czyli

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}.$$

Wiemy, że gdy $n\to\infty$, to obie sumy mają granice skończone: pierwsza granica jest równ sumie szeregu harmonicznego rzędu $\alpha=2$, a więc zbieżnego, druga granica, obliczon ze wzoru (3.1.3), daje 1; a więc

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+1.$$

Okazaliśmy, że ciąg sum cząstkowych parzystych S_{2n} jest zbieżny.

Ażeby dowieść, że ciąg S_n jest zbieżny, należy jeszcze wykazać, że ciąg sum cząstk wych nieparzystych S_{2n+1} jest zbieżny i to do tej samej granicy; wynika to bezpośredn z równości

$$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1},$$

wobec tego, że wyraz ogólny danego szeregu dąży do zera.

W ten sposób udowodniliśmy zbieżność szeregu utworzonego z bezwzględnych wa tości wyrazów danego szeregu, a więc tym samym udowodniliśmy bezwzględną zbieżno danego szeregu.

§ 3.4. INNE SZEREGI LICZBOWE

Zajmiemy się tutaj szeregami nie należącymi do żadnej z poprzednio rozpatrzony grup. Przy badaniu zbieżności takich szeregów stosujemy często podane już kryteriu bezwzględnej zbieżności szeregów (3.3.2).

ZADANIE 3.19. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\cdot\frac{1}{3^n},$$

czyli

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-\ldots-\frac{1}{3^{4n-3}}-\frac{1}{3^{4n-2}}+\frac{1}{3^{4n-1}}+\frac{1}{3^{4n}}-\ldots$$

Rozwiązanie. Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ utworzo z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu jest zbieżny jako szereg geometrycz o ilorazie $q=\frac{1}{3}$.

ZADANIE 3.20. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{3^n},\quad \text{czyli}\quad \frac{\sin 1}{3}+\frac{\sin 2}{3^2}+\frac{\sin 3}{3^3}+\ldots+\frac{\sin n}{3^n}+\ldots$$

Rozwiązanie. W szeregu tym występują wyrazy dodatnie i ujemne, ale nie na przemian.

Badamy szereg

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{3^n}$$

utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu. Biorąc pod uwagę, że dla każdej wartości naturalnej n zachodzi nierówność $|\sin n|\leqslant 1$, mamy $|\sin n|/3^n\leqslant 1/3^n$, więc w myśl kryterium porównawczego szereg (1) jest zbieżny, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q=\frac{1}{3}$. Stąd wniosek, że dany szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Zadania

Napisać sumy częściowe podanych niżej szeregów i znaleźć ich granice (zad. 3.21 - 3.25):

3.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Wskazówka. Wykorzystać równość $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

3.22. $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

3.23. $\ln 2+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\ldots$

3.24. $\ln\frac{1}{4}+\ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7}+\ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10}+\ln\frac{4\cdot 10}{3\cdot 13}+\ldots$

3.25. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[2n+1]{x}-\sqrt[2n-1]{x})$.

Mając daną sumę częściową szeregu S_n znaleźć ogólny wyraz szeregu oraz jego sumę (zad. 3.26 - 3.28):

3.26. $S_n=\frac{n+1}{n}$. **3.27.** $S_n=\frac{-1+2^n}{2^n}$. **3.28.** $S_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

Zbadać zbieżność następujących szeregów (zad. 3.29 - 3.81):

3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. **3.30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$.

3.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^3}$. **3.32.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^3-1}$.

3.33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$.

3.34. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$.

3.35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$.

3.36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

3.37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}n}$.

3.38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

3.39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, przy czym $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a, b, a_n > 0$.

3.40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$.

3.41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,5^n}{2^n \cdot 3^{n+1}}$.

3.42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}$.

3.43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}$.

3.44. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2}-1)$.

3.45. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

3.46. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

3.47. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$.

3.48. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

3.49. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$.

3.50. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$.

3.51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$.

3.52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} \cdot 99^n}{100^n}$.

