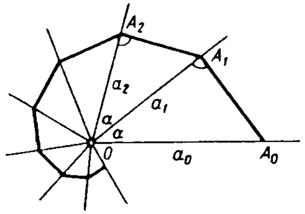
Gdy $n \to \infty$, mamy

$$H = \lim_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} 2h\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2h, \qquad V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{7}\pi r^2 h\left(1-\frac{1}{8^n}\right) = \frac{8}{7}\pi r^2 h.$$

ZADANIE 5.18. Dany jest odcinek a_0 i kąt ostry α. Na płaszczyźnie dane są we współrzędnych biegunowych punkty:

$$A_0(\varphi=0,\ \rho=a),\ A_1(\varphi=\alpha,\ \rho=a\cos\alpha),\ \ldots,\ A_n(\varphi=n\alpha,\ \rho=a\cos^n\alpha), \ldots$$

Obliczyć granicę długości linii łamanej $A_0A_1A_2\ldots A_n\ldots$ (rys. 5.7).



Rys. 5.7

Rozwiązanie. Obliczmy kolejno boki łamanej:

$$A_0A_1 = a_0 \sin\alpha, \quad A_1A_2 = a_1 \sin\alpha = a_0 \cos\alpha \sin\alpha, \quad \ldots,$$
$$A_{n-1}A_n = a_0 \cos^n\alpha \sin\alpha, \quad \ldots$$

Trzeba znaleźć sumę szeregu

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a\cos^n\alpha \sin\alpha, \quad \text{czyli} \quad L = a\sin\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\alpha.$$

Ponieważ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n\alpha = \frac{1}{1-\cos\alpha},$$

więc

$$L = \frac{a\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \text{skąd} \quad L = a\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Zadania

Obliczyć następujące granice (zad. 5.19 - 5.53):

5.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-2}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^5+32}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^3+125}{2x^2-50}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$.

5.31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x^2-9}$.

5.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.32 położyć $1+mx=t^3$.

5.33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$, n – liczba naturalna.

5.34. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$.

5.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$.

5.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

5.37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$.

5.38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{3\sin 2x}$.

5.39. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

5.40. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi}\dfrac{\sin x}{x}$.

5.41. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi}\dfrac{\cos x}{x-\frac{1}{2}\pi}$.

5.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{4x}$.

5.43. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{8-x}{\sin\frac{1}{8}\pi x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.43 zastosować wzór $\sin x = \sin(\pi - x)$.

5.44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

5.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$.

5.46. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

5.47. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi}\dfrac{\cos x-\cos\frac{1}{4}\pi}{\sin x-\sin\frac{1}{4}\pi}$.

5.48. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|\operatorname{tg}(x-1)|}{(x-1)^2}$.

5.49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.49 położyć $\operatorname{arctg} x = \alpha$.

5.50. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$. **5.51.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.

Wskazówka. W zadaniu 5.50 położyć $\arcsin(1-2x)=\alpha$.

5.52. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$. **5.53.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}}$.

Zbadać ciągłość następujących funkcji (zad. 5.54 - 5.60):

5.54. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ dla $x\neq -5$ i $f(-5)=-10$.

5.55. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=1$.

5.56. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=1$.

5.57. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. **5.58.** $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}$.

5.59. $f(x)=x-[x]$. **5.60.** $f(x)=[x]+[-x]$.

W zadaniach 5.61 - 5.63 określić funkcję $f(x)$ w punkcie $x=0$ tak, aby była ona ciągła:

5.61. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. **5.62.** $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

5.63. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną następujących funkcji (zad. 5.64 - 5.75):

5.64. $\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]$ w punkcie $x=0$. **5.65.** $\dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right]$ w punkcie $x=0$.

5.66. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ w punkcie $x=0$. **5.67.** $e^{\frac{1}{1-x^3}}$ w punkcie $x=1$.

5.68. $xe^{\frac{1}{x}}$ w punkcie $x=0$. **5.69.** $\dfrac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$ w punkcie $x=1$.

5.70. $\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ w punkcie $x=0$.

5.71. $2^{\frac{1}{x-a}}$ w punkcie $x=a$.

5.72. $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$ w punkcie $x=0$.

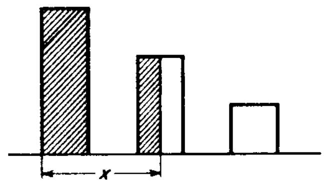
5.73. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } -\infty<x<0, \\ \sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } 0<x<\infty \end{cases}$ w punkcie $x=0$.

5.74. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|\sin x|}}$ w punkcie $x=0$.

5.75. $\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{b-c}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{x-a}$ w punkcie $x=a$.

5.76. Znaleźć graniczną wartość pierwiastków równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ $(b\neq 0)$ przy $a\to 0$.

