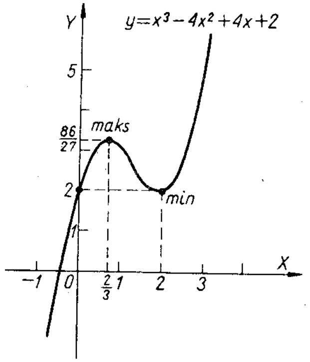
Tabl. 65-1

x	$x<\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}<x<2$	2	$2<x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ ↗	maks. $\frac{86}{27}$	↘	2 min.	↗ ∞



Rys. 65-1

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji (65.3) jest suma przedziałów:

$$(-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$$

Obliczamy granice:

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x\to-1-} y = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+} y = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} y = \infty$$

Następnie obliczamy pochodną:

$$y' = \frac{2x\cdot(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty$ [illegible] i w przedziale $(0; \infty)$, natomiast pochodna jest ujemna, więc funkcja jest [illegible]jąca w przedziale $(-2; -1)$ i w przedziale $(-1; 0)$.

W punktach -2 i 0 funkcja ma ekstrema: maksimum $f(-2) = -4$ i mini[illegible] $f(0) = 0$.

Wyniki obliczeń wpisujemy do tabelki i sporządzamy wykres. Ponieważ [illegible] badaną można zapisać w postaci

$$y = x-1+\frac{1}{x+1} \qquad \text{[illegible]}$$

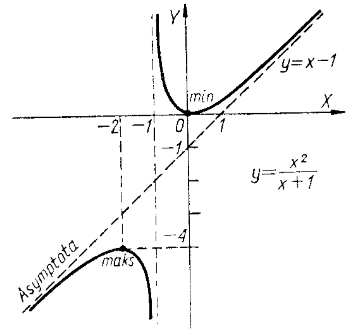
sumy dwóch składników, z których drugi $\frac{1}{x+1}$ dąży do 0, gdy $x\to-\infty$ lub [illegible]

$\to +\infty$, więc dla x o dużej wartości bezwzględnej pierwszy składnik $x-1$ przedstawia w przybliżeniu funkcję (65.3). Wykres tego składnika przedstawia prostą o równaniu $y = x-1$, która nazywa się *asymptotą* krzywej (65.3).

Odp. Tabl. 65-2 i rys. 65-2.

Tabl. 65-2

x	$x<-2$	-2	$-2<x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x$
y'	$+$	0	$-$	╳	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ ↗	maks. -4	↘ $-\infty$	╳	∞ ↘	0 min.	↗ ∞



Rys. 65-2

Pytania i zadania

1. Wymienić czynności, które składają się na badanie funkcji.
2*. Zbadać funkcje:

a) $y=1-2x-x^2$, b) $y=x^2\cdot(x-3)$, c) $y=2x^3+3x^2-12x+5$,

d) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, e) $y=(x-3)\sqrt{x}$, f) $y=\dfrac{16}{x(4-x^2)}$,

g) $y=x+\dfrac{1}{x}$, h) $y=x^2+|2-x|$.

66. Znajdowanie największej lub najmniejszej wartości funkcji w przedziale

Niech f oznacza funkcję ciągłą w przedzi[illegible] domkniętym $\langle a; b\rangle$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Wiemy, że funkcja f przyjmuje w tym przedziale wartość największą M i wartość najmniejszą m. Przypuśćmy, że chcemy znaleźć M lub m. Zauważmy, że jeśli funkcja f ma wartość M w punkcie wewnętrznym przedziału $\langle a; b\rangle$, to ma w tym punkcie maksimum. Wynika stąd, że wartością największą funkcji w przedziale $\langle a; b\rangle$ jest jej maksimum, albo $f(a)$, albo $f(b)$. W celu znalezienia wartości największej należy więc obliczyć maksima, wartość funkcji w punkcie a, wartość funkcji w punkcie b, a następnie wziąć największą spośród tych wszystkich liczb. Podobnie, w celu znalezienia wartości najmniejszej m należy obliczyć minima, $f(a)$ i $f(b)$, a następnie wziąć najmniejszą spośród tych wszystkich liczb.

