

Sprawdzian 1

1. Zestaw 1: Wyjaśnij oznaczenie K^∞ .
 Zestaw 2: Wyjaśnij oznaczenie $\mathbb{C}_\mathbb{C}$.
 Zestaw 3: Wyjaśnij oznaczenie $K[X]_n$.
 Zestaw 4: Wyjaśnij oznaczenie $\mathbb{C}_\mathbb{R}$.
 Zestaw 5: Czy suma podprzestrzeni jest zawsze podprzestrzenią?
 Zestaw 6: Czy podprzestrzeń przestrzeni liniowej jest zawsze przestrzenią liniową?
 Zestaw 7: Co można ciekawego (z punktu widzenia algebry liniowej) powiedzieć o zbiorze rozwiązań równania jednorodnego?
 Zestaw 8: Czy każda przestrzeń wektorowa ma jakąś podprzestrzeń?
 2. Zestaw 1: Niech K będzie ciałem. Na zbiorze $K^K = \{f : K \rightarrow K : f \text{ jest funkcją}\}$ definiujemy:

$$\cdot : K \times K^K \rightarrow K^K, (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x), \quad + : K^K \times K^K \rightarrow K^K, (f + g)(x) = f(g(x)).$$

Wyjaśnij, dlaczego $(K^K, K, \text{const}0, +, \cdot)$ nie jest przestrzenią liniową.

Zestaw 2: Niech K będzie ciałem. Na zbiorze $K^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in K \right\}$ definiujemy:

$$\cdot : K \times K^2 \rightarrow K^2, a \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}, \quad + : K^2 \times K^2 \rightarrow K^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}.$$

Wyjaśnij, dlaczego $(K^2, K, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, +, \cdot)$ nie jest przestrzenią liniową.

Zestaw 3: Na zbiorze $\mathbb{R}$ definiujemy:

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \cdot b = ab, \quad + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a + b = \frac{a+b}{2}.$$

Wyjaśnij, dlaczego $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, 0, +, \cdot)$ nie jest przestrzenią liniową.

Zestaw 4: Niech K będzie ciałem. Na zbiorze $K^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in K \right\}$ definiujemy:

$$\cdot : K \times K^2 \rightarrow K^2, a \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}, \quad + : K^2 \times K^2 \rightarrow K^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}.$$

Wyjaśnij, dlaczego $(K^2, K, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, +, \cdot)$ nie jest przestrzenią liniową.

Zestaw 5: Na zbiorze $D(3)$ izometrii własnych trójkąta definiujemy:

$$\cdot : \mathbb{Z}_2 \times D(3) \rightarrow D(3), 0 \cdot f = id_{D(3)}, 1 \cdot f = f, \quad + : D(3) \times D(3) \rightarrow D(3), (f + g) = f \circ g.$$

Wyjaśnij, dlaczego $(D(3), \mathbb{Z}_2, id_{D(3)}, +, \cdot)$ nie jest przestrzenią wektorową.

Zestaw 6: Niech K będzie ciałem. Na zbiorze $K^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in K \right\}$ definiujemy:

$$\cdot : K \times K^2 \rightarrow K^2, a \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}, \quad + : K^2 \times K^2 \rightarrow K^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Wyjaśnij, dlaczego $(K^2, K, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, +, \cdot)$ nie jest przestrzenią liniową.

Zestaw 7: Na zbiorze $\mathbb{R}$ definiujemy:

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \cdot b = ab, \quad + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a + b = a - b.$$

Wyjaśnij, dlaczego $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, 0, +, \cdot)$ nie jest przestrzenią liniową.

Zestaw 8: Niech K będzie ciałem. Na zbiorze $K^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in K \right\}$ definiujemy:

$$\cdot : K \times K^2 \rightarrow K^2, a \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}, \quad + : K^2 \times K^2 \rightarrow K^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Wyjaśnij, dlaczego $(K^2, K, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, +, \cdot)$ nie jest przestrzenią liniową.

3. Zestaw 1, 3: Wykazać, że w przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$ zbiór ciągów spełniających **warunek Cauchy'ego**:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n, k > N} |a_n - a_k| < \epsilon$$

tworzy podprzestrzeń.

Zestaw 2, 4: Prawdziwa jest następująca **nierówność Höldera**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}.$$

Wykazać, że w przestrzeni $\mathbb{R}^{\infty}$ zbiór ciągów spełniających **warunek Hilberta**:

$$\text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \text{ jest zbieżny}$$

tworzy podprzestrzeń.

Zestaw 5, 7: Udowodnij, że zbiór wielomianów, dla których $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem jednokrotnym nie jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}[X]$.

