

Kolokwium 2

- (1) **Zestaw 1, 3:** (a) Niech K będzie ciałem, V, W przestrzeniami wektorowymi nad K , $\phi \in L(V, W)$. Pod jakimi założeniami prawdziwy jest wzór: $\dim V = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{im} \phi$?

- (b) Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K , $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bazami V , $\mathcal{C}$ macierzą przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ bazami W , D macierzą przejścia od $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$, $\phi \in L(V, W)$, A niech będzie macierzą ϕ w $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$, B macierzą ϕ w $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$. Jaki jest związek między A, B, C i D ?

Zestaw 2, 4: (a) Niech K będzie ciałem, V, W przestrzeniami wektorowymi nad K , $\phi \in L(V, W)$. Pod jakimi założeniami prawdziwe jest twierdzenie: ϕ - surjekcja $\implies \phi$ - iniekcja?

- (b) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K , $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bazami V , C macierzą przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, $\phi \in \operatorname{End}(V)$, A niech będzie macierzą ϕ w $\mathcal{A}$, B macierzą ϕ w $\mathcal{B}$. Jaki jest związek między A, B i C ?

- (2) **Zestaw 1:** Wiadomo, że liczby 2346, 2533, 3570 i 5151 dzielą się przez 17. Udowodnić, że wartość wyznacznika macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 1 \\ e & f & g & h & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{również dzieli się przez 17.}$$

Zestaw 2: Wiadomo, że liczby 2679, 3154, 4218 i 9519 dzielą się przez 19. Udowodnić, że wartość wyznacznika macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 2 & 6 & 7 & 9 \\ c & d & 3 & 1 & 5 & 4 \\ e & f & 4 & 2 & 1 & 8 \\ g & h & 9 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{również dzieli się przez 19.}$$

Zestaw 3: Pokazać, że jeśli $A^m = 0$, to macierz $I + A$ jest odwracalna. Wyznaczyć $(I + A)^{-1}$.

Zestaw 4: Niech $A, B \in K_n^n$ i niech $I + AB$ będzie odwracalna.

- (a) Obliczyć $(I + BA)(I - B(I + AB)^{-1}A)$.

- (b) Udowodnić **lemat Vassersteina**: Jeśli $I + AB$ jest odwracalna, to $I + BA$ też.

- (3) **Zestaw 1,3:** Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Zestaw 2,4: Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

- (4) **Zestaw 1:** Wyznaczyć obraz $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ poprzez przekształcenie $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ dane wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.

Zestaw 2: Wyznaczyć obraz $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ poprzez przekształcenie $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ dane wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.

Zestaw 3: Wyznaczyć przeciwobraz $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ poprzez przekształcenie $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ dane wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.

Zestaw 4: Wyznaczyć przeciwobraz $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ poprzez przekształcenie $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ dane wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.

- (5) **Zestaw 1:** Wyznaczyć macierz symetrii $\mathbb{R}^2$ względem $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ i wzdłuż $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ w bazach $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz (ϵ_1, ϵ_2) .

Zestaw 2: Wyznaczyć macierz rzutu $\mathbb{R}^2$ na $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ i wzdłuż $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ w bazach $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz (ϵ_1, ϵ_2) .

Zestaw 3: Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, Jeżeli tak, podać przykład takiego odwzorowania.

Zestaw 4: Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, Jeżeli tak, podać przykład takiego odwzorowania.

(6) **Zestaw 1, 3:** Przekształcenie liniowe $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ ma względem baz (ϵ_1, ϵ_2) oraz $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Znaleźć

macierz tego przekształcenie w bazach $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Zestaw 2, 4: Endomorfizm $\phi \in K^3$ ma w bazie epsilonowej macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz tego przekształcenie w

bazie $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Rozwiązania

(1) **Zestaw 1, 3:** (a) $\dim V < \infty$
(b) $B = D^{-1}AC$

Zestaw 2, 4: (a) $\dim V = \dim W < \infty$
(b) $B = C^{-1}AC$

(2) **Zestaw 1:** Korzystając z twierdzenia o wyznaczniku macierzy klatkowej:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 1 \\ e & f & g & h & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Mnożąc pierwszą kolumnę przez 1000 i dodając do ostatniej, następnie mnożąc drugą kolumnę przez 100 i dodając do ostatniej itd. dostajemy:

$$\det A = -\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2346 \\ 2 & 5 & 3 & 2533 \\ 3 & 5 & 7 & 3570 \\ 5 & 1 & 5 & 5151 \end{bmatrix}$$

Następnie rozwijamy macierz względem ostatniej kolumny i dostajemy kombinację liczb 2346, 2533, 3570 i 5151 ze współczynnikami całkowitymi (wyznacznik macierzy o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą), można więc 17 „wyciągnąć przed nawias”.

