż prostej pionowej AB. Szerokość wieży $d<l$.

10.144. Miejscowości A i B znajdują się na przeciwległych brzegach rzeki. Wiedząc, że goniec porusza się na brzegu z szybkością k razy większą niż na wodzie, określić, pod jakim kątem powinien on przeciąć rzekę, aby w najkrótszym czasie dostarczyć wiadomość z A do B. Szerokość rzeki wynosi h m, a odległość A od B (wzdłuż brzegu) równa się d m.

10.145. Z trzech desek o szerokości a, a i $2a$ należy zrobić żłób o największej objętości. Podać formę przekroju poprzecznego tego żłobu.

10.146. Z punktu A leżącego przy torze kolejowym należy przenieść ładunek do punktu C znajdującego się w odległości l od toru. Z jakiego punktu P toru kolejowego należy poprowadzić szosę, aby transport ładunku z A do C był najtańszy, jeżeli koszt przewozu koleją 1 kg na odległość 1 km równy jest α, a szosą β $(\beta>\alpha)$.

10.147. Środki trzech kul sprężystych A, B, C położone są na jednej prostej. Kula A o masie M uderza z prędkością v kulę B, która z kolei uderza kulę C o masie m. Jaka powinna być masa kuli B, aby kula C uzyskała maksymalną prędkość.

Rozdział XI

SZEREGI POTĘGOWE. ROZWIJANIE FUNKCJI W SZEREG POTĘGOWY

§ 11.1. SZEREG POTĘGOWY

Szereg, w którym wyrazy są funkcjami zmiennej x, tzn. szereg postaci

(11.1.1) $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

nosi nazwę *szeregu funkcyjnego.*

Mówimy, że szereg funkcyjny (11.1.1) jest *jednostajnie zbieżny* w zbiorze A, jeżeli dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie N, że dla każdego $n\geqslant N$ oraz dla każdego $x\in A$ zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon,$$

gdzie $S(x)$ oznacza sumę szeregu (11.1.1).

Szereg funkcyjny postaci

(11.1.2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

nosi nazwę *szeregu potęgowego.*

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego (11.1.2) nazywamy taką liczbę $R\geqslant 0$, że dany szereg jest zbieżny dla wartości x spełniających nierówność $|x|<R$, a dla wartości $|x|>R$ jest rozbieżny; natomiast dla $x=-R$ i dla $x=R$ szereg może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny. Przedział $-R<x<R$ nazywamy *przedziałem zbieżności.*

Jeżeli dany szereg jest zbieżny dla każdej wartości x, to mówimy, że promień zbieżności R jest nieskończenie wielki, i piszemy $R=+\infty$. Jeżeli dany szereg dla każdej wartości $x\neq 0$ jest rozbieżny, to mówimy, że $R=0$. Dowodzi się, że zawsze istnieje skończony lub nieskończony promień zbieżności szeregu potęgowego..

Zanotujemy twierdzenia:

(11.1.3) *Jeżeli dla danego szeregu potęgowego* (11.1.2) *istnieje*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g\neq 0,$$

to promień zbieżności tego szeregu wynosi $R=1/g$. Jeżeli zaś $g=0$, to $R=+\infty$, a jeżeli $g=+\infty$, to $R=0$.

9.79. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 3 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 39 & 7 \\ 11 & 16 & 3 \end{bmatrix}$, drugi iloczyn nie istnieje.

9.80. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

9.81. Nie; równe są tylko tego samego stopnia.

9.82. Nie.

9.83. Nie, jeśli bowiem macierz **A** jest wymiaru $n \times m$, to macierz jednostkowa z lewej strony równości macierzowej musi być stopnia m, a macierz jednostkowa z prawej strony musi być stopnia n.

9.84. Iloczyn **BA** nie jest macierzą zerową. Nie wynika.

9.85. Nie, jeśli bowiem macierz **A** jest wymiaru $n \times m$, to macierz $\mathbf{O}_L$ jest wymiaru $m \times k$, a macierz $\mathbf{O}_P$ jest wtedy wymiaru $n \times k$ przy dowolnym k. Jeżeli macierz **A** jest kwadratowa, to obie macierze zerowe są równe.

9.86. Tak, jeśli macierz **A** jest kwadratowa.

9.87. Macierz pierwotną: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

9.88. Są równe.

9.89. Symetryczna.

9.90. $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$.

