Gdy $R_z=0$, oporność wypadkowa wynosi $R=R_2=3$. Aby obliczyć do jakiej granicy dąży R, gdy $R_z\to\infty$, obliczamy

$$\lim_{R_z\to\infty}\left(\frac{2R_z}{2+R_z}+3\right)=\lim_{R_z\to\infty}\left(\frac{2}{\frac{2}{R_z}+1}+3\right)=5.$$

A więc gdy oporność R_z zmienia się od 0 do ∞, oporność wypadkowa R rośnie od 3 do 5 omów.

Zadania

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.17 - 2.40):

2.17. $u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

2.18. $u_n=\dfrac{4n-3}{6-5n}$.

2.19. $u_n=\dfrac{n^2-1}{3-n^3}$.

2.20. $u_n=\dfrac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$.

2.21. $u_n=\dfrac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}$.

2.22. $u_n=\dfrac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$.

2.23. $u_n=\dfrac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$.

2.24. $u_n=\dfrac{3}{n}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}$.

2.25. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$.

2.26. $u_n=\left(\dfrac{2n-3}{3n+1}\right)^2$.

2.27. $u_n=\left(\dfrac{5n-2}{3n-1}\right)^3$.

2.28. $u_n=\dfrac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$.

2.29. $u_n=\dfrac{\sqrt{n}-2}{3n+5}$.

2.30. $u_n=\dfrac{n-10}{3}$.

2.31. $u_n=\dfrac{(-0{,}8)^n}{2n-5}$.

2.32. $u_n=\dfrac{2-5n-10n^2}{3n+15}$.

2.33. $u_n=\dfrac{2n+(-1)^n}{n}$.

2.34. $u_n=\dfrac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$.

2.35. $u_n=\sqrt{\dfrac{3n-2}{n+10}}$.

2.36. $u_n=\sqrt[3]{\dfrac{n-1}{8n+10}}$.

2.37. $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$.

2.38. $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

2.39. $u_n=\dfrac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n}-n}$.

2.40. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$.

Opierając się na zadaniach 2.5 i 2.6 obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad 2.41 - 2.47):

2.41. $u_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

2.42. $u_n=\sqrt{n^2+n}-n$.

2.43. $u_n=n-\sqrt{n^2+5n}$.

2.44. $u_n=\sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}$.

2.45. $u_n=3n-\sqrt{9n^2+6n-15}$.

2.46. $u_n=\sqrt[3]{n^3+4n^2}-n$.

2.47. $u_n=n\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$.

Opierając się na zadaniu 2.7 znaleźć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.48 - 2.53):

2.48. $u_n=\dfrac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$.

2.49. $u_n=\dfrac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$.

2.50. $u_n=\dfrac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}$.

2.51. $u_n=\dfrac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$.

2.52. $u_n=\dfrac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$.

2.53. $u_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\dfrac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$.

Opierając się na zadaniu 2.8 obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.54 - 2.57):

2.54. $u_n=\sqrt[n]{3^n+2^n}$.

2.55. $u_n=\sqrt[n]{10^n+9^n+8^n}$.

2.56. $u_n=\sqrt[n]{10^{100}}-\sqrt[n]{\dfrac{1}{10^{100}}}$.

2.57. $u_n=\sqrt[n]{(\tfrac{2}{3})^n+(\tfrac{3}{4})^n}$.

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.58 - 2.63):

2.58. $u_n=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.59):

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.56):

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.60. $u_n=\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$.

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.62):

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2.61. $u_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

2.62. $u_n=\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$.

2.63. $u_n=\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\ldots+\dfrac{n}{n^k}$.

Opierając się na zadaniu 2.9 znaleźć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.64–2.70):

2.64. $u_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

2.65. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

2.66. $u_n=\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$.

2.67. $u_n=\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$.

2.68. $u_n=\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{-n+3}$

2.69. $u_n=\left(\dfrac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$.

2.70. $u_n=\left(\dfrac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.71 - 2.90):

2.71. $u_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$.