Przykład*. Znaleźć największą oraz najmniejszą wartość funkcji

$$y = x + \frac{4}{x} - 3 \qquad (66.1)$$

w przedziale $\langle 1;\ 6\rangle$.

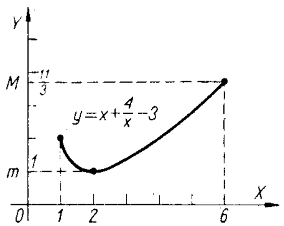
Rozwiązanie. Szukamy ekstremum funkcji (66.1)

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}\ ; \qquad y' = 0 \Leftrightarrow [(x = -2) \vee (x = 2)]$$

Liczba -2 nie interesuje nas, gdyż leży poza przedziałem $\langle 1; 6\rangle$. Dla $x = 2$ funkcja (66.1) ma minimum równe 1. Obliczamy ponadto $f(1) = 2$, oraz $f(6) = \frac{11}{3}$.

Odp. $M = \frac{11}{3}$, $m = 1$.

Rys. 66-1 ilustruje ostatni przykład.



Rys. 66-1

Przykład*. Zbadać, który z trójkątów równoramiennych o danym obwodzie ma największe pole.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x połowę długości podstawy trójkąta, przez $2p$ jego obwód, zaś przez S — pole.

Ponieważ $CD^2 = (p-x)^2 - x^2 = p^2 - 2px$, (rys. 66-2), więc

$$S = x \cdot CD = x\sqrt{p^2 - 2px}$$

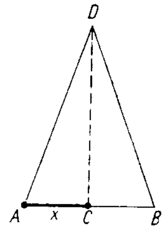
Stąd

$$S = \sqrt{p^2x^2 - 2px^3}$$

Z uwagi na treść przykładu zbadamy tę funkcję dla $0 < x < \frac{p}{2}$.

Znajdziemy ekstremum funkcji (66.2). Obliczamy pochodną

$$S' = \frac{px}{\sqrt{p^2x^2 - 2px^3}}(p - 3x)$$



Rys. 66-2

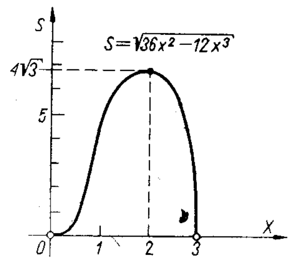
Wynika stąd, że w przedziale $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ pochodna S' ma tylko jeden punkt zerowy $x_0 = \frac{p}{3}$, przy czym w pewnym otoczeniu tego punktu $S' > 0$ gdy $x < \frac{p}{3}$ i $S' < 0$ gdy $x > \frac{p}{3}$. Funkcja (66.2) ma więc maksimum w punkcie x_0:

$$S_{maks} = \sqrt{p^2 \cdot \frac{p^2}{9} - 2p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$$

Ponieważ funkcja (66.2) jest rosnąca w przedziale $(0; x_0)$ i malejąca w przedziale $\left(x_0, \frac{p}{2}\right)$, więc znalezione maksimum jest największą wartością badanego pola.

Odp. $\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$.

Na rys. 66-3 wykreślona jest zależność (66.2) w przypadku, gdy $p = 6$.



Rys. 66-3

Przykład*. Na danym kole opisać trapez równoramienny o najmniejszym polu.

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rys. 66-4. Wyrazimy pole S trapezu za pomocą zmiennej x, którą jest połowa długości podstawy.

Ponieważ $AH = AE = GF$, oraz $DE = x$, więc

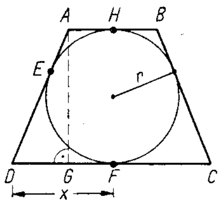
$$(x - AH)^2 + (2r)^2 = (x + AH)^2$$

Stąd $AH = \frac{r^2}{x}$, zatem

$$S = (AH+DF)\cdot AG = \left(\frac{r^2}{x}+x\right)\cdot 2r$$

czyli

$$S = 2r\left(x+\frac{r^2}{x}\right) \qquad (66.3)$$



Rys. 66-4

przy czym z uwagi na treść zadania $x > 0$. Znajdziemy ekstremum funkcji (66.3). Obliczamy pochodną

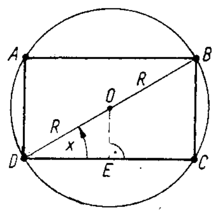
$$S' = 2r\left(1-\frac{r^2}{x^2}\right) \qquad (66.4)$$