9.91. Pierwsze mnożenie w ogólnym przypadku niewykonalne, drugie zawsze wykonalne (dowodzi się, że $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$).

9.92. Wartość wyznacznika zostanie pomnożona przez 3.

9.93. $\begin{bmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{bmatrix}$.

9.94. $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.

9.95. $\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$.

9.96. $\dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

9.97. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

9.98. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.99. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

9.100. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.101. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$.

9.102. Macierz **X** nie istnieje.

9.103. Ogólne rozwiazanie ma postać (C_1, C_2 dowolne stałe):

$$\begin{bmatrix} C_1 & \frac{1}{4}(2-3C_1) \\ C_2 & \frac{1}{4}(9-3C_2) \end{bmatrix}.$$

DO ROZDZIAŁU X

10.58. $x=-6$, $y=-50$ maksimum; $x=-4$, $y=-66$ punkt przegięcia; $x=-2$, $y=-82$ minimum.

Uwaga. Aby obliczyć wartość wielomianu $y=x^3+12x^2+36x-50$ przy $x=-2$, przedstawiamy wielomian w postaci $y=((x+12)x+36)x-50$ i podstawiając $x=-2$ obliczamy kolejno: $-2+12=10$, $10\cdot(-2)=-20$, $-20+36=16$, $16\cdot(-2)=-32$, $-32-50=-82$.

10.59. $x=-1$, $y=1$ maksimum: $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{123}{2}$ punkt przegięcia; $x=4$, $y=-124$ minimum.

10.60. $x=1$, $y=2$ maksimum; $x=2$, $y=0$ punkt przegięcia; $x=3$, $y=-2$ minimum.

10.61. $x=0$, $y=0$ minimum; $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{27}$ punkt przegięcia; $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{27}$ maksimum.

10.62. Funkcja jest stale rosnąca; $x=0$, $y=1$ punkt przegięcia.

10.63. $x=1$, $y=4$ maksimum; $x=2$, $y=2$ punkt przegięcia; $x=3$, $y=0$ minimum.

10.64. $x=1$, $y=3$ minimum; $x=2-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $y=\frac{31}{9}$ punkt przegięcia; $x=2$, $y=4$ maksimum; $x=2+\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $y=\frac{31}{9}$ punkt przegięcia; $x=3$, $y=3$ minimum.

Uwaga. Sposób obliczania wartości wielomianu jest podany w odpowiedzi do zadania 10.58.

10.65. $x=0$, $y=1$ punkt przegięcia; $x=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$, $y=\frac{1}{8}(-55+39\sqrt{3})$ punkt przegięcia; $x=1$, $y=2$ maksimum; $x=\frac{1}{3}(3+\sqrt{3})$, $y=\frac{1}{8}(-55-39\sqrt{3})$ punkt przegięcia, $x=3$, $y=-26$ minimum.

10.66. Funkcja określona, gdy $x\neq 0$; $x=-2$, $y=-4$ maksimum; $x=2$, $y=4$ minimum.

10.67. Funkcja określona, gdy $x\neq 0$; $x=-1$, $y=2$ minimum; $\lim\limits_{x\to -0} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +0} y=+\infty$; $x=1$, $y=2$ minimum.

10.68. $x=-\sqrt{3}$, $y=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ punkt przegięcia; $x=-1$, $y=-1$ minimum; $x=0$, $y=0$ punkt przegięcia; $x=1$, $y=1$ maksimum; $x=\sqrt{3}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ punkt przegięcia.

10.69. Funkcja jest określona w przedziale $-2\leqslant x\leqslant 2$; $x=-\sqrt{2}$, $y=-2$ minimum; $x=0$, $y=0$ punkt przegięcia, w którym $y'=2$; $x=\sqrt{2}$, $y=2$ maksimum.

10.71. $\alpha=-3$. **10.72.** $\alpha=\pm 2$.

10.73. Przy $x=-2$, $y_{max}=-2$; przy $x=2$, $y_{min}=2$; asymptoty: $y=6$ i $y=\frac{1}{2}x$.

10.74. Funkcja jest określona, gdy $x\neq 4$; ekstremów nie ma, gdyż funkcja jest stale malejąca; asymptoty: $x=4$ i $y=2$.

10.75. $x=-2$, $y=-3$ minimum; $x=2$, $y=1$ maksimum; asymptota $y=0$.

