

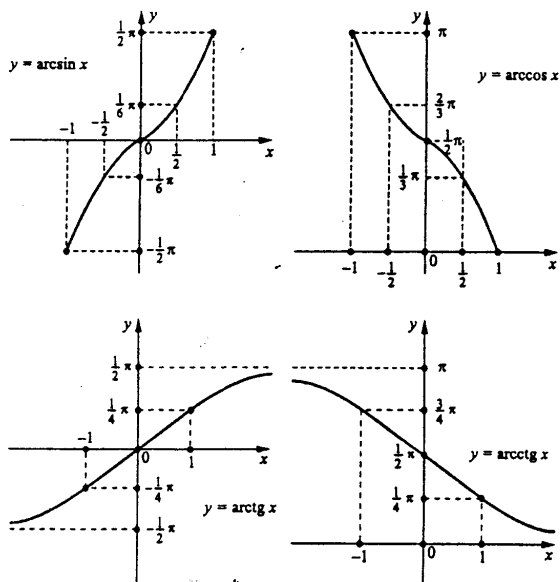
i

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{dla } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Podobne wzory można napisać i dla pozostałych funkcji cyklotometrycznych. Czytelnik zastanowi się nad następującymi równościami

$$\arcsin(\sin 0) = 0, \quad \arcsin(\sin 4\pi) = 0.$$

Wiele innych wzorów dotyczących funkcji cyklotometrycznych można znaleźć w [1].



Rys. 1.3

Zadania

Zadania

1. Czemu są równe iloczyny:

- $([-1, 1] \times [-2, 2]) \cap ([-2, 2] \times [-1, 1])$,
- $([-1, 1] \times [-2, 2]) \cap ([0, 2] \times [-4, 0])$,
- $([-1, 1] \times [-2, 2]) \cap ([0, 1] \times [3, 4])$?

2. Podać kresy zbiorów:

- $A = (1, 7)$, b) $A = [1, 3)$, c) $A = [1, 7]$.

3. Podać kresy zbiorów $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$, jeżeli:

- $A = [-1, 5]$, $B = [0, 3]$, b) $A = [-1, 5]$, $B = [4, 10]$,
- $A = (-2, -7)$, $B = (9, 10)$.

4. Zbadać, czy podane niżej zbiory mają kresy (jeżeli tak, to jakie?):

- zbiór liczb naturalnych N ,
- zbiór liczb całkowitych Z ,
- zbiór liczb dodatnich R_+ ,
- zbiór liczb nieujemnych \bar{R}_+ .

$$e) A = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in N, p < q \right\}, \quad f) B = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in N, p > q \right\}.$$

5. Czy istnieją $x \in R$, dla których podane niżej wyrażenia mają sens i jeżeli tak to podać jakie:

- $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$,
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,
- $\frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x-1}}$,
- $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x-1}}$,
- $\arcsin 2^x$,
- $\frac{\ln(4-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$,
- $\ln(4-x^2-y^2) + \sqrt{x^2+y^2-4}$?

6. Jaki jest obraz $f(A)$, jeżeli:

- $A = (-1, 1)$, $f(x) = x^2$,
- $A = \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $f(x) = 1 + \cos x$,

- $A = \{x \in R, 6x \in N\}$, $f(x) = 12x$?

7. Czy podane niżej odwzorowania f są bijekcjami?

- $f(x) = 2x - 7$, $x \in R$,
- $f(x) = 7$, $x \in R$,
- $f(x) = x^2$, $x \in R$,
- $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$,
- $f(x) = \sin x$, gdy $f : R \rightarrow [-1, 1]$,
- $f(x) = \sin x$, gdy $f : (0, \pi) \rightarrow [-1, 1]$,

$$g) f(x) = \sin x, \text{ gdy } f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1],$$

$$h) f(x) = \sin x, \text{ gdy } f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1].$$

8. Podać funkcje odwrotne (jeżeli istnieją) dla funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^3}$, $x \in (-\infty, 1]$, b) $f(x) = 2x - 3$, $x \in R$,

c) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, d) $f(x) = \cos x$, $x \in [-\pi, 0]$,

e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in Q \setminus \{0\}$, f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$,

g) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, 0]$, h) $f(x) = 5$, $x \in R$.

9. Czy dla każdego $x \in R$ prawdziwa jest równość $\arcsin(\sin x) = x$?

10. Jakie funkcje składają się na złożone:

a) $y = 2^{\sin x}$, $x \in R$, b) $y = 1 + 2^{\cos x}$, $x \in R$,

c) $y = \sqrt{1+3x^2}$, $x \in R$?

Odpowiedzi

1.

a) $[-1, 1] \times [-1, 1]$, b) $[0, 1] \times [-2, 0]$, c) zbiór pusty.

2.

a) $\inf A = 1$, $\sup A = 7$, b) $\inf A = 1$, $\sup A = 3$,

c) $\inf A = 1$, $\sup A = 7$.

3.

a) $\inf A \cup B = -1$, $\sup A \cup B = 5$, $\inf A \cap B = 0$, $\sup A \cap B = 3$,
 $\inf A \setminus B = -1$, $\sup A \setminus B = 5$,

b) $\inf A \cup B = -1$, $\sup A \cup B = 10$, $\inf A \cap B = 4$, $\sup A \cap B = 5$,
 $\inf A \setminus B = -1$, $\sup A \setminus B = 4$,

c) $\inf A \cup B = -2$, $\sup A \cup B = 10$, $A \cap B$ jest zbiorem pustym, $\inf A \setminus B = -2$, $\sup A \setminus B = 7$.

4.

a) $\inf N = 1$, supremum nie istnieje,

b) infimum i supremum nie istnieją,

c) $\inf R_+ = 0$, supremum nie istnieje,

d) $\inf \bar{R}_+ = 0$, supremum nie istnieje,

e) $\inf A = 0$, $\sup A = 1$,

f) $\inf B = 1$, supremum nie istnieje.

5.

Odpowiedzi

6.

a) $f(A) = [0, 1]$, b) $\left(\frac{3}{2}, 2\right]$,

c) zbiór liczb parzystych nie mniejszych niż 2.

7.

a) tak, b) nie, c) nie, d) tak,

e) nie, f) nie, g) tak, h) tak.

8.

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$, $x \in [0, \infty)$, b) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$,

c) $f^{-1}(x) = \pi + \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$,

d) $f^{-1}(x) = -\pi + \arccos x$, $x \in [-1, 1]$,

e) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $x \in Q \setminus \{0\}$, f) funkcja nie ma funkcji odwrotnej.

g) $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $x \in (0, 1]$, h) funkcja nie ma funkcji odwrotnej.

9. Nie, jedynie dla $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

10.

a) $u = \sin x$, $y = 2^u$, b) $u = \cos x$, $v = 2^u$, $y = 1 + u$,

c) $u = x^2$, $v = 3u$, $z = v + 1$, $y = \sqrt{z}$.