

Sprawdzian 2

- (1) (a) Zestaw 1,3: Które operacje elementarne nie wpływają na rząd macierzy?
 Zestaw 2,4: Które operacje elementarne nie wpływają na wyznacznik macierzy?
 (b) Zestaw 1: Zacytować twierdzenie Laplace'a o rozwijaniu wyznacznika wzdłuż kolumny.
 Zestaw 2: Zacytować twierdzenie Laplace'a o rozwijaniu wyznacznika wzdłuż wiersza.
 Zestaw 3: Zacytować lemat o minorze bazowym.
 Zestaw 4: Zacytować twierdzenie Cauchy'ego o wyznacznikach.

- (2) Zestaw 1: Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}_2^2$ taką, że $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.
 Zestaw 2: Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}_2^2$ taką, że $A \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$.
 Zestaw 3: Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}_2^2$ taką, że $A \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}$.
 Zestaw 4: Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}_2^2$ taką, że $A \begin{bmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{bmatrix}$.

- (3) Zestaw 1: Udowodnić, że
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_3 & x_3 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & x_n \end{vmatrix} = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}).$$
- Zestaw 2: Udowodnić, że
$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_{n-1} & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_{n-1} & a_2 b_n \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_{n-1} & a_3 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 b_{n-1} & a_2 b_{n-1} & a_3 b_{n-1} & \dots & a_{n-1} b_{n-1} & a_{n-1} b_n \\ a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_{n-1} b_n & a_n b_n \end{vmatrix} = a_1 b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} b_k - a_k b_{k+1}).$$
- Zestaw 3: Udowodnić, że
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & c_2 & a_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - c_k).$$
- Zestaw 4: Udowodnić, że
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} & a^n \\ x_1 & 1 & a & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ x_2 & x_2 & 1 & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & 1 & a \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (1 - a x_k).$$

Rozwiązania

- (1) (a) Zestaw 1,3: Zamiana miejscami kolumn/wierszy, pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza, pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza i dodanie do drugiej kolumny/wiersza.
 Zestaw 2,4: Pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza i dodanie do drugiej kolumny/wiersza.
 (b) Zestaw 1: $\det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+i} a_{li} \det A_{li}$, $A = [a_{ij}] \in K_m^n$
 Zestaw 2: $\det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} \det A_{il}$, $A = [a_{ij}] \in K_m^n$
 Zestaw 3: $r(A) = s$ wtw. gdy $s = \max\{i \in \mathbb{N} : \text{istn. niezerowy minor mac. A stopnia i}\}$, $A \in K_m^n$
 Zestaw 4: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

- (2) Zestaw 1: Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Wtedy równość $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ prowadzi nas do układu równań:

$$\begin{cases} a + 3b = 5 \\ 2a + 4b = 6 \\ c + 3d = 7 \\ 2c + 4d = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 5 \\ -2b = -4 \\ c + 3d = 7 \\ -2d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ -d = 3 \end{cases}$$

Zestaw 2,3,4: Analogicznie.

(3) **Zestaw 1:** Odejmując pierwszy wiersz kolejno od następnych otrzymujemy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 - x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 - x_1 & x_3 - x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n - x_2 & x_n - x_3 & \dots & x_n - x_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

i rozwijając względem ostatniej kolumny dostajemy:

$$(-1)^{n+1} x_n \prod_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1})$$

Zestaw 2: Z pierwszego wiersza a_1 możemy wyciągnąć przed znak wyznacznika, po czym pierwszy wiersz mnożymy kolejno przez $a_2, a_3, \dots, a_n$ i odejmujemy odpowiednio od drugiego, trzeciego itd. ostatniego wiersza. W ten sposób otrzymujemy wyznacznik:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 & a_2 b_3 - a_3 b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_n - a_n b_1 & a_2 b_n - a_n b_2 & a_3 b_n - a_n b_3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

i rozwijając względem ostatniej kolumny dostajemy:

$$a_1 b_n (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k) = a_1 b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} b_k - a_k b_{k+1})$$

Zestaw 3: Z ostatniej kolumny b_n możemy wyciągnąć przed znak wyznacznika, po czym odejmując ostatni wiersz kolejno od poprzednich, otrzymujemy wyznacznik:

$$b_n \begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_2 - c_2 & \dots & b_{n-1} - c_{n-1} & 0 \\ 0 & a_2 - c_2 & \dots & b_{n-1} - c_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} - c_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

i rozwijając względem ostatniej kolumny dostajemy $b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - c_k)$.

Zestaw 4: Odejmując od pierwszego wiersza drugi pomnożony przez a , od drugiego wiersza trzeci pomnożony przez a itd. otrzymujemy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 - ax_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 - ax_2 & 1 - ax_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 - ax_3 & x_2 - ax_3 & 1 - ax_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - ax_n & x_{n-1} - ax_n & x_{n-1} - ax_n & \dots & 1 - ax_n & 0 \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

i rozwijając względem ostatniej kolumny dostajemy $\prod_{k=1}^n (1 - ax_k)$.

Sprawdzian 2

- (1) (a) **Zestaw 1:** Które operacje elementarne nie wpływają na rząd macierzy?
Zestaw 2: Które operacje elementarne nie wpływają na wyznacznik macierzy?
- (b) **Zestaw 1:** Zacytować twierdzenie Laplace'a o rozwijaniu wyznacznika wzdłuż kolumny.
Zestaw 2: Zacytować twierdzenie Laplace'a o rozwijaniu wyznacznika wzdłuż wiersza.
- (2) **Zestaw 1:** Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}_2^2$ taką, że $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.
Zestaw 2: Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}_2^2$ taką, że $A \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$.