10.76. Funkcja jest określona, gdy $x\neq -2$ i $x\neq -1$; $x=-\sqrt{2}$, $y=-17-12\sqrt{2}$ maksimum; $x=\sqrt{2}$, $y=-17+12\sqrt{2}$ minimum: asymptoty: $x=-2$, $x=-1$, $y=1$.

10.77. $x=0$, $y=-1$ minimum; $x=2$, $y=\frac{5}{3}$ maksimum; asymptota $y=1$.

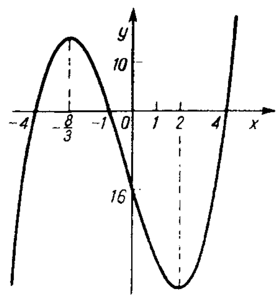
10.78. $x=-1$, $y=-2$ minimum; $x=1$, $y=2$ maksimum; asymptota $y=0$.

10.79. Funkcja jest określona, gdy $x\neq -1$; $y'=\dfrac{(x+2)^3(x-2)}{(x+1)^4}$; $x=-2$, $y=0$ maksimum; $x=2$, $y=\frac{256}{27}$ minimum; asymptoty: $x=-1$, $y=x+5$.

10.80. Przy $x=1$, $y_{max}=-4$; przy $x=5$, $y_{min}=4$; asymptoty; $x=3$, $y=x-3$.

10.81. Przy $x=\frac{1}{4}\pi$, $y_{max}=\pi-1\approx 2{,}14$; przy $x=-\frac{1}{4}\pi$, $y_{min}=1-\pi\approx -2{,}14$; asymptoty $x=\pm\frac{1}{2}\pi$.

10.82. $y'=3(x+\frac{8}{3})(x-2)$, $y''=6x+2$ (rys. R.10.1); tabelka(¹):



Rys. R.10.1

x	$-\infty$	...	$-\frac{8}{3}$	...	$-\frac{1}{3}$	...	2	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{398}{27}$ M	↘	$-\frac{286}{27}$ p	↘	-36 m	↗	$+\infty$

(¹) W tabelce symbol M oznacza maksimum, m — minimum, p — punkt przegięcia.

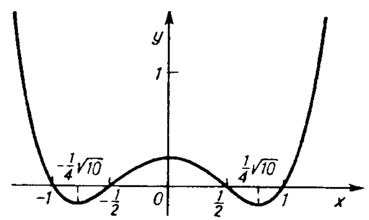
10.83. $y'=-3(x^2-3)$, $y''=-6x$; Początek współrzędnych jest środkiem symetrii krzywej; tabelka:

x	$-\infty$	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...	$+\infty$
y''	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	$+\infty$	↘	$-6\sqrt{3}$ m	↗	0 p	↗	$6\sqrt{3}$ M	↘	$-\infty$

10.84. $y'=3(x-\frac{1}{3})(x-1)$, $y''=6(x-\frac{2}{3})$; tabelka:

x	$-\infty$	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{2}{3}$	...	1	...	$+\infty$
y''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{4}{27}$ M	↘	$\frac{2}{27}$ p	↘	0 m	↗	$+\infty$

10.85. $y'=4x^3-\frac{5}{2}x$, $y''=12x^2-\frac{5}{2}$; linia ma dwa punkty przegięcia: $x=\frac{1}{12}\sqrt{30}$ i $x=-\frac{1}{12}\sqrt{30}$; oś Oy jest osią symetrii krzywej (rys. R.10.2); tabelka:

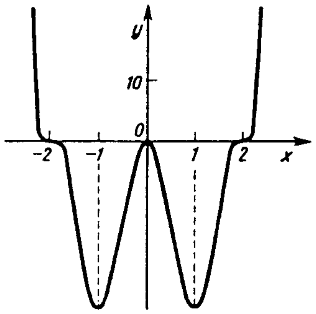


Rys. R.10.2

x	$-\infty$	...	$-\frac{1}{4}\sqrt{10}$	...	0	...	$\frac{1}{4}\sqrt{10}$	...	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{64}$ m	↗	$\frac{1}{4}$ M	↘	$-\frac{9}{64}$ m	↗	$+\infty$

10.86. $y'=2(x+2)^2(x+1)x(x-1)(x-2)^2$; oś Oy jest osią symetrii krzywej (rys. R.10.3); tabelka:

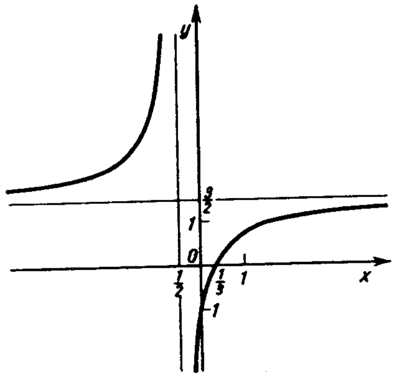
x	$-\infty$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	-27 m	↗	0 M	↘	-27 m	↗	0	↗	$+\infty$



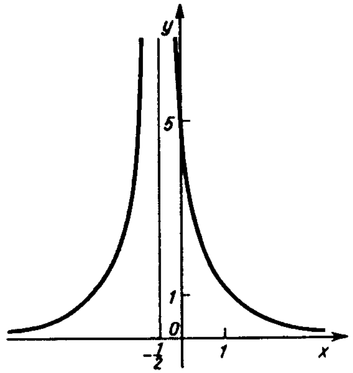
Rys. R.10.3

10.87. $y'=(x-2)(4x^2-7x-22)$; $x_1=\frac{1}{8}(7-\sqrt{401})\approx-\frac{13}{8}$, $x_2=\frac{1}{8}(7+\sqrt{401})\approx\frac{27}{8}$, $f(x_1)\approx-101$, $f(x_2)\approx-7{,}5$; tabelka:

x	$-\infty$	...	x_1	...	2	...	x_2	...	$+\infty$



Rys. R.10.4



Rys. R.10.5

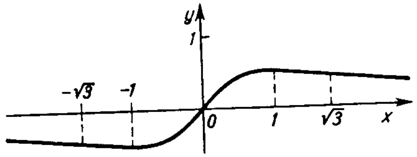
10.90. $x\neq-\frac{1}{2}$, $y=\dfrac{5}{4(x+\frac{1}{2})^2}$, $y'=\dfrac{-5}{2(x+\frac{1}{2})^3}$, $y''=\dfrac{15}{2(x+\frac{1}{2})^4}>0$; asymptoty $x=-\frac{1}{2}$ i $y=0$, przy czym asymptota $x=-\frac{1}{2}$ jest jednocześnie osią symetrii krzywej (rys. R.10.5); tabelka:

x	$-\infty$	...	$-\frac{1}{2}$		...	0	...	$+\infty$
y'	0	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
y	0	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	5	↘	0

10.89. $x\neq-\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}-\dfrac{5}{4(x+\frac{1}{2})}$, $y'=\dfrac{5}{4(x+\frac{1}{2})^2}$, $y''=\dfrac{-5}{3(x+\frac{1}{2})^3}$; asymptoty: $x=-\frac{1}{2}$ i $y=\frac{3}{2}$ (rys. R.10.4); tabelka:

x	$-\infty$	...	$-\frac{1}{2}$		...	0	...	$+\infty$
y'	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
y	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	-1	↗	$\frac{3}{2}$

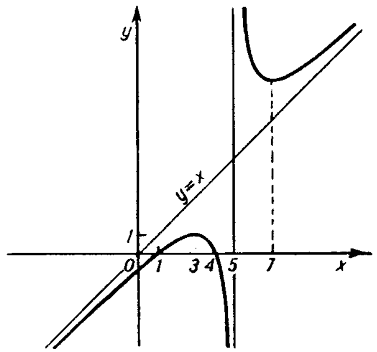
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$ m	↗	0 p	↗	[illegible] M	↘	0



Rys. R.10.6

10.92. $x \neq 5$, $y' = 1 - \dfrac{4}{(x-5)^2}$, $y'' = \dfrac{8}{(x-5)^3}$; asymptoty: $x=5$ i $y=x$ (rys. R.10.7); tabelka:

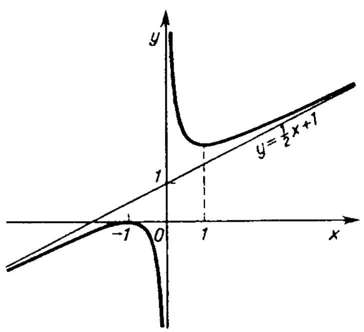
x	$-\infty$	...	3	...	5		...	7	...	$+\infty$
y'	1	+	0	−	−	−	−	0	+	1
y	$-\infty$	↗	1 M	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	9 m	↗	$+\infty$