3.53. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n+1}}}$.

3.54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\,(n+3)! \cdot 3^n}{(2n)!}$.

3.55. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}\right)$.

3.56. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \sin \frac{2}{n} \operatorname{tg} \frac{5}{n}\right)$.

3.57. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n!}$.

3.58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

3.59. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}\right)$.

3.60. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3.61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$.

3.62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$.

3.63. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{1}{n}$.

3.64. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \cos^2 \frac{1}{n}\right)$

3.65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

3.66. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n a^n)$.

3.67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

3.68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$.

3.69. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

3.70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

3.71. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n})$.

3.72. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+4} - n)$.

3.73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+n}-n)}$.

3.74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-n)}$.

3.75. $\sum_{n=1}^{\infty} \left((\sqrt[3]{8n^3+2n}-2n) \sin \frac{1}{n}\right)$

3.76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^3} = 1 + \frac{1+2}{2^2} + \frac{1+2+3}{3^3} + \ldots + \frac{1+2+\ldots+n}{n^3} + \ldots$

3.77. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3-(-1)^n}{2n} = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{2}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots$

3.78. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi$.

3.79. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi$

3.80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\log n}}$.

3.81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$.

3.82. Między krzywymi

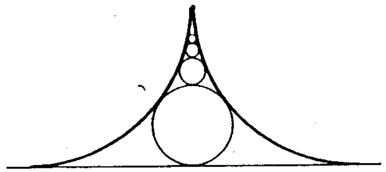
$$y = \frac{1}{x^3} \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{x^2}$$

na prawo od ich punktu przecięcia przeprowadzono odcinki równoległe do osi Oy, w równej odległości od siebie. Czy suma długości tych odcinków jest skończona?

3.83. Czy będzie skończona suma długości odcinków z zadania poprzedniego, jeżeli krzywą $y = \frac{1}{x^2}$ zastąpimy krzywą $y = \frac{1}{x}$?

3.84. Wyrazami szeregu są długości odcinków zbudowanych następująco: pierwszym odcinkiem jest $\frac{1}{10}$ część odcinka jednostkowego, drugim jest $\frac{1}{10}$ pierwszego itd. Znaleźć sumę otrzymanego szeregu.

3.85. Rozważmy ciąg trójkątów prostokątnych równoramiennych takich, że przyprostokątna poprzedniego jest przeciwprostokątną następnego trójkąta. Przeciwprostokątna pierwszego trójkąta równa się 1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie a_n jest długością przyprostokątnej n-tego trójkąta.



Rys. 3.1

3.86. Rozważmy figurę krzywoliniową ograniczoną łukami dwóch okręgów stycznych o promieniach równych 1 i prostą styczną do tych okręgów. W figurę tę wpisujemy ciąg okręgów o możliwie maksymalnych promieniach (rys. 3.1). Długości średnic tych okręgów tworzą szereg, którego suma równa się 1. Napisać ten szereg.

Rozdział IV

FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 4.1. UWAGI OGÓLNE O FUNKCJACH

Mówimy, że w zbiorze liczb A jest określona pewna *funkcja* f (*funkcja jednej zmiennej*), jeżeli każdej liczbie x ze zbioru A jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba y pewnego zbioru liczb B.

Przyporządkowanie to zapisujemy:

(1) $$y = f(x).$$

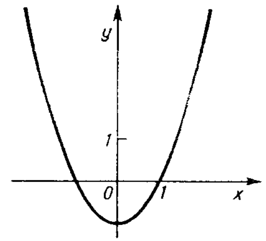
Literę x we wzorze (1) nazywamy *argumentem funkcji* lub *zmienną niezależną*, literę y – *zmienną zależną*. Określoną liczbę x_0 ze zbioru A nazywamy *wartością argumentu* funkcji f albo *wartością zmiennej niezależnej* x; przyporządkowaną jej liczbę y_0 ze zbioru B nazywamy *wartością funkcji* f w punkcie x_0. Zbiór A wartości argumentów funkcji f nazywamy *dziedziną funkcji* f albo *polem określoności* funkcji f. Zbiór B wartości funkcji f nazywamy *zakresem funkcji* f.