Istnieje tylko jedna dodatnia wartość x, dla której pochodna (66.4) jest równa zeru, a mianowicie $x_0 = r$. Łatwo sprawdzić, że w punkcie x_0 funkcja (66.3) ma minimum $S_{\min} = 4r^2$. To minimum jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji (66.3) w rozpatrywanym przedziale $(0; \infty)$ ponieważ dla $x \in (0; r)$ funkcja (66.3) jest malejąca, zaś dla $x \in (r; \infty)$ — rosnąca. Dla $x = r$ trapez opisany na kole jest kwadratem.

Odp. Kwadrat o boku $2r$.

Przykład*. Zbadać zmienność objętości walca wpisanego w kulę o promieniu R.

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rys. 66-5. Wyrazimy objętość V walca za pomocą miary łukowej x kąta BDC.



Rys. 66-5

Ponieważ $BC = 2R\cdot\sin x$, oraz $DE = R\cos x$, więc

$$V = \pi(DE)^2\cdot BC = \pi\cdot R^2\cos^2 x\cdot 2R\sin x$$

czyli

$$V = \pi R^3 \sin 2x\cdot\cos x \qquad (66.5)$$

przy czym z uwagi na treść przykładu zbadamy tę funkcję dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Znajdziemy ekstremum funkcji (66.5). Obliczamy pochodną:

$$V' = \pi R^3(2\cos 2x\cdot\cos x - \sin 2x\cdot\sin x)$$

Stąd, po łatwych przekształceniach

$$V' = 2\pi R^3 \cos x(1-3\sin^2 x) \qquad (66.6)$$

Ponieważ dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ mamy $\cos x > 0$ i $\sin x > 0$, więc

$$V' = 0 \Leftrightarrow 1-3\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow (1-\sqrt{3}\sin x)(1+\sqrt{3}\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

W przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ istnieje zatem dokładnie jedna liczba x_0, dla której $V' = 0$, taka mianowicie, że $\sin x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. W punkcie x_0 funkcja (66.5) osiąga maksimum które jest największą wartością tej funkcji w przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ponieważ $\cos x_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, więc na podstawie wzoru (66.5) dostajemy

$$V_{\text{maks}} = \pi R^3\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$$

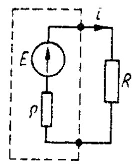
Odp. $V_{\text{maks}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Uwaga. Ostatni przykład można rozwiązać inaczej, przyjmując za zmienną x niewiadomą długość wysokości walca. Wówczas

$$V = \pi\left(R^2-\frac{x^2}{4}\right)\cdot x \qquad (66.7)$$

więc zadanie sprowadza się do znalezienia największej wartości funkcji (66.7) w przedziale $\langle 0; 2R\rangle$.

Przykład*. Bieguny ogniwa o sile elektromotorycznej E i oporności wewnętrznej ϱ (rys. 66-6) połączono przewodnikiem o oporności R. Zbadać, dla jakiej wartości R moc na tej oporności jest największa.



Rys. 66-6

Rozwiązanie. Z fizyki wiadomo, że moc M na oporności R, wynosi

$$M = Ri^2 = R\cdot\left(\frac{E}{\varrho+R}\right)^2$$

czyli

$$M = E^2 \frac{R}{(\varrho+R)^2} \tag{66.8}$$

Ta równość wyraża zależność mocy M od zmiennej oporności R, przy czym $0 < R < \infty$. Znajdziemy ekstremum funkcji (66.8). Obliczamy pochodną. Po wykonaniu łatwych rachunków dostajemy

$$M' = \frac{E^2}{(\varrho+R)^3}(\varrho-R) \tag{66.9}$$

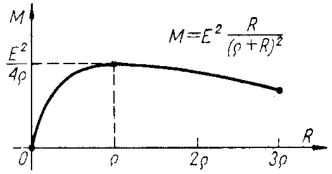
Ze wzoru (66.9) wynika, że funkcja (66.8) ma dla $R = \varrho$ maksimum, równe

$$M_{\text{maks}} = \frac{E^2}{4\varrho}$$

Znalezione maksimum jest największą wartością mocy (66.8) w przedziale $(0; \infty)$.