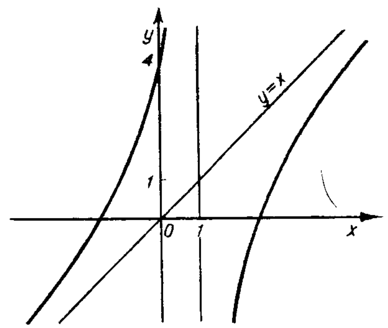
Rys. R.10.7

10.93. $x \neq 0$, $y = \frac{1}{2}x + 1 + \dfrac{1}{2x}$, $y' = \dfrac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$, $y'' = \dfrac{1}{x^3}$: asymptoty: $x=0$ i $y=\frac{1}{2}x+1$ (rys. R.10.8); tabelka:

x	$-\infty$	...	−1	...	0		...	1	...	$-\infty$
y'	$\frac{1}{2}$	+	0	−	−	−	−	0	+	$\frac{1}{2}$
y	$-\infty$	↗	0 M	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2 m	↗	$+\infty$



Rys. R.10.8



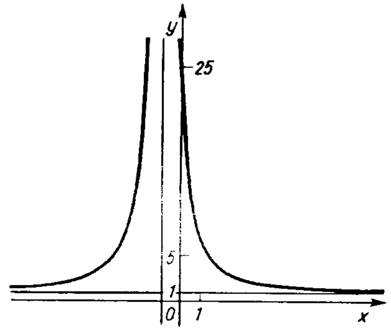
Rys. R.10.9

10.94. $x \neq 1$; $y = x - \dfrac{4}{x-1}$, $y' = \dfrac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}$, $y'' = \dfrac{-8}{(x-1)^3}$; miejsca zerowe funkcji $x_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{17})$, $x_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{17})$; asymptoty: $y=x$ i $x=1$ (rys. R.10.9); tabelka:

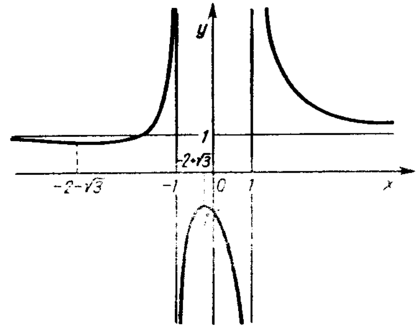
x	$-\infty$	...	1		...	$+\infty$
y'	1	+	+	+	+	1
y	$-\infty$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$+\infty$

10.95. $x \neq -1$; $y = 1 + \dfrac{24}{(x+1)^2}$, $y' = \dfrac{-48}{(x+1)^3}$, $y'' = \dfrac{144}{(x+1)^4} > 0$; asymptoty: $x=-1$, i $y=1$, asymptota $x=-1$ jest jednocześnie osią symetrii, gdyż $y = 1 + \dfrac{24}{(x+1)^2}$ (rys. R.10.10); tabelka:

x	$-\infty$	...	−1		...	$+\infty$
y'	0	+	+	−	−	0
y	1	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	1



Rys. R.10.10



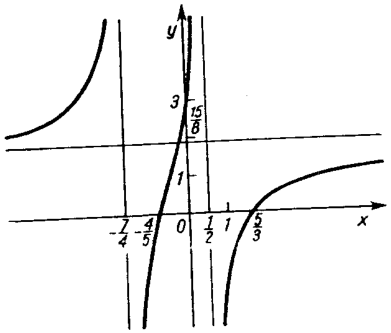
Rys. R.10.11

10.96. $|x| \neq 1$; $y = 1 + \dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}$, $y' = -\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x+1)^2(x-1)^2}$, gdzie $x_1 = -2-\sqrt{3}$, $x_2 = -2+\sqrt{3}$; asymptoty: $x=-1$, $x=1$, $y=1$ (rys. R.10.11); tabelka:

x	$-\infty$	...	$-2-\sqrt{3}$	...	−1		...	$-2+\sqrt{3}$	...	1		...	$-\infty$
y'	0	−	0	+	−	−	−	0	−	−	−	−	0
y	1	↘	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ m	↗	$-\infty$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ M	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	1