Funkcja może być określona różnymi sposobami. Podamy najważniejsze z nich:

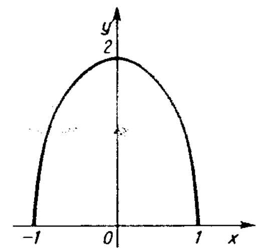
1° Za pomocą wzoru.

PRZYKŁADY:

(a) $y = x^2 - 1$. Za pole tej funkcji można przyjąć zbiór wszystkich liczb (co można zapisać w postaci podwójnej nierówności $-\infty < x < \infty$); wówczas zakresem tej funkcji jest zbiór liczb y spełniających nierówność $y \geq -1$ (rys. 4.1).



Rys. 4.1



Rys. 4.2

(b) $y = 2\sqrt{1-x^2}$. Za pole tej funkcji można przyjąć zbiór liczb x spełniających podwójną nierówność $-1 \leq x \leq 1$; wówczas zakresem funkcji będzie zbiór liczb y spełniających podwójną nierówność $0 \leq y \leq 2$ (rys. 4.2).

(c) $y = \sqrt{-x^2(1-x)^2}$. Pole tej funkcji składa się z dwóch liczb 0 i 1, a zakres z jednej liczby 0.

3.39. Zbieżny przy $b<a$ i rozbieżny przy $b>a$. **3.40**. Zbieżny bezwzględnie. **3.41**. Zbieżny. **3.42**. Zbieżny (kryterium Cauchy'ego). **3.43**. Zbieżny (na podstawie kryterium Cauchy'ego, bo $\sqrt[n]{u_n}\to\frac{1}{4}\pi<1$). **3.44**. Zbieżny, gdyż spełnia warunki kryterium Leibniza. **3.45**. Zbieżny. **3.46**. Rozbieżny, gdyż $\frac{1}{\log n}>\frac{1}{n}$. **3.47**. Zbieżny warunkowo (kryterium Leibniza). **3.48**. Zbieżny warunkowo. **3.49**. Zbieżny. **3.50**. Zbieżny. **3.51**. Zbieżny. **3.52**. Zbieżny. **3.53**. Rozbieżny. **3.54**. Zbieżny, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{4}<1$. **3.55**. Rozbieżny. **3.56**. Rozbieżny, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=10\neq 0$. **3.57**. Zbieżny. **3.58**. Zbieżny bezwzględnie. **3.59**. Zbieżny. **3.60**. Rozbieżny. **3.61**. Rozbieżny. **3.62**. Rozbieżny. **3.63**. Zbieżny. **3.64**. Rozbieżny. **3.65**. Zbieżny bezwzględnie. **3.66**. Zbieżny dla $|a|<1$. **3.67**. Zbieżny. **3.68**. Zbieżny bezwzględnie. **3.69**. Zbieżny bezwzględnie. **3.70**. Zbieżny. **3.71**. Rozbieżny. **3.72** Zbieżny. **3.73**. Rozbieżny. **3.74**. Zbieżny. **3.75**. Zbieżny. **3.76**. Rozbieżny.

3.77. Szereg przemienny, wyraz ogólny dąży do zera, lecz kryterium Leibniza nie jest spełnione, gdyż ciąg wartości bezwzględnych nie jest monotoniczny:

[illegible]

ale szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc i dany szereg jest rozbieżny.