Zestaw 2: Tak samo jak w zestawie 1, ale z wykorzystaniem tożsamości $\det \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{nm} \det A \cdot \det B$, $A \in K_n^n$, $B \in K_M^m$.

Zestaw 3: Indukcyjnie łatwo sprawdzić, że $(I + A)(I - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^m - 1A^{m-1}) = I - A^m$. Skoro $A^m = 0$, to mamy stąd, że $(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^m - 1A^{m-1}$.

Zestaw 4: (a) Mamy:

$$\begin{aligned} (I + BA)(I - B(I + AB)^{-1}A) &= I - B(I + AB)^{-1}A + BA - BAB(I + AB)^{-1}A = \\ &= I - B(I + AB)^{-1}A + B(I + AB)(I + AB)^{-1}A - BAB(I + AB)^{-1}A = \\ &= I + [-BB(I + AB) - BAB](I + AB)^{-1}A = I + 0 = I \end{aligned}$$

(b) Wynika natychmiast z (a).

(3) Zestaw 1,3: Mamy:

$$\begin{aligned} \text{Sol}(U) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{cases} x = 1 + a \\ y = 2 - a \\ z = 3 - 3a \\ t = 4 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = a \\ y = 2 - x + 1 \\ z = 3 - 3x + 3 \\ t = 4 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + z = 6 \\ x + t = 5 \end{cases}$$

Zestaw 2,4: Mamy:

$$\begin{aligned} \text{Sol}(U) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{cases} x = a \\ y = 1 + a \\ z = 2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 1 + x \\ z = 2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

(4) Zestaw 1: Ponieważ $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, więc $\phi \left(\text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Zestaw 2: Ponieważ $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, więc $\phi \left(\text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$.

Zestaw 3: Mamy:

$$\phi^{-1} \left(\text{lin} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left\{ : \bigvee_{a \in K} \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \bigvee_{a \in K} \begin{cases} 2x + 3y = 2a \\ x - y = a \\ 3y = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \bigvee_{a \in K} \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Zestaw 4: Mamy:

$$\phi^{-1} \left(\text{lin} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left\{ : \bigvee_{a \in K} \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \bigvee_{a \in K} \begin{cases} 2x + 3y = 4a \\ x - y = 2a \\ 3y = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \bigvee_{a \in K} \begin{cases} x = 2a \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

(5) Zestaw 1: Bez trudu sprawdzamy, że $\mathbb{R}^2 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \oplus \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Wyznaczamy rozkład dowolnego wektora na składniki z sumy prostej:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \end{cases}$$

Zatem oznaczając stosowną symetrię przez σ mamy:

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \sigma \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (y - 2x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (y - 2x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3x - y \end{bmatrix}$$

Jako że bazą przeciwdziedziny jest baza kanoniczna, kolumnami macierzy odwzorowania σ są wartości tego odwzorowania na wektorach bazowych $\sigma \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\sigma \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Szukaną macierzą jest zatem $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Zestaw 2: Bez trudu sprawdzamy, że $\mathbb{R}^2 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \oplus \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Wyznaczamy rozkład dowolnego wektora na składniki z sumy prostej:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \end{cases}$$

Zatem oznaczając stosowny rzut przez π mamy:

$$\pi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \pi\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (y-2x)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Jako że bazą przeciwdziedziny jest baza kanoniczna, kolumnami macierzy odwzorowania π są wartości tego odwzorowania na wektorach bazowych $\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Szukaną macierzą jest zatem $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Zestaw 3: Łatwo sprawdzamy, że stosowne przekształcenie istnieje. Uzupełniamy układ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ do bazy,

przykładowo do $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ i znajdujemy współrzędne dowolnego wektora w tej bazie:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y-z}{2} \\ b = \frac{-x+y+z}{2} \\ c = \frac{x-y+z}{2} \end{cases}$$