2.72. $u_n=\sqrt{n(n-\sqrt{n^2-1})}$.

2.73. $u_n=n(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1})$.

2.74. $u_n=\sqrt[n]{2n^3-3n^2+15}$.

2.75. $u_n=\sqrt{n^{10}-2n^2+2}$.

2.76. $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

2.77. $u_n=\dfrac{1}{2n}\cos n^3-\dfrac{3n}{6n+1}$.

2.78. $u_n=2^{-n}a\cos n\pi$.

$n \sin n!$

2.80. $u_n=(\sin n!)\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{2n}{3n+1}\cdot\dfrac{n}{1-3n}$.

2.81. $u_n=\dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}-\dfrac{n}{1-2n}\cdot\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$.

2.82. $u_n=n(\ln(n+1)-\ln n)$.

2.83. $u_n=\dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

2.84. $u_n=\dfrac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$.

2.85. $u_n=\dfrac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$.

2.86. $u_n=\dfrac{8^{\log_2 n}}{2^n}$.

2.87. $u_n=\dfrac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$.

2.88. $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

2.89. $u_n=\dfrac{2^n\cdot 3^{2n}}{n!}$.

2.90. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

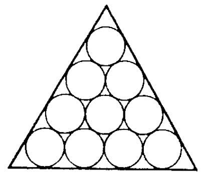
Wskazówka. Każdy czynnik postaci $1-\dfrac{1}{k^2}$ przedstawić w postaci

$$\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k},$$

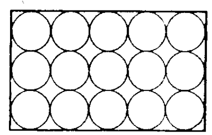
a następnie uprościć iloczyn.

2.91. Okazać, że jeżeli $\sqrt[n]{|u_n|}\to q<1$, to $u_n\to 0$.

2.92. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano k_n okręgów o jednakowych promieniach r_k tak jak na rysunku 2.2. Niech S_{k_n} oznacza sumę pól tych okręgów, a S oznacza pole danego trójkąta. Znaleźć granicę stosunku S_{k_n}/S przy $n\to\infty$.



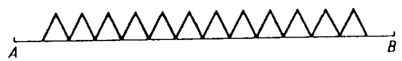
Rys. 2.2



Rys. 2.3

2.93. W prostokąt wpisano k_n okręgów (jak to podano na rysunku 2.3) o jednakowych promieniach. Niech a i b oznaczają długości boków prostokąta, a $a/2n$ promień wpisanych okręgów. Znaleźć granicę stosunku S_{k_n}/S przy $n\to\infty$, jeżeli S_{k_n} oznacza pole

2.94. Odcinek AB o długości d podzielono na n równych części (rys. 2.4). Na każdej z nich z pominięciem pierwszej i ostatniej zbudowano równoboczne trójkąty. Obliczyć granicę pól S_n i obwodów P_n otrzymanej figury przy $n\to\infty$.



Rys. 2.4

2.95. Punkt P_1 dzieli odcinek AB o długości l na dwie równe części; punkt P_2 dzieli odcinek AP_1 na połowy, punkt P_3 dzieli odcinek P_2P_1 na połowy; punkt P_4 w ten sam sposób dzieli odcinek $P_2\ P_3$ itd. Określić graniczne położenie punktu P_n przy $n\to\infty$.

2.96. Pewna reakcja chemiczna przebiega w ten sposób, że przyrost ilościowy substancji w każdym przedziale czasu τ jest proporcjonalny do długości przedziału i do początkowej ilości materii znajdującej się w początku tego przedziału. Zakładając, że w chwili rozpoczęcia reakcji ilość substancji wynosiła Q_0, określić jej ilość $Q_t^{(n)}$ po upływie czasu t, jeżeli $\tau=t/n$. Znaleźć $Q_t=\lim\limits_{n\to\infty} Q_t^{(n)}$.