5.77. Dane są trzy prostokąty o jednakowych podstawach równych 1 m i o wysokościach odpowiednio równych 3, 2 i 1 m ustawione w odległości 1 m od siebie (rys. 5.8). Zakładając, że x zmienia się w sposób ciągły, wyrazić zakreślone pole jako funkcję x. Czy funkcja ta będzie ciągła?



Rys. 5.8

5.78. Wierzchołek B trójkąta ABC porusza się po prostej BE równoległej do prostej AC oddalając się nieograniczenie w prawo. Zbadać, jak się będą zmieniały boki trójkąta, kąty wewnętrzne i kąt zewnętrzny BCD.

5.79. Niech p oznacza strzałkę łuku opartego na kącie środkowym φ, p_1 natomiast oznacza strzałkę łuku opartego na kącie środkowym $\frac{1}{2}\varphi$. Obliczyć granicę stosunku strzałek p/p_1, gdy $\varphi\to 0$.

5.80. W kole poprowadzono cięciwę AB. Punkty A i B połączono ze środkiem C łuku AB. Przez punkty A i B poprowadzono następnie styczne do koła przecinające się w punkcie D. Obliczyć granicę stosunku pól trójkątów ABC i ABD, gdy kąt środkowy oparty na łuku AB dąży do 0.

5.81. Niech funkcja $f(t)$ będzie równa ilości stanów skupienia związku H_2O (lód, woda, para) w temperaturze t pod ciśnieniem 1 atm. Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną funkcji w temperaturze $t=0°$ oraz wartość funkcji dla $t=0°$. Czy funkcja w punkcie $t=0°$ jest ciągła?

Rozdział VI

POCHODNE FUNKCJI POSTACI $y=f(x)$

§ 6.1. POCHODNE RZĘDU PIERWSZEGO

Pochodną funkcji $y=f(x)$ w punkcie x nazywamy granicę, do której dąży stosunek przyrostu funkcji Δy do odpowiedniego przyrostu zmiennej niezależnej Δx, gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera, czyli granicę

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

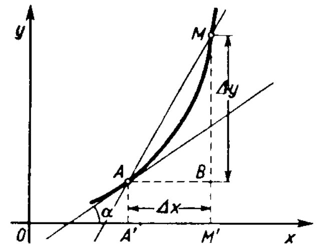
Jeżeli granica taka nie istnieje, to funkcja w tym punkcie nie ma pochodnej.

Pochodną funkcji $y=f(x)$ oznaczamy

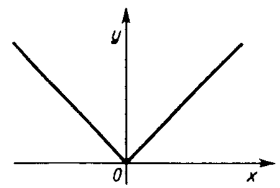
$$y',\quad f'(x),\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df(x)}{dx},\quad \dot{y}$$

Pierwsze dwa symbole wprowadził Lagrange, trzeci i czwarty symbol — Leibniz, ostatni — Newton; ten ostatni symbol używany jest najczęściej w mechanice.

Geometrycznie, *pochodna funkcji $y=f(x)$ w danym punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie* (rys. 6.1) ([1]).



Rys. 6.1



Rys. 6.2

Odnajdywanie pochodnej funkcji nazywa się *różniczkowaniem funkcji*. Dział matematyki traktujący o pochodnych, ich własnościach i zastosowaniach nazywamy *rachunkiem różniczkowym*.

([1]) *Współczynnik kątowy prostej* jest to tangens kąta α, który prosta tworzy z dodatnim zwrotem osi Ox.

3.39. Zbieżny przy $b<a$ i rozbieżny przy $b>a$. **3.40**. Zbieżny bezwzględnie. **3.41**. Zbieżny. **3.42**. Zbieżny (kryterium Cauchy'ego). **3.43**. Zbieżny (na podstawie kryterium Cauchy'ego, bo $\sqrt[n]{u_n}\to\frac{1}{4}\pi<1$). **3.44**. Zbieżny, gdyż spełnia warunki kryterium Leibniza. **3.45**. Zbieżny. **3.46**. Rozbieżny, gdyż $\frac{1}{\log n}>\frac{1}{n}$. **3.47**. Zbieżny warunkowo (kryterium Leibniza). **3.48**. Zbieżny warunkowo. **3.49**. Zbieżny. **3.50**. Zbieżny. **3.51**. Zbieżny. **3.52**. Zbieżny. **3.53**. Rozbieżny. **3.54**. Zbieżny, gdyż $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=\frac{3}{4}<1$. **3.55**. Rozbieżny. **3.56**. Rozbieżny, gdyż $\lim_{n\to\infty} u_n=10\neq 0$. **3.57**. Zbieżny. **3.58**. Zbieżny bezwzględnie. **3.59**. Zbieżny. **3.60**. Rozbieżny. **3.61**. Rozbieżny. **3.62**. Rozbieżny. **3.63**. Zbieżny. **3.64**. Rozbieżny. **3.65**. Zbieżny bezwzględnie. **3.66**. Zbieżny dla $|a|<1$. **3.67**. Zbieżny. **3.68**. Zbieżny bezwzględnie. **3.69**. Zbieżny bezwzględnie. **3.70**. Zbieżny. **3.71**. Rozbieżny. **3.72** Zbieżny. **3.73**. Rozbieżny. **3.74**. Zbieżny. **3.75**. Zbieżny. **3.76**. Rozbieżny.