Powiedzmy, że $\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ jest wektorem zerowym. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \phi\left(\frac{x+y-z}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-x+y+z}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x-y+z}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \frac{x+y-z}{2}\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{-x+y+z}{2}\phi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{x-y+z}{2}\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x+2y+z \\ 2y \\ x+2y-z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zestaw 4: Łatwo sprawdzamy, że stosowne przekształcenie istnieje. Układ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ jest bazą, znajdujemy

wiec współrzędne dowolnego wektora w tej bazie:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3x+y-z}{4} \\ b = \frac{-x+y+3z}{4} \\ c = \frac{x-y+z}{4} \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \phi\left(\frac{3x+y-z}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-x+y+3z}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x-y+z}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \frac{3x+y-z}{4}\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{-x+y+3z}{4}\phi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{x-y+z}{4}\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \frac{3x+y-z}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{-x+y+3z}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x-y+z}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z \\ 2x \\ 3x+z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(6) **Zestaw 1,3:** Wykonujemy odpowiednie operacje elementarne - po lewej baza dziedziny, po prawej przeciwdziedziny:

$$\begin{aligned} (\epsilon_1, \epsilon_2), & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, \epsilon_1), & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\epsilon_2, 2\epsilon_1), \begin{bmatrix} -8 & -14 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\
&(\epsilon_2, 2\epsilon_1), \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (-2\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\
&(\epsilon_2, 2\epsilon_1), \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (-\epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\
&(\epsilon_2, 2\epsilon_1), \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, (\epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3)
\end{aligned}$$

Zestaw 2,4: Podobnie.

Kolokwium 2

- (1) **Zestaw 1:** (a) Niech K będzie ciałem, V, W przestrzeniami wektorowymi nad K , $\phi \in L(V, W)$. Pod jakimi założeniami prawdziwy jest wzór: $\dim V = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{im} \phi$?

- (b) Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K , $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bazami V , C macierzą przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ bazami W , D macierzą przejścia od $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$, $\phi \in L(V, W)$, A niech będzie macierzą ϕ w $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$, B macierzą ϕ w $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$. Jaki jest związek między A, B, C i D ?

- Zestaw 2:** (a) Niech K będzie ciałem, V, W przestrzeniami wektorowymi nad K , $\phi \in L(V, W)$. Pod jakimi założeniami prawdziwe jest twierdzenie: ϕ - surjekcja $\implies \phi$ - iniekcja?

- (b) Niech V będzie przestrzenią wektorową ciałem K , $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bazami V , C macierzą przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, $\phi \in \operatorname{End}(V)$, A niech będzie macierzą ϕ w $\mathcal{A}$, B macierzą ϕ w $\mathcal{B}$. Jaki jest związek między A, B i C ?

- (2) **Zestaw 1:** Wiadomo, że liczby 2346, 2533, 3570 i 5151 dzielą się przez 17. Udowodnić, że wartość wyznacznika macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 1 \\ e & f & g & h & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{również dzieli się przez 17.}$$

- Zestaw 2:** Wiadomo, że liczby 2679, 3154, 4218 i 9519 dzielą się przez 19. Udowodnić, że wartość wyznacznika macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 2 & 6 & 7 & 9 \\ c & d & 3 & 1 & 5 & 4 \\ e & f & 4 & 2 & 1 & 8 \\ g & h & 9 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{również dzieli się przez 19.}$$

- (3) **Zestaw 1:** Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
- Zestaw 2:** Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

- (4) **Zestaw 1:** Wyznaczyć obraz $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ poprzez przekształcenie $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ dane wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.
- Zestaw 2:** Wyznaczyć obraz $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ poprzez przekształcenie $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ dane wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.

- (5) **Zestaw 1:** Wyznaczyć macierz symetrii $\mathbb{R}^2$ względem $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ i wzdłuż $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ w bazach $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz (ϵ_1, ϵ_2) .

- Zestaw 2:** Wyznaczyć macierz rzutu $\mathbb{R}^2$ na $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ i wzdłuż $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ w bazach $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz (ϵ_1, ϵ_2)

- (6) **Zestaw 1:** Przekształcenie liniowe $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ ma względem baz (ϵ_1, ϵ_2) oraz $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Znaleźć

macierz tego przekształcenie w bazach $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

- Zestaw 2:** Endomorfizm $\phi \in K^3$ ma w bazie epsilonowej macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz tego przekształcenie w

$$\text{bazie} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Rozwiązania

- (1) **Zestaw 1:** (a) $\dim V < \infty$
(b) $B = D^{-1}AC$

Zestaw 2: (a) $\dim V = \dim W < \infty$

(b) $B = C^{-1}AC$

(2) **Zestaw 1:** Korzystając z twierdzenia o wyznaczniku macierzy klatkowej:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 1 \\ e & f & g & h & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Mnożąc pierwszą kolumnę przez 1000 i dodając do ostatniej, następnie mnożąc drugą kolumnę przez 100 i dodając do ostatniej itd. dostajemy:

$$\det A = -\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2346 \\ 2 & 5 & 3 & 2533 \\ 3 & 5 & 7 & 3570 \\ 5 & 1 & 5 & 5151 \end{bmatrix}$$

Następnie rozwijamy macierz względem ostatniej kolumny i dostajemy kombinację liczb 2346, 2533, 3570 i 5151 ze współczynnikami całkowitymi (wyznacznik macierzy o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą), można więc 17 „wyciągnąć przed nawias”.