3.78. Zbieżny, jako przemienny i spełniający kryterium Leibniza.

3.79. Rozbieżny.

3.80. Zbieżny dla $a>10$. Oprzeć się na tożsamości $a^{\log b}=b^{\log a}$

3.81. Zbieżny. P[illegible]wnać z szeregiem $\sum^{\infty} 1$ [illegible]

3.82. Tak. **3.83**. Nie. **3.84**. $\frac{1}{9}$. **3.85**. Zbieżny. **3.86**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

DO ROZDZIAŁU V

5.19. 2.	**5.20**. 4.	**5.21**. -2.	**5.22**. 12.	**5.23**. -27.
5.24. 1.	**5.25**. -4.	**5.26**. $\frac{1}{80}$.	**5.27**. -6.	**5.28**. $-\frac{15}{4}$.
5.29. 1.	**5.30**. 5.	**5.31**. $-\infty$.	**5.32**. $\frac{1}{3}m$.	**5.33**. n.
5.34. $\frac{1}{10}$.	**5.35**. 1.	**5.36**. 5.	**5.37**. $\frac{3}{4}$.	**5.38**. $\frac{1}{3}$.
5.39. 0.	**5.40**. $2/\pi$.	**5.41**. -1.	**5.42**. $\frac{1}{4}$.	**5.43**. $8/\pi$.
5.44. $\frac{2}{3}$.	**5.45**. 2.	**5.46**. $\frac{1}{2}$.	**5.47**. -1.	**5.48**. $+\infty$.
5.49. 1.	**5.50**. $-\frac{1}{2}$.	**5.51**. e.	**5.52**. e^{-3}.	**5.53**. e^{nk}.

5.54. Ciągła dla wszystkich x. **5.55**. Ciągła dla wszystkich x.

5.56. Ciągła dla wszystkich $x\neq 0$. W punkcie $x=0$ mamy

$$\lim_{x\to+0}f(x)=f(0)=1, \qquad \lim_{x\to-0}f(x)=-1.$$

5.57. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktu $x=0$, w którym jest obustronnie nieciągła.

5.58. Funkcja jest nieciągła w punkcie $x=1$.

5.59. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktów całkowitych $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, w których jest prawostronnie nieciągła.

5.60. Funkcja ciągła na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktów całkowitych $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, w których jest obustronnie nieciągła.

5.61. $f(0)=0{,}5$. **5.62**. $f(0)=0$. **5.63**. $f(0)=2$. **5.64**. b/a; b/a.

5.65. Granica lewostronna: 0, jeśli $a<0$; $+\infty$, jeśli $b>0$, $a>0$; $-\infty$, jeśli $b<0$, $a>0$; 0, jeśli $b=0$. Granica prawostronna: 0, jeśli $a>0$; 0, jeśli $b=0$; $-\infty$, jeśli $a<0$, $b>0$; $+\infty$, jeśli $a<0$, $b<0$.

[illegible]

5.68. Granica lewostronna 0, granica prawostronna $+\infty$.

5.69. Granica lewostronna $-\frac{1}{2}$, granica prawostronna 0.

5.70. Granica lewostronna 0, granica prawostronna 0, ale funkcja nie jest ciągła w punkcie $x=0$, gdyż nie jest określona w tym punkcie.

5.71. Granica lewostronna 0, granica prawostronna $+\infty$.

5.72. [illegible] lewostr[illegible] granica [illegible]

5.73. 0; nie istnieje. **5.74**. 0; 0. **5.75**. c; b. **5.76**. $x_1\to -c/b$, $x_2\to+\infty$.

5.77. Mamy

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 3 & \text{dla} \quad 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 2x-1 & \text{dla} \quad 2\leqslant x\leqslant 3, \\ 5 & \text{dla} \quad 3\leqslant x\leqslant 4, \\ x+1 & \text{dla} \quad 4\leqslant x\leqslant 5, \\ 6 & \text{dla} \quad 5\leqslant x<+\infty. \end{cases}$$

Funkcja ciągła na półprostej $\langle 0, +\infty)$.

5.78. $AB\to+\infty$, $CB\to+\infty$, $\sphericalangle BCD\to 0$, $\sphericalangle ACB\to 180°$. **579**. 4. **580**. $\frac{1}{2}$.

5.81. Granica lewostronna i prawostronna 1; $f(0)=2$ (lód i woda); w punkcie $t=0$ funkcja nie jest ciągła.