Rozdział III

SZEREGI LICZBOWE

§ 3.1. UWAGI OGÓLNE O SZEREGACH

Przez *szereg liczbowy nieskończony* oznaczony symbolem

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(^1) \tag{1}$$

rozumiemy ciąg sum:

$$\begin{aligned} &s_1=u_1,\\ &s_2=u_1+u_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Liczby $u_1, u_2, \ldots$ nazywamy *wyrazami szeregu*, a symbol u_n nazywamy *wyrazem ogólnym szeregu*. Wyrazy ciągu $\{s_n\}$ nazywamy *sumami cząstkowymi* szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Jeżeli ciąg sum cząstkowych (2) jest zbieżny, czyli ma skończoną granicę s, to mówimy, że *szereg* (1) *jest zbieżny*, a liczbę s nazywamy *sumą szeregu nieskończonego* (1). Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy *szeregiem rozbieżnym*.

Jeżeli szereg (1) jest zbieżny, to na oznaczenie jego sumy s używa się tych samych symboli (1), co na oznaczenie samego szeregu, mianowicie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=s \quad \text{lub} \quad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=s.$$

Zanotujmy twierdzenia:

(3.1.1) *Warunkiem koniecznym zbieżności każdego szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest to, żeby jego wyraz ogólny* u_n *dążył do zera*:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

---

(1) Czasem do oznaczania szeregu wygodnie jest użyć symbolu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, który oznacza ciąg sum o wyrazie ogólnym $s_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$; przez symbol $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ rozumiemy ciąg o wyrazie ogólnym $s_n=u_2+u_3+\ldots+u_{n+1}$ itp.

1.77. $n=7$.

1.78. $T_3=\binom{5}{2}(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^2=60$.

1.79. $T_5=495a^4x^{-2}$.

1.80. $T_4=35\dfrac{(b+a)a}{(b-a)^3}$.

1.81. $1{,}0005^{36}\approx 1{,}018$. Wystarczy wziąć pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia $(1+0{,}0005)^{36}$.

DO ROZDZIAŁU II

2.17. 1.	**2.18.** $-\frac{4}{5}$.	**2.19.** 0.	**2.20.** -2.	**2.21.** $\frac{1}{3}$.
2.22. $\frac{1}{3}$.	**2.23.** $-\frac{1}{10}$.	**2.24.** 0.	**2.25.** 0.	**2.26.** $\frac{4}{9}$.
2.27. $\frac{125}{27}$.	**2.28.** 1.	**2.29.** 0.	**2.30.** ∞.	**2.31.** 0.
2.32. $-\infty$.	**2.33.** 2.	**2.34.** $\sqrt{2}-2$.	**2.35.** $\sqrt{3}$.	**2.36.** $\frac{1}{2}$.
2.37. $\frac{1}{3}$.	**2.38.** 1.			

2.39. 1. Podzielić licznik i mianownik ułamka przez n.

2.40. $\frac{4}{7}$.	**2.41.** 0.	**2.42.** $\frac{1}{2}$.	**2.43.** $-\frac{5}{2}$.	**2.44.** $1/\sqrt{3}$.
2.45. -1.	**2.46.** $\frac{4}{3}$.	**2.47.** $-5/3\sqrt[3]{4}$	**2.48.** $\frac{1}{4}$.	**2.49.** $\frac{5}{4}$.
2.50. $\frac{48}{[illegible]}$	**2.51.** ∞.	**2.52.** -1.	**2.53.** $\frac{2}{3}$.	**2.54.** 3.
2.55. [illegible]	**2.56.** 0.	**2.57.** $\frac{3}{4}$.	**2.58.** $\frac{1}{2}$.	**2.59.** $\frac{1}{3}$.
2.60. $\frac{1}{4}$.	**2.61.** $\frac{4}{3}$.			

2.62. $\dfrac{3}{4(1-a)}$ dla $|a|<1$; jeżeli $|a|\geqslant 1$, to ciąg jest rozbieżny.

2.63. 0 przy $k>2$, $\frac{1}{2}$ przy $k=2$ oraz ∞ przy $k<2$.