Zestaw 2: Tak samo jak w zestawie 1, ale z wykorzystaniem tożsamości $\det \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{nm} \det A \cdot \det B$, $A \in K_n^n$, $B \in K_M^m$.

(3) **Zestaw 1:** Mamy:

$$\begin{aligned} \text{Sol}(U) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{cases} x = 1 + a \\ y = 2 - a \\ z = 3 - 3a \\ t = 4 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = a \\ y = 2 - x + 1 \\ z = 3 - 3x + 3 \\ t = 4 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + z = 6 \\ x + t = 5 \end{cases}$$

Zestaw 2: Mamy:

$$\begin{aligned} \text{Sol}(U) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{cases} x = a \\ y = 1 + a \\ z = 2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 1 + x \\ z = 2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

(4) **Zestaw 1:** Ponieważ $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, więc $\phi \left(\text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Zestaw 2: Ponieważ $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, więc $\phi \left(\text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$.

(5) **Zestaw 1:** Bez trudu sprawdzamy, że $\mathbb{R}^2 = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \oplus \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Wyznaczamy rozkład dowolnego wektora na składniki z sumy prostej:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \end{cases}$$

Zatem oznaczając stosowną symetrię przez σ mamy:

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \sigma\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (y - 2x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (y - 2x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3x - y \end{bmatrix}$$

Jako że bazą przeciwdziedziny jest baza kanoniczna, kolumnami macierzy odwzorowania σ są wartości tego odwzorowania na wektorach bazowych $\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Szukaną macierzą jest zatem $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Zestaw 2: Bez trudu sprawdzamy, że $\mathbb{R}^2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Wyznaczamy rozkład dowolnego wektora na składniki z sumy prostej:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \end{cases}$$

Zatem oznaczając stosowny rzut przez π mamy:

$$\pi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \pi\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (y - 2x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Jako że bazą przeciwdziedziny jest baza kanoniczna, kolumnami macierzy odwzorowania π są wartości tego odwzorowania na wektorach bazowych $\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\sigma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Szukaną macierzą jest zatem $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(6) **Zestaw 1:** Wykonujemy odpowiednie operacje elementarne - po lewej baza dziedziny, po prawej przeciwdziedziny:

$$\begin{aligned} (\epsilon_1, \epsilon_2), & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, \epsilon_1), & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} -8 & -14 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (-2\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (-\epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, (\epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \end{aligned}$$

Zestaw 2: Podobnie.

Kolokwium 2

- (1) **Zestaw 3:** (a) Niech K będzie ciałem, V, W przestrzeniami wektorowymi nad K , $\phi \in L(V, W)$. Pod jakimi założeniami prawdziwy jest wzór: $\dim V = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{im} \phi$?
- (b) Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem K , $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bazami V , $\mathcal{C}$ macierzą przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ bazami W , D macierzą przejścia od $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$, $\phi \in L(V, W)$, A niech będzie macierzą ϕ w $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$, B macierzą ϕ w $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$. Jaki jest związek między A, B, C i D ?
- Zestaw 4:** (a) Niech K będzie ciałem, V, W przestrzeniami wektorowymi nad K , $\phi \in L(V, W)$. Pod jakimi założeniami prawdziwe jest twierdzenie: ϕ - surjekcja $\implies \phi$ - injekcja?
- (b) Niech V będzie przestrzenią wektorową ciałem K , $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bazami V , C macierzą przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, $\phi \in \operatorname{End}(V)$, A niech będzie macierzą ϕ w $\mathcal{A}$ B macierzą ϕ w $\mathcal{B}$. Jaki jest związek między A, B i C ?
- (2) **Zestaw 3:** Pokazać, że jeśli $A^m = 0$, to macierz $I + A$ jest odwracalna. Wyznaczyć $(I + A)^{-1}$.
- Zestaw 4:** Niech $A, B \in K_n^n$ i niech $I + AB$ będzie odwracalna.
- (a) Obliczyć $(I + BA)(I - B(I + AB)^{-1}A)$.
- (b) Udowodnić **lemat Vassersteina**: Jeśli $I + AB$ jest odwracalna, to $I + BA$ też.
- (3) **Zestaw 3:** Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
- Zestaw 4:** Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
- (4) **Zestaw 3:** Wyznaczyć przeciwobraz $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ poprzez przekształcenie $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ dane wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.
- Zestaw 4:** Wyznaczyć przeciwobraz $\operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ poprzez przekształcenie $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ dane wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.
- (5) **Zestaw 3:** Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, Jeżeli tak, podać przykład takiego odwzorowania.
- Zestaw 4:** Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, Jeżeli tak, podać przykład takiego odwzorowania.
- (6) **Zestaw 3:** Przekształcenie liniowe $\phi : K^2 \rightarrow K^3$ ma względem baz (ϵ_1, ϵ_2) oraz $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz tego przekształcenie w bazach $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ oraz $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.
- Zestaw 4:** Endomorfizm $\phi \in K^3$ ma w bazie epsilonowej macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz tego przekształcenie w bazie $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Rozwiązania