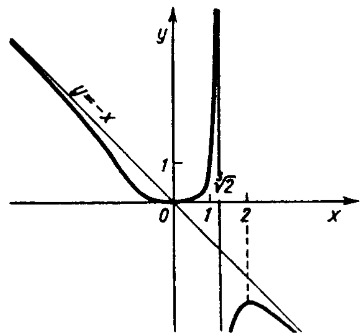
10.97. $x \neq -\frac{7}{4}$, $x \neq \frac{1}{2}$; $y = \frac{15}{8} - \frac{254x+55}{64\,(x+\frac{7}{4})(x-\frac{1}{2})}$, $y' = \frac{254x^2+110x+291}{64\,(x+\frac{7}{4})^2(x-\frac{1}{2})^2} > 0$; miejsca zerowe funkcji: $x_1 = -\frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{5}{3}$; asymptoty: $x = -\frac{7}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{15}{8}$ (rys. R.10.12); tabelka:

x	$-\infty$	...	$-\frac{7}{4}$		...	$\frac{1}{2}$		...	$+\infty$
y'	0	+	+	+	+	+	+	+	0
y	$\frac{15}{8}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$\frac{15}{8}$

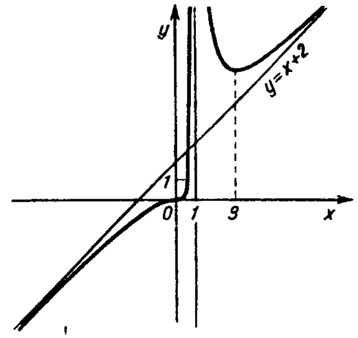


Rys. R.10.12

x	$-\infty$	...	0	...	1		...	3	...	$+\infty$
y''	0	−	0	+	+	+	+	+	+	0
y'	1	+	0	+	+	−	−	0	+	1
y	$-\infty$	↗	0 p	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$ m	↗	$+\infty$



Rys. R.10.13



Rys. R.10.14

10.100. $x \neq -2$; $y' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$; asymptoty: $x=-2$, $y=x+5$; tabelka:

x	$-\infty$	...	-3	...	-2		...	0	...	$+\infty$
									+	1

y'	-1	−	−	−	0	+	+	+	+	0	−	-1
y	$+\infty$	↘	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ p	↘	0 m	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$-\frac{8}{3}$ M	↘	$-\infty$

10.99. $x \neq 1$: $y = x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$, $y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$; asymptoty: $x=1$ i $y = x+2$ (rys. R.10.14); tabelka:

10.103. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=4$ mamy $y_{\max}=1$ (ostrze); miejsca zerowe funkcji $x=3$, $x=5$; $y'<0$ dla $x>4$, $y'>0$ dla $x<4$.

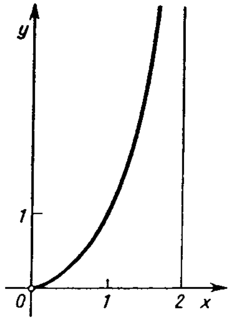
10.104. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=0$ mamy $y_{\max}=0$ (ostrze) a przy $x=1$ mamy $y_{\min}=-1$; miejsca zerowe funkcji $x=0$, $x=\frac{27}{8}$.

10.105. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=0$ i $x=2$ mamy $y_{\min}=\sqrt[3]{4}$ ostrza, a przy $x=1$ mamy $y_{\max}=2$; asymptota $y=0$.

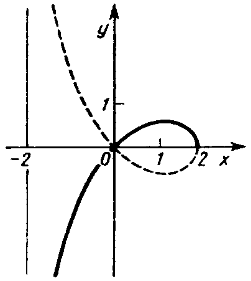
10.106. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=-2$ mamy $y_{min}=-\sqrt[3]{16}\approx$ $\approx -2{,}52$, a przy $x=2$ mamy $y_{max}=\sqrt[3]{16}\approx 2{,}52$, w obu punktach ekstremalnych są ostrza; asymptota $y=0$.