2.64. e^2.	**2.65.** 1.	**2.66.** e^5.	**2.67.** $e^{-1/3}$.	**2.68.** e^4.
2.69. e^6.	**2.70.** $e^{3/2}$.	**2.71.** 1.	**2.72.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.	**2.73.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2.74. 1. Przyjąć $u_n=\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^3\sqrt[n]{1-\dfrac{3}{2n}+\dfrac{15}{2n^3}}$; granica pierwszego i drugiego czynnika równa się 1, dla trzeciego czynnika stosujemy twierdzenie, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, jeżeli $a_n\geqslant 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq\infty$.

2.75. 1.	**2.76.** 1.	**2.77.** $-\frac{1}{2}$.	**2.78.** 0.	**2.79.** 0.
2.80. $-\frac{2}{9}$.	**2.81.** 0.	**2.82.** 1.	**2.83.** 3.	

2.84. 15. Oprzeć się na wzorze $\log_g a=\dfrac{1}{\log_k g}\log_k a$.

2.85. 1. Oprzeć się na wzorze $a^{\log_g b}=b^{\log_g a}$.

2.86. 0. Oprzeć się na wzorze w odpowiedzi do zad. 2.84 i na zad. 2.12.

2.87. 0.

2.88. 0. Zauważyć, że $0<\dfrac{n!}{n^n}\leqslant\dfrac{1}{n}$.

2.89. 0. Zauważyć, że $2^n\cdot 3^{2n}=18^n$; następnie oprzeć się na zad. 2.12.

2.90. $\frac{1}{2}$.

2.92. Niech wzdłuż boku a trójkąta ABC leży n okręgów. Wtedy średnica każdego z nich równa jest $(a-\alpha_n)/n$, gdzie $\alpha_n\to 0$ przy $n\to\infty$. Pole

$$S_{k_n}=\frac{\pi(a-\alpha_n)^2}{4n^2}(n+(n-1)+\ldots+1)=\frac{1+n}{2}\cdot\frac{\pi(a-\alpha_n)^2}{4n}.$$

Jeżeli $n\to\infty$, to $S_{k_n}\to\frac{1}{8}\pi a^2$, a $\dfrac{S_{k_n}}{S}\to\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

2.93. Wzdłuż boku a leży n okręgów. Wtedy średnica każdego z nich równa jest a/n, a suma pól wszystkich okręgów

$$S_{k_n}=\pi\left(\frac{a}{2n}\right)^2\cdot n\left(\frac{b-\beta_n}{a/n}\right)=\frac{\pi a(b-\beta_n)}{4},$$

gdzie $\beta_n\to 0$ przy $n\to\infty$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{k_n}}{S}=\frac{1}{4}\pi$.

2.94. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=3d$. **2.95.** $\lim\limits_{n\to\infty}AP_n=\frac{1}{3}$.

2.96. $Q_t^{(n)}=Q_0\left(1+\dfrac{kt}{n}\right)^n$, gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności; $Q_t=Q_0\,e^{kt}$.

DO ROZDZIAŁU III

3.21. $S=1$. **3.22.** $S=1$. **3.23.** Rozbieżny. **3.24.** $S=\ln\frac{1}{3}$.

3.25. $S=1$ przy $x>0$; $S=-1$ przy $x<0$; $S=0$ przy $x=0$.

3.26. $2-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)}$; $S=1$. **3.27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$; $S=1$.

3.28. $-1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{n(n-1)}$; $S=0$.

3.29. Rozbieżny. **3.30.** Rozbieżny, gdyż nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregów: ogólny wyraz dąży tutaj do 1. **3.31.** Zbieżny, bo $\log n<n$, a więc $\dfrac{\log n}{n^3}<\dfrac{1}{n^2}$. **3.32.** Zbieżny $\left(\text{porównać z szeregiem } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\right)$. **3.33.** Bezwzględnie zbieżny, gdyż $|\sin 3^n|<1$, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ jest zbieżny. **3.34.** Zbieżny. **3.35.** Rozbieżny (kryterium d'Alemberta). **3.36.** Rozbieżny. **3.37.** Zbieżny. **3.38.** Zbieżny.