

Kolokwium 1 – grupa 1.

- (1) Korzystając ze wzoru de Moivre’a obliczyć $\frac{(1+i\sqrt{3})^{76}}{(1-i)^{37}}$.

- (2) Obliczyć wyznacznik macierzy
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
 stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych.

- (3) Rozwiązać układ równań macierzowych
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- (4) Zbadać, czy zbiór $U = \{(a_1, a_2, \dots) : \forall i \geq 2 (a_{i+1} = a_i + a_{i-1})\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$.

- (5) Uzasadnić, że $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, gdzie $U_1 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, $U_2 = \text{Sol} \left(\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right)$.

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektorów z U_1 i U_2 .

Kolokwium 1 – grupa 2.

- (1) Korzystając ze wzoru de Moivre’a obliczyć $\frac{(1-i\sqrt{3})^{32}}{(1+i)^{17}}$.

- (2) Obliczyć wyznacznik macierzy
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
 stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych.

- (3) Rozwiązać układ równań macierzowych
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- (4) Zbadać, czy zbiór $U = \{(a_1, a_2, \dots) : \forall i \geq 2 [a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1})]\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$.

- (5) Uzasadnić, że $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, gdzie $U_1 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, $U_2 = \text{Sol} \left(\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \right)$.

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektorów z U_1 i U_2 .

Kolokwium 1 – grupa 3.

- (1) Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\frac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}$. Wynik zapisać jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- (2) Obliczyć wyznacznik macierzy
$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}$$
 stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych.

- (3) Rozwiązać układ równań macierzowych
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- (4) Zbadać, czy zbiór $U = \{[t, u, t + u, t - u] : t \leq u, t, u \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$.

- (5) Uzasadnić, że $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, gdzie $U_1 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, $U_2 = \text{Sol} \left(\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right)$.

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektorów z U_1 i U_2 .

Kolokwium 1 – grupa 4.

- (1) Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć $\frac{(1-i\sqrt{3})^{42}}{(-1+i)^{31}}$. Wynik zapisać jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- (2) Obliczyć wyznacznik macierzy
$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix}$$
 stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych.

- (3) Rozwiązać układ równań macierzowych
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- (4) Zbadać, czy zbiór $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0, t, u \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$.

- (5) Uzasadnić, że $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, gdzie $U_1 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, $U_2 = \text{Sol} \left(\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \right)$.

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektorów z U_1 i U_2 .

Kolokwium 1 – grupa 5.

- (1) Korzystając ze wzoru de Moivre’a obliczyć $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{36}}{(1+i)^{31}}$. Wynik zapisać jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- (2) Obliczyć wyznacznik macierzy
$$\begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}$$
 stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych.

- (3) Rozwiązać układ równań macierzowych
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- (4) Zbadać, czy zbiór wszystkich funkcji parzystych jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wszystkich funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z dodawaniem i mnożeniem zdefiniowanymi “po współrzędnych”.

- (5) Uzasadnić, że $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, gdzie $U_1 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, $U_2 = \text{Sol} \left(\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right)$.

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektorów z U_1 i U_2 .

Kolokwium 1 – grupa 6.

- (1) Korzystając ze wzoru de Moivre’a obliczyć $\frac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$. Wynik zapisać jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- (2) Obliczyć wyznacznik macierzy
$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$$
 stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych.

- (3) Rozwiązać układ równań macierzowych
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- (4) Zbadać, czy zbiór wszystkich funkcji nieparzystych jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wszystkich funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z dodawaniem i mnożeniem zdefiniowanymi “po współrzędnych”.

- (5) Uzasadnić, że $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, gdzie $U_1 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, $U_2 = \text{Sol} \left(\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \right)$.

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektorów z U_1 i U_2 .