10.107. Funkcja jest określona, gdy $0\leqslant x<2$; $y'=\dfrac{(3-x)\sqrt{x}}{(\sqrt{2-x})^3}\geqslant 0$; asymptota $x=2$ (rys. R.10.15); tabelka:

x	0	...	1	...	2
y'	0	+	+	+	$+\infty$
y	0	↗	1	↗	$+\infty$



Rys. R.10.15



Rys. R.10.16

Uwaga. Krzywa na rysunku R.10.15 przedstawia górną połowę linii zwanej *cisoidą Dioklesa*, której ogólne równanie jest

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}\qquad (a>0).$$

10.108. Funkcja jest określona w przedziale $-2<x\leqslant 2$; pochodne

$$y'=\frac{-(x-x_1)(x-x_2)}{(\sqrt{2+x})^3\sqrt{2-x}},\quad \text{gdzie}\quad x_1=-\sqrt{5}-1,\ x_2=\sqrt{5}-1.$$

$$y''=\frac{x^2+2x-12}{(\sqrt{2+x})^5(\sqrt{2-x})^3}<0;$$

asymptota $x=-2$ (rys. R.10.16); tabelka:

x	-2	...	$\sqrt{5}-1$	...	2
y'	$+\infty$	+	0	$-$	$-\infty$
y	$-\infty$	↗	$\sqrt{10\sqrt{5}-22}$	↘	0

Uwaga. Wykres danej funkcji (rys. R.10.16) narysowano linią ciągłą; linia przerywana odpowiada równaniu

$$y=-x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$$

Obie części razem tworzą krzywą zwaną *strofoidą*, której równanie ogólne ma postać

$$y^2=x^2\,\frac{a-x}{a+x}\qquad (a>0).$$

10.109. Funkcja jest określona w przedziale $0\leqslant x\leqslant 4$; pochodne

$$y'=\frac{2\sqrt{x}(3-x)}{\sqrt{4-x}},\qquad y''=\frac{2(x^2-6x+6)}{(\sqrt{4-x})^3\sqrt{x}};$$

punkt przegięcia $(3-\sqrt{3},\ (3-\sqrt{3})\sqrt[4]{12})$; tabelka:

x	0	...	3	...	4
y'	0	+	0	$-$	$-\infty$
y	0	↗	$3\sqrt{3}$ M	↘	0

10.110. Funkcja jest określona w przedziale $4-\sqrt{30}\leqslant x\leqslant 4+\sqrt{30}$ (w przybliżeniu $-1{,}48\leqslant x\leqslant 9{,}48$); pochodna $\dfrac{-2(x^2-6x-7)}{\sqrt{-x^2+8x+14}}$; tabelka:

x	$-4-\sqrt{30}$	...	-1	...	7	...	$4+\sqrt{30}$
y'	$-\infty$	$-$	0	+	0	$-$	$-\infty$
y	0	↘	$-\sqrt{5}$ m	↗	$7\sqrt{21}$ M	↘	0

10.111. Funkcja jest określona dla wszystkich $x\neq\pm 1$; przy $x=\sqrt{3}$ mamy $y_{min}=\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$, a przy $x=-\sqrt{3}$ mamy $y_{max}=-\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$; punkty przegięcia $(-3,\ -\frac{3}{2})$, $(0,0)$, $(3,\ \frac{3}{2})$; asymptoty $x=-1$ i $x=1$.

10.112. Funkcja jest określona dla wszystkich $x\neq 2$; przy $x=6$ mamy $y_{min}=3/\sqrt[3]{2}$; punkt przegięcia $(12,\ 12/\sqrt[3]{100})$; asymptota $x=2$.

10.113. Funkcja jest określona w przedziale $-6\leqslant x\leqslant 6$; $y'=\dfrac{3x(24-x^2)}{\sqrt{36-x^2}}$; oś Oy jest osią symetrii krzywej; tabelka:

x	-6	...	$-2\sqrt{6}$	...	0	...	$2\sqrt{6}$	...	6
y'	$-\infty$	+	0	$-$	0	$-$	0	$-$	$-\infty$
y	0	↗	$48\sqrt{3}$ M	↘	0	↗	$48\sqrt{3}$	↘	[illegible]

10.114. Funkcję można przedstawić w postaci $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, skąd wnioskujemy, że okres jej wynosi π; oś Oy jest osią symetrii krzywej; tabelka (w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$):

x	...	0	...	$\frac{1}{4}\pi$	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π	...
y''	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
y'	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
y	↘	1 m	↗	$\frac{3}{2}$ p	↗	2 M	↘	$\frac{3}{2}$ p	↘	1 m	↗

10.115. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=\frac{1}{2}(2k+1)\pi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ mamy $y_{\min}=\frac{1}{2}$, a przy $x=k\pi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ mamy $y_{\max}=1$.