(3) **Zestaw 1:** Udowodnić, że

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_3 & x_3 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & x_n \end{vmatrix} = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}).$$

Zestaw 2: Udowodnić, że

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_{n-1} & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_{n-1} & a_2 b_n \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_{n-1} & a_3 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 b_{n-1} & a_2 b_{n-1} & a_3 b_{n-1} & \dots & a_{n-1} b_{n-1} & a_{n-1} b_n \\ a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_{n-1} b_n & a_n b_n \end{vmatrix} = a_1 b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} b_k - a_k b_{k+1}).$$

Rozwiązania

- (1) (a) **Zestaw 1:** Zamiana miejscami kolumn/wierszy, pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza, pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza i dodanie do drugiej kolumny/wiersza.
Zestaw 2: Pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza i dodanie do drugiej kolumny/wiersza.
- (b) **Zestaw 1:** $\det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+i} a_{li} \det A_{li}$, $A = [a_{ij}] \in K_n^n$
Zestaw 2: $\det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} \det A_{il}$, $A = [a_{ij}] \in K_n^n$
- (2) **Zestaw 1:** Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Wtedy równość $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ prowadzi nas do układu równań:

$$\begin{cases} a + 3b = 5 \\ 2a + 4b = 6 \\ c + 3d = 7 \\ 2c + 4d = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 5 \\ -2b = -4 \\ c + 3d = 7 \\ -2d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ -d = 3 \end{cases}$$

Zestaw 2: Analogicznie.

- (3) **Zestaw 1:** Odejmując pierwszy wiersz kolejno od następnych otrzymujemy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 - x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 - x_1 & x_3 - x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n - x_2 & x_n - x_3 & \dots & x_n - x_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

i rozwijając względem ostatniej kolumny dostajemy $(-1)^{n+1} x_n \prod_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1})$.

Zestaw 2: Z pierwszego wiersza a_1 możemy wyciągnąć przed znak wyznacznika, po czym pierwszy wiersz mnożymy kolejno przez $a_2, a_3, \dots, a_n$ i odejmujemy odpowiednio od drugiego, trzeciego itd. ostatniego wiersza. W ten sposób otrzymujemy wyznacznik:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 & a_2 b_3 - a_3 b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_n - a_n b_1 & a_2 b_n - a_n b_2 & a_3 b_n - a_n b_3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

i rozwijając względem ostatniej kolumny dostajemy $a_1 b_n (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k) = a_1 b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} b_k - a_k b_{k+1})$.

Sprawdzian 2

- (1) (a) Zestaw 3: Które operacje elementarne nie wpływają na rząd macierzy?
 Zestaw 4: Które operacje elementarne nie wpływają na wyznacznik macierzy?
 (b) Zestaw 3: Zacytować lemat o minorze bazowym.
 Zestaw 4: Zacytować twierdzenie Cauchy'ego o wyznacznikach.
- (2) Zestaw 3: Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}_2^2$ taką, że $A \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}$.
 Zestaw 4: Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}_2^2$ taką, że $A \begin{bmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{bmatrix}$.

(3) Zestaw 3: Udowodnić, że

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & c_2 & a_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - c_k).$$

Zestaw 4: Udowodnić, że

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} & a^n \\ x_1 & 1 & a & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ x_2 & x_2 & 1 & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & 1 & a \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (1 - ax_k).$$

Rozwiązania

- (1) (a) Zestaw 3: Zamiana miejscami kolumn/wierszy, pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza, pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza i dodanie do drugiej kolumny/wiersza.
 Zestaw 4: Pomnożenie przez skalar kolumny/wiersza i dodanie do drugiej kolumny/wiersza.
 (b) Zestaw 3: $r(A) = s$ wtw. gdy $s = \max\{i \in \mathbb{N} : \text{istn. niezerowy minor mac. } A \text{ stopnia } i\}$, $A \in K_m^n$
 Zestaw 4: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- (2) Zestaw 3: Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Wtedy równość $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}$ prowadzi nas do układu równań:

$$\begin{cases} 13a + 15b = 17 \\ 14a + 16b = 18 \\ 13c + 15d = 19 \\ 14c + 16d = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a + 15b = 17 \\ a + b = 1 \\ 13c + 15d = 19 \\ c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 2b = 4 \\ c + d = 1 \\ 2d = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -2 \\ d = 3 \end{cases}$$

Zestaw 4: Analogicznie.

- (3) Zestaw 3: Z ostatniej kolumny b_n możemy wyciągnąć przed znak wyznacznika, po czym odejmując ostatni wiersz kolejno od poprzednich, otrzymujemy wyznacznik:

$$b_n \begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_2 - c_2 & \dots & b_{n-1} - c_{n-1} & 0 \\ 0 & a_2 - c_2 & \dots & b_{n-1} - c_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} - c_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

i rozwijając względem ostatniej kolumny dostajemy $b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - c_k)$.

Zestaw 4: Odejmując od pierwszego wiersza drugi pomnożony przez a , od drugiego wiersza trzeci pomnożony przez a itd. otrzymujemy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 - ax_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 - ax_2 & 1 - ax_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 - ax_3 & x_2 - ax_3 & 1 - ax_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - ax_n & x_{n-1} - ax_n & x_{n-1} - ax_n & \dots & 1 - ax_n & 0 \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

i rozwijając względem ostatniej kolumny dostajemy $\prod_{k=1}^n (1 - ax_k)$.