- (1) Zestaw 3: (a) $\dim V < \infty$
(b) $B = D^{-1}AC$

Zestaw 4: (a) $\dim V = \dim W < \infty$
(b) $B = C^{-1}AC$

- (2) Zestaw 3: Indukcyjnie łatwo sprawdzić, że $(I + A)(I - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^m - 1A^{m-1}) = I - A^m$. Skoro $A^m = 0$, to mamy stąd, że $(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^m - 1A^{m-1}$.

Zestaw 4: (a) Mamy:

$$\begin{aligned} (I + BA)(I - B(I + AB)^{-1}A) &= I - B(I + AB)^{-1}A + BA - BAB(I + AB)^{-1}A = \\ &= I - B(I + AB)^{-1}A + B(I + AB)(I + AB)^{-1}A - BAB(I + AB)^{-1}A = \\ &= I + [-BB(I + AB) - BAB](I + AB)^{-1}A = I + 0 = I \end{aligned}$$

(b) Wynika natychmiast z (a).

- (3) Zestaw 3: Mamy:

$$\begin{aligned} \text{Sol}(U) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{cases} x = 1 + a \\ y = 2 - a \\ z = 3 - 3a \\ t = 4 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = a \\ y = 2 - x + 1 \\ z = 3 - 3x + 3 \\ t = 4 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + z = 6 \\ x + t = 5 \end{cases}$$

Zestaw 4: Mamy:

$$\begin{aligned} \text{Sol}(U) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{cases} x = a \\ y = 1 + a \\ z = 2 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 1 + x \\ z = 2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

- (4) Zestaw 3: Mamy:

$$\phi^{-1} \left(\text{lin} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left\{ : \bigvee_{a \in K} \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \bigvee_{a \in K} \begin{cases} 2x + 3y = 2a \\ x - y = a \\ 3y = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \bigvee_{a \in K} \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Zestaw 4: Mamy:

$$\phi^{-1} \left(\text{lin} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \left\{ : \bigvee_{a \in K} \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \bigvee_{a \in K} \begin{cases} 2x + 3y = 4a \\ x - y = 2a \\ 3y = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \bigvee_{a \in K} \begin{cases} x = 2a \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

- (5) Zestaw 3: Łatwo sprawdzamy, że stosowne przekształcenie istnieje. Uzupełniamy układ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ do bazy,

przykładowo do $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ i znajdujemy współrzędne dowolnego wektora w tej bazie:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y-z}{2} \\ b = \frac{-x+y+z}{2} \\ c = \frac{x-y+z}{2} \end{cases}$$

Powiedzmy, że $\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ jest wektorem zerowym. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \phi\left(\frac{x+y-z}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-x+y+z}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x-y+z}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \frac{x+y-z}{2}\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{-x+y+z}{2}\phi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{x-y+z}{2}\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x+2y+z \\ 2y \\ x+2y-z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zestaw 4: Łatwo sprawdzamy, że stosowne przekształcenie istnieje. Układ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ jest bazą, znajdujemy

wiec współrzędne dowolnego wektora w tej bazie:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3x+y-z}{4} \\ b = \frac{-x+y+3z}{4} \\ c = \frac{x-y+z}{4} \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \phi\left(\frac{3x+y-z}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-x+y+3z}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x-y+z}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \frac{3x+y-z}{4}\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{-x+y+3z}{4}\phi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{x-y+z}{4}\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \frac{3x+y-z}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{-x+y+3z}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x-y+z}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z \\ 2x \\ 3x+z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(6) **Zestaw 3:** Wykonujemy odpowiednie operacje elementarne - po lewej baza dziedziny, po prawej przeciwdziedziny:

$$\begin{aligned} (\epsilon_1, \epsilon_2), & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, \epsilon_1), & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} -8 & -14 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (-2\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, (-\epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \\ (\epsilon_2, 2\epsilon_1), & \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, (\epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_3) \end{aligned}$$

Zestaw 4: Podobnie.