Odp. Dla $R = \varrho$; $M_{\text{maks}} = \dfrac{E^2}{4\varrho}$.

Rys. 66-7 ilustruje rozwiązany przykład.



Rys. 66-7

Pytania i zadania

1. Omówić metodę znajdowania najmniejszej lub największej wartości funkcji w przedziale.
2*. Znaleźć najmniejszą oraz największą wartość funkcji
   a) $y = \sqrt{x(10-x)}$ w przedziale $\langle 1; 8\rangle$,
   b) $y = x^3-2$ w przedziale $\langle -1; 2\rangle$,
   c) $y = \sin^4 x+\cos^4 x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$,
   d) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ w przedziale $\langle 0; 1\rangle$.
3*. Zbadać, który z trójkątów równoramiennych wpisanych w dany okrąg ma największe pole.
4*. Zbadać, który z prostokątów wpisanych w dany okrąg ma największy obwód.
5*. W dany stożek wpisać walec o największej objętości.
6*. Zbadać, który z prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i danej powierzchni całkowitej ma największą objętość.
7*. Na danym okręgu opisać trójkąt prostokątny o najmniejszej przeciwprostokątnej.
8*. Na danej kuli opisać stożek o najmniejszej objętości.

67. Interpolacja liniowa

Przypuśćmy, że funkcja f jest określona w przedziale $\langle x_1; x_2\rangle$ i że znamy jej wartości tylko na końcach tego przedziału: $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Nie znając wartości funkcji f w przedziale $(x_1; x_2)$ postępujemy niekiedy tak, że zastępujemy ją jakąś znaną funkcją, np. *funkcją liniową*, która w punktach x_1, x_2 ma wartości y_1, y_2 — równe wartościom funkcji f. Taka funkcja liniowa określona jest wzorem

$$y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \tag{67.1}$$

Niech $c \in (x_1; x_2)$. Wówczas nieznaną wartość $f(c)$ można zastąpić wartością funkcji liniowej (67.1) dla $x = c$, czyli liczbą

$$y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(c-x_1)$$

uważając ją za przybliżenie wartości $f(c)$

$$f(c) \approx y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(c-x_1) \tag{67.2}$$

Postępowanie takie nazywamy *interpolacją liniową*. Posługując się wzorem (67.2) należy pamiętać, że jest to wzór przybliżony. Pozostaje sprawą otwartą jak wielki jest błąd związany ze wzorem (67.2), tzn. jaka jest różnica między jego lewą i prawą stroną.

Z interpolacji liniowej korzystamy m.in. przy obliczaniu na podstawie tablic wartości funkcji dla argumentu zawartego między dwiema wartościami tablicowymi. Dla wielu funkcji stablicowanych, np. dla logarytmu, sinusa, cosinusa, tablice są zazwyczaj tak ułożone, żeby błąd interpolacji liniowej nie przekraczał jednostki ostatniego rzędu. Równość (67.1) zapisujemy zwykle tak

$$y-y_1 = \frac{\Delta}{h}(x-x_1) \tag{67.3}$$

przy czym używamy następujących nazw:

$\Delta = y_2-y_1$ — *różnica tablicowa*

$h = x_2-x_1$ — *skok tablicowy*

$\frac{\Delta}{h}\cdot(x-x_1)$ — *poprawka interpolacyjna*

Przykład. Obliczyć metodą interpolacji liniowej $\sin 0{,}183$, jeżeli $\sin 0{,}18 = 0{,}1790$ i $\sin 0{,}19 = 0{,}1889$.

Rozwiązanie. Mamy tu $x_1 = 0{,}18$; $x_2 = 0{,}19$; $y_1 = 0{,}1790$ i $y_2 = 0{,}1889$. Stąd różnica tablicowa: $\Delta = 0{,}1889-0{,}1790 = 0{,}0099$,
skok tablicowy: $h = 0{,}19-0{,}18 = 0{,}01$,
więc na podstawie wzoru (67.3) dostajemy

$$\sin 0{,}183-0{,}1790 = 0{,}99\cdot 0{,}003 = 0{,}00297 \approx 0{,}0030$$

Odp. $\sin 0{,}183 \approx 0{,}1820$.