10.116. Funkcja jest określona dla wszystkich $x\neq\frac{1}{2}\pi+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; przy $x=\frac{1}{4}\pi+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ mamy $y_{\max}=1$; asymptoty $x=\frac{1}{2}\pi+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

10.117. $y=1+\sin(2x-\frac{1}{6}\pi)$, okres π; $y'=2\cos(2x-\frac{1}{6}\pi)$; tabelka (w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$):

x	...	0	...	$\frac{1}{3}\pi$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π	...
y'	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y	↗	$\frac{1}{2}$	↗	2 M	↘	0 m	↗	$\frac{1}{2}$	↗

10.118. $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{1}{3}\pi)$, okres π; $y'=\sin(2x+\frac{1}{3}\pi)$; tabelka (w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$):

x	...	0	...	$\frac{1}{3}\pi$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π	...
y'	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y	↗	0	↗	$\frac{3}{4}$ M	↘	$-\frac{1}{4}$ m	↗	0	↗

10.119. Okres [illegible]

x	...	0	...	$\frac{1}{12}\pi$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	$\frac{17}{12}\pi$	...	$\frac{7}{4}\pi$	...	2π	...
y'	+	+	+	0	−	0	+	0	−	0	+	+	+
y	↗	$\sqrt{2}$	↗	$\frac{3}{2}$ M	↘	-3 m	↗	$\frac{3}{2}$ M	↘	1 m	↗	$\sqrt{2}$	↗

10.120. [illegible] okres 2π; [illegible] $(3\cos^2 x-1)$; oś Oy jest osią symetrii

x	...	0	...	α	...	$\pi-\alpha$	...	π	...	$\pi+\alpha$	...	$2\pi-\alpha$	...	2π	...
$\sin x$	−	0	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$3\cos^2 x-1$	+	+	+	0	−	0	+	+	+	0	−	0	+	+	+
y'	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	0 m	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$ M	↘	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ m	↗	0 M	↘	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ m	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$ M	↘	0 m	↗

W tabelce oznaczyliśmy $\alpha=\arccos\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (kąt α ma około 35°16′).

10.121. $y=\sin x(1-2\sin^2 x)$, okres 2π; $y'=\cos x(1-6\sin^2 x)$; początek współrzędnych jest środkiem symetrii krzywej; tabelka (w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$):

x	...	0	...	α	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$\pi-\alpha$	...	$\pi+\alpha$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$2\pi-\alpha$	...	2π	...
$\cos x$	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$1-6\sin^2 x$	+	+	+	0	−	−	−	0	+	0	−	−	−	0	+	+	+
y'	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	−	0	+	+	+
y	↗	0	↗	$\frac{1}{9}\sqrt{6}$ M	↘	-1 m	↗	$\frac{1}{9}\sqrt{6}$ M	↘	$-\frac{1}{9}\sqrt{6}$ m	↗	1 M	↘	[illegible] m	↗	0	↗

W tabelce oznaczyliśmy $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{1}{6}}$ (kąt α ma około 24°15′).

10.122. Funkcja jest określona w następujących przedziałach $\langle\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi}\rangle$, $\langle-\sqrt{(2k+1)\pi}, -\sqrt{2k\pi}\rangle$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$; przy $x=0$ mamy $y_{\min}=0$, a przy $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(4k+1)}$ mamy $y_{\max}=1$.

10.123. Funkcja jest określona dla wszystkich x; przy $x=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ mamy $y_{\min}=0$, a przy $x=(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ mamy $y_{\max}=\sqrt{2}$; w punktach minimum y' nie istnieje (ostrza).

10.124. [illegible] wszystkich x; przy $x=-1$ mamy $y_{\max}=\frac{1}{4}\pi-1$,

10.125. $\frac{dy}{dx}=$ [illegible] $\frac{d^2y}{dx^2}$ [illegible] na wysokości $y=4$, wówczas $dy/dx=0$ i $d^2y/dx^2=-\frac{3}{2}$; następnie tor opada i przy $t=2$ osiąga punkt najniższy $y=0$, wówczas $dy/dx=0$ i $d^2y/dx^2=\frac{3}{2}$; przy dalszym wzrastaniu t, tor wznosi się nieograniczenie i obie pochodne rosną.

10.126. $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{t+1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{t^2+2t}{(t+1)^3}$; przy $t=0$ jest $y=0$ i obie pochodne są