3.77. Szereg przemienny, wyraz ogólny dąży do zera, lecz kryterium Leibniza nie jest spełnione, gdyż ciąg wartości bezwzględnych nie jest monotoniczny:

$$2>\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}>\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}<\frac{2}{5},\ \ldots,\ \frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{2n+1}{2n(n-1)}>\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n},$$

ale szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc i dany szereg jest rozbieżny.

3.78. Zbieżny, jako przemienny i spełniający kryterium Leibniza.

3.79. Rozbieżny.

3.80. Zbieżny dla $a>10$. Oprzeć się na tożsamości $a^{\log b}=b^{\log a}$

3.81. Zbieżny. Porównać z szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

3.82 Tak. **3.83**. Nie. **3.84**. $\frac{1}{9}$. **3.85**. Zbieżny. **3.86**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

5.54. Ciągła dla wszystkich x. **5.55**. Ciągła dla wszystkich x.

5.56. Ciągła dla wszystkich $x\neq 0$. W punkcie $x=0$ mamy

$$\lim_{x\to+0} f(x)=f(0)=1,\qquad \lim_{x\to-0} f(x)=-1.$$

5.57. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktu $x=0$, w którym jest obustronnie nieciągła.

5.58. Funkcja jest nieciągła w punkcie $x=1$.

5.59. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktów całkowitych $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, w których jest prawostronnie nieciągła.

5.60. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktów całkowitych $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, w których jest obustronnie nieciągła.

5.61. $f(0)=0{,}5$. **5.62**. $f(0)=0$. **5.63**. $f(0)=2$. **5.64**. b/a; b/a.

5.65. Granica lewostronna: 0, jeśli $a<0$; $+\infty$, jeśli $b>0$, $a>0$; $-\infty$, jeśli $b<0$, $a>0$; 0, jeśli $b=0$. Granica prawostronna: 0, jeśli $a>0$; 0, jeśli $b=0$; $-\infty$, jeśli $a<0$, $b>0$; $+\infty$, jeśli $a<0$, $b<0$.

5.66. Granica lewostronna -1, granica prawostronna 1.

5.67. Granica lewostronna $+\infty$, granica prawostronna 0.

5.68. Granica lewostronna 0, granica prawostronna $+\infty$.

5.69. Granica lewostronna $-\frac{1}{2}$, granica prawostronna 0.

5.70. Granica lewostronna 0, granica prawostronna 0, ale funkcja nie jest ciągła w punkcie $x=0$, gdyż nie jest określona w tym punkcie.

5.71. Granica lewostronna 0, granica prawostronna $+\infty$.

5.72. Granica lewostronna $\frac{3}{8}$, granica prawostronna 0.

5.73. 0; nie istnieje. **5.74**. 0; 0. **5.75**. c; b. **5.76**. $x_1\to -c/b$, $x_2\to+\infty$.

5.77. Mamy

$$\begin{cases} 3x & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

5.19. 2.	**5.20**. 4.	**5.21**. -2.	**5.22**. 12.	**5.23**. -27.
5.24. 1.	**5.25**. -4.	**5.26**. $\frac{1}{80}$.	**5.27**. -6.	**5.28**. $-\frac{15}{4}$.
5.29. 1.	**5.30**. 5.	**5.31**. $-\infty$.	**5.32**. $\frac{1}{3}m$.	**5.33**. n.
5.34. $\frac{1}{10}$.	**5.35**. 1.	**5.36**. 5.	**5.37**. $\frac{3}{4}$.	**5.38**. $\frac{1}{3}$.
5.39. 0.	**5.40**. $2/\pi$.	**5.41**. -1.	**5.42**. $\frac{1}{4}$.	**5.43**. $8/\pi$.
5.44. $\frac{2}{3}$.	**5.45**. 2.	**5.46**. $\frac{1}{2}$.	**5.47**. -1.	**5.48**. $+\infty$.

$$f(x)=\begin{cases} 5 & \text{dla} \quad 3\leqslant x\leqslant 4, \\ x+1 & \text{dla} \quad 4\leqslant x\leqslant 5, \\ 6 & \text{dla} \quad 5\leqslant x<+\infty. \end{cases}$$

Funkcja ciągła na półprostej $\langle 0, +\infty)$.

5.78. $AB\to+\infty$, $CB\to+\infty$, $\measuredangle BCD\to 0$, $\measuredangle ACB\to 180°$. **579**. 4. **580**. $\frac{1}{2}$.

5.81. Granica lewostronna i prawostronna 1; $f(0)=2$ (lód i woda); w punkcie $t=0$