Zestaw 6, 8: Udowodnij, że jeśli $A = \{s, t\}$ jest zbiorem dwuelementowym, to funkcje przyjmujące wartość $a \in K$ w danym punkcie $s \in A$ nie tworzą podprzestrzeni przestrzeni K^A , gdzie K jest ciałem.

Rozwiązania

- Zestaw 1: K^{∞} - przestrzeń wszystkich ciągów nieskończonych elementów ciała K .

Zestaw 2: $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ - przestrzeń liczb zespolonych nad ciałem liczb zespolonych.

Zestaw 3: $K[X]_n$ - przestrzeń wielomianów nad ciałem K stopnia co najwyżej n .

Zestaw 4: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ - przestrzeń liczb zespolonych nad ciałem liczb rzeczywistych.

Zestaw 5: Nie; tylko gdy podprzestrzenie te tworzą łańcuch.

Zestaw 6: Tak.

Zestaw 7: Na przykład to, że tworzy podprzestrzeń liniową.

Zestaw 8: Tak - nawet dwie: samą siebie i wektor zerowy.
- Zestaw 1: Tak zdefiniowane dodawanie nie jest - na przykład - przemienne; weźmy $f = \text{const}1$, $g = \text{const}0$. Wtedy $(f + g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 1$ ale $(g + f)(x) = g(f(x)) = g(1) = 0$.

Zestaw 2: Tak zdefiniowane dodawanie nie jest - na przykład - przemienne; weźmy $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Wtedy $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ale $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Zestaw 3: Tak zdefiniowane dodawanie nie jest - na przykład - łączne; weźmy $a = 1, b = 2, c = 3$. Wtedy $a + (b + c) = \frac{1 + \frac{2+3}{2}}{2} = \frac{7}{4}$ ale $(a + b) + c = \frac{\frac{1+2}{2} + 3}{2} = \frac{9}{4}$.

Zestaw 4: Działanie + nie jest - na przykład - dobrze określone, gdyż nie można dodać wektora zerowego.

Zestaw 5: Tak zdefiniowane dodawanie nie jest - na przykład - przemienne; obroty nie są przemienne z symetrami.

Zestaw 6: Tak zdefiniowane dodawanie nie jest - na przykład - przemienne; weźmy $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Wtedy $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ale $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Zestaw 7: Tak zdefiniowane działanie nie jest - na przykład - przemienne; weźmy $a = 1, b = 2$. Wtedy $a + b = 1 - 2 = -1$ ale $b + a = 2 - 1 = 1$.

Zestaw 8: Tak zdefiniowane dodawanie nie jest - na przykład - przemienne; weźmy $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Wtedy $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ale $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- Zestaw 1, 3: Ustalmy rzeczywiste ciągi Cauchy'ego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i skalar $a \in \mathbb{R}$. Niech $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ będą takie, że:

$$n, k > N_1 \Rightarrow |x_n - x_k| < \frac{\epsilon}{2}, \quad n, k > N_2 \Rightarrow |y_n - y_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wówczas dla $n, k > \max\{N_1, N_2\}$ mamy:

$$|(x_n + y_n) - (x_k + y_k)| \leq |x_n - x_k| + |y_n - y_k| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

więc $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Podobnie, gdy $N \in \mathbb{N}$ jest takie, że dla $n, k > N$ $|x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{|a|}$, to dla $n, k > N$ mamy również:

$$|a \cdot x_n - a \cdot x_k| = |a| |x_n - y_n| < |a| \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

więc $(ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Zestaw 2, 4: Ustalmy rzeczywiste ciągi Hilberta $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i skalar $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$. Na podstawie nierówności Höldera:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 + 2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2} < \infty \end{aligned}$$

więc $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Hilberta. Podobnie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |ax_n|^2 = |a|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

więc $(ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Hilberta.

Zestaw 5, 7: Zbiór ten nie jest zamknięty na dodawanie; weźmy dla przykładu $a = 2$ oraz $\frac{1}{2}(X-2)(X-1)$, $\frac{1}{2}(X-2)(X-3)$ dla których 2 jest pierwiastkiem jednokrotnym. Wtedy:

$$\frac{1}{2}(X-2)(X-1) + \frac{1}{2}(X-2)(X-3) = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 2 + X^2 - 5X + 6) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$$

jest wielomianem, dla którego 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Zestaw 6, 8: Zbiór ten nie jest zamknięty na dodawanie, weźmy dla przykładu f, g takie, że $f(s) = a$, $f(t) = 0$, $g(s) = a$, $g(t) = 1$. Wtedy $(f+g)(s) = f(s) + g(s) = a + a \neq a$.