

Kolokwium 2

1. Znaleźć cyfry x i y takie, aby liczba $4x0y0$ była podzielna przez 13, przy dzieleniu przez 17 dawała resztę 1, a przy dzieleniu przez 19 dawała resztę 2.
2. Rozwiązać równanie $\phi(2x) = \phi(3x)$.
3. Korzystając z tożsamości $z + 2z^2 + \dots + nz^n = z \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$, $z \in \mathbb{C}$, udowodnić wzór:

$$\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx = \frac{(n+1) \cos nx - n \cos(n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

4. Dla jakiego parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ układ równań
$$\begin{cases} x + 2y + 6z + 6t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y + 6z + t = \lambda \end{cases}$$
 nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma rozwiązanie?
5. Wyznaczyć a i b tak, aby wielomian $X^4 - 3X^3 + 6X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ był podzielny przez $X^2 - 1$.

Rozwiązania

1. Rozwiązujemy układ kongruencji:
$$\begin{cases} 10000 \cdot 4 + 1000 \cdot x + 10 \cdot y \equiv 0 \pmod{13} \\ 10000 \cdot 4 + 1000 \cdot x + 10 \cdot y \equiv 1 \pmod{17} \\ 10000 \cdot 4 + 1000 \cdot x + 10 \cdot y \equiv 2 \pmod{19} \end{cases}$$
 czyli:
$$\begin{cases} 12 \cdot x + 10 \cdot y \equiv 1 \pmod{13} \\ 14 \cdot x + 10 \cdot y \equiv 2 \pmod{17} \\ 12 \cdot x + 10 \cdot y \equiv 16 \pmod{19} \end{cases}$$
 skąd:
$$\begin{cases} 10 \cdot y \equiv 1 + x \pmod{13} \\ 10 \cdot y \equiv 2 + 3x \pmod{17} \\ 10 \cdot y \equiv 16 + 7x \pmod{19} \end{cases}$$
 i mnożąc każdą z kongruencji przez 10^{-1} w ciele $\mathbb{Z}_{13}$, $\mathbb{Z}_{17}$ i $\mathbb{Z}_{19}$ (tj. 4, 12, 2):
$$\begin{cases} y \equiv 4 + 4x \pmod{13} \\ y \equiv 7 + 2x \pmod{17} \\ y \equiv 13 + 14x \pmod{19} \end{cases}$$

Pamiętając, że x i y są cyframi, liczymy reszty z dzielenia przez 13, 17 i 19 dla $4 + 4x$, $7 + 2x$, $13 + 14x$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 4 + 4x \pmod{13} & 4 & 8 & 12 & 3 & 7 & 11 & 2 & 6 & 10 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 7 + 2x \pmod{17} & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 13 + 14x \pmod{19} & 14 & 8 & 3 & 17 & 12 & 7 & 2 & 16 & 11 & 6 \end{array}$$
 skąd $x = 6$, $y = 2$.

2. Załóżmy, że $x \neq 0$ i niech $x = 2^{k_1} 3^{k_2} p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ będzie rozkładem x na czynniki pierwsze. Wówczas:

$$\begin{aligned} \phi(2x) = \phi(3x) &\Leftrightarrow \phi(2^{k_1+1} 3^{k_2} p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}) = \phi(2^{k_1} 3^{k_2+1} p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}) \Leftrightarrow (2^{k_1+1} - 2^{k_1})(3^{k_2} - 3^{k_2-1})\phi(p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}) = \\ &= (2^{k_1} - 2^{k_1-1})(3^{k_2+1} - 3^{k_2})\phi(p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}) \Leftrightarrow 2^{k_1} 3^{k_2} (2 - 1)(1 - \frac{1}{3}) = 2^{k_1} 3^{k_2} (1 - \frac{1}{2})(3 - 1) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = 1 \end{aligned}$$

co daje sprzeczność. Zatem $x = 0$.

3. W danym wzorze kładąc $z = \cos x + i \sin x$ i korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych dostajemy:

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x) + \dots + n(\cos nx + i \sin nx) &= (\cos x + i \sin x) + \dots + n(\cos x + i \sin x)^n = \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (n+1)(\cos x + i \sin x)^n + n(\cos x + i \sin x)^{n+1}}{(1 - \cos x - i \sin x)^2} \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (n+1)(\cos nx + i \sin nx) + n(\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x)}{(1 - \cos x - i \sin x)^2} \end{aligned}$$

W liczniku grupujemy wyrazy przy części rzeczywistej i urojonej, a w mianowniku, korzystając z tożsamości $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ i $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, przekształcamy $1 - \cos x - i \sin x = 1 - 1 + 2\sin^2 \frac{x}{2} - i2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\sin \frac{x}{2}(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2})$ i dostajemy:

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (n+1)(\cos nx + i \sin nx) + n(\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x)}{(1 - \cos x - i \sin x)^2} &= \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (n+1) \cos nx + n \cos(n+1)x + i(-(n+1) \sin nx + n \sin(n+1)x)}{(2\sin \frac{x}{2}(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2}))^2} \end{aligned}$$

W mianowniku korzystamy ze wzoru na $\sin 2\alpha$ i tożsamości $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ i przekształcamy $(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2})^2 = \sin^2 \frac{x}{2} - 2i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = -\cos x - i \sin x$. Wobec tego $(\cos x + i \sin x)$ się uprości i częścią rzeczywistą będzie $\frac{(n+1) \cos nx - n \cos(n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$ co po porównaniu z częścią rzeczywistą w postaci wyjściowej daje tezę.

4. Rozwiązując dany układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} x + 2y + 6z + 6t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y + 6z + t = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z + 6t = 1 \\ 6y + 2z + 4t = 1 \\ 6y + 2z + 4t = \lambda + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z + 6t = 1 \\ 6y + 2z + 4t = 1 \\ 0 = \lambda + 3 \end{cases}$$

Wobec czego $\lambda = 4$.

5. Ponieważ $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, więc - wobec tw. Bezout - chcemy aby -1 i 1 były pierwiastkami wielomianu, skąd:

$$\begin{cases} 1 - 3 + 6 + a + b = 0 \\ 1 + 3 + 6 - a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ -a + b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ 2b = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -7 \end{cases}$$