

Kolokwium 1

Odpowiedzieć na pytanie 1, a następnie rozwiązać wybrane 5 spośród zadań 2 – 8

- (1) Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi nad K , $\dim V, \dim W < \infty$. Odpowiedzieć na następujące pytania teoretyczne:
- (a) Niech A będzie macierzą $\phi \in \text{End}(V)$. Podać warunek równoważny istnieniu macierzy C takiej, że $C^{-1}AC$ jest diagonalna.
- (b) Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą V , $\mathcal{B}$ bazą W , a $\mathcal{A}^*$ i $\mathcal{B}^*$ bazami sprzężonymi V^* i W^* . Niech A będzie macierzą odwzorowania $\phi: V \rightarrow W$ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, a B macierzą ϕ^* w bazach $\mathcal{B}^*$ i $\mathcal{A}^*$. Jaki jest związek między macierzami A i B ?

(2) Wyznaczyć obraz podprzestrzeni $\text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ w przekształceniu $\phi: K^2 \rightarrow K^3$ danym wzorem $\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix}$.

- (3) Czy istnieje przekształcenie liniowe (jeżeli tak - podać przykład) $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające warunki:

$$\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}?$$

- (4) Wyznaczyć macierz $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ względem bazy $(\epsilon_1, \epsilon_2 + 2\epsilon_1, \epsilon_3 + 3\epsilon_2 + 6\epsilon_1, \epsilon_4)$, jeżeli ϕ ma względem $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (5) Znaleźć wzór na n -ty wyraz ciągu a_n , gdy $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$.

- (6) Znaleźć bazę sprzężoną z bazą $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

- (7) Pokazać, że jeżeli $\phi \in \text{End}(V)$, $\dim V < \infty$, to ϕ i ϕ^* mają te same wielomiany charakterystyczne, wyznaczniki i ślady.

- (8) Obliczyć $\dim Q^6(1, \phi)$ oraz $\dim Q^6(-1, \phi)$, sprawdzić, że ϕ jest diagonalizowalny, obliczyć A^2 i A^{-1} i wyznaczyć wielomian

charakterystyczny ϕ , jeżeli ϕ ma w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6)$ macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -16 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 125 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -460 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 176 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 176 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązania

- (1) (a) Musi istnieć baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych ϕ .
 (b) Związek między macierzami A i B ujmuje wzór $B = A^T$.

- (2) Zgodnie z definicją obrazu:

$$\begin{aligned} \phi \left(\text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in K^3 : \text{istnieje } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ takie, że } \phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in K^3 : \bigvee_{\alpha \in K} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in K^3 : \bigvee_{\alpha \in K} \begin{bmatrix} 2\alpha + 3\alpha \\ \alpha - \alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in K^3 : \bigvee_{\alpha \in K} \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

- (3) Żeby ϕ było liniowe, musi w szczególności zachodzić $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Ponieważ $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, więc jest tak w istocie. Aby

skonstruować stosowny przykład, uzupełniamy układ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ do bazy, na przykład $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Zgodnie z twierdzeniem o określaniu przekształceń istnieje odwzorowanie ϕ , takie, że - przykładowo - zachodzą związki:

$$\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

W celu wyznaczenia wzoru analitycznego znajdujemy współrzędne dowolnego wektora $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ w skonstruowanej bazie:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u = x \\ u + w = y \\ w + t = z \end{cases} \iff \begin{cases} u = x \\ w = y - x \\ t = z - y + x \end{cases}$$

Zatem $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y - x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (z - y + x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i stąd:

$$\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = x \phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + (y - x) \phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + (z - y + x) \phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (y - x) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (z - y + x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 3y \\ 2y \\ 2x + y \end{bmatrix}$$

(4) Przekształcamy kolejno macierz ϕ w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ wiedząc, że:

- dodając do j -tego wektora bazy dziedziny i -ty wektor bazy dziedziny pomnożony przez skalar a , w macierzy przekształcenia do j -tej kolumny dodajemy i -tą pomnożoną przez a ,
- dodając do j -tego wektora bazy przeciwdziedziny i -ty wektor bazy przeciwdziedziny pomnożony przez a , w macierzy przekształcenia od i -tego wiersza odejmujemy j -ty pomnożony przez a ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 & -8 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \text{macierz w bazie } (\epsilon_1, \epsilon_2 + 2\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_4),$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -8 & -22 & -3 \\ 3 & 6 & 17 & 2 \\ 2 & 9 & 30 & 1 \\ 1 & 4 & 13 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 & -8 & -22 & -3 \\ -3 & -21 & -73 & -1 \\ 2 & 9 & 30 & 1 \\ 1 & 4 & 13 & 3 \end{bmatrix} - \text{macierz w bazie } (\epsilon_1, \epsilon_2 + 2\epsilon_1, \epsilon_3 + 3\epsilon_2 + 6\epsilon_1, \epsilon_4).$$

(5) Rozważmy $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Szukamy endomorfizmu $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ takiego, by $\phi \left(\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_n - 2a_{n+1} \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$.

Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ będzie macierzą ϕ w bazie (ϵ_1, ϵ_2) . Współczynniki a, b, c, d spełniają związki $\begin{cases} aa_{n+1} + ba_n = 3a_n - 2a_{n+1} \\ ca_{n+1} + da_n = a_{n+1} \end{cases}$

niech więc $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Oczywiście $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \phi \left(\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \right) = \phi \left(\phi \left(\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} \right) \right) = \dots = \phi^n \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \right) = A^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wyznaczamy zatem wzór na A^n . Znajdujemy pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$C_A(X) = \begin{vmatrix} -2 - X & 3 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 2X - 3 = (X + 3)(X - 1)$$

i wyznaczamy podprzestrzenie niezmiennicze $\mathbb{R}^2(-3, \phi)$, $\mathbb{R}^3(1, \phi)$:

$$\mathbb{R}^2(-3, \phi) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} = \text{Sol} \left(\begin{cases} -2x + 3y = -3x \\ x = -3y \end{cases} \right) = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbb{R}^2(1, \phi) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} = \text{Sol} \left(\begin{cases} -2x + 3y = x \\ x = y \end{cases} \right) = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ponieważ $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ tworzą bazę $\mathbb{R}^2$, więc ϕ ma w tej bazie macierz $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Macierz przejścia od bazy

(ϵ_1, ϵ_2) do $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ to $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tak więc $B = C^{-1}AC$ i $A = CBC^{-1}$, gdzie $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$. Zatem:

$$A^n = CB^nC^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(-3)^n & 1 \\ (-3)^n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(-3)^n + \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}(-3)^n + \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4} & \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Stąd $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(-3)^n + \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}(-3)^n + \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4} & \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(-3)^{n+1} - \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{5}{4} \end{bmatrix}$, więc $a_n = -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{5}{4}$.

(6) Celem wyznaczenia wzorów na $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^*$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^*$ i $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^*$ znajdujemy współrzędne $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ w bazie $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u + 2t = x \\ u - w + t = y \\ t = z \end{cases} \iff \begin{cases} u = x - 2z \\ w = -y + x - z \\ t = z \end{cases}$$

Wobec tego $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x - 2z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-x - y + z) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = (x - 2z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + (-x - y + z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = x - 2z,$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = (x - 2z) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + (-x - y + z) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = x - y - z,$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = (x - 2z) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + (-x - y + z) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + z \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^* \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = z.$$

(7) Wielomian charakterystyczny, wyznacznik i ślad endomorfizmu nie zależą od wyboru bazy. Niech więc A będzie macierzą ϕ w ustalonej bazie. Wówczas A^T jest macierzą ϕ^* w bazie sprzężonej. Ponieważ $\det A = \det A^T$ i $\text{tr} A = \text{tr} A^T$, więc ϕ i ϕ^* mają takie same wyznaczniki i ślady. Ponadto $(A - X \cdot I)^T = A^T - X \cdot I$ (wyrazy na diagonalu nie ulegają zmianie), więc $\det(A - X \cdot I) = \det(A - X \cdot I)^T = \det(A^T - X \cdot I)$ i ϕ oraz ϕ^* mają ten sam wielomian charakterystyczny.

(8) Wyznaczamy wymiary podanych podprzestrzeni niezmienniczych:

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{Q}^6(1, \phi) &= \dim \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^6 : \begin{bmatrix} 1 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -16 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 125 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -460 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 176 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 176 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \\ t \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \dim \text{Sol} \left(\begin{cases} 1x + 6y + 20z + 50u + 140w + 140t = x \\ 0x - 16y - 70z - 195u - 560w - 560t = y \\ 0x + 26y + 125z + 366u + 1064w + 1064t = z \\ 0x - 31y - 154z - 460u - 1344w - 1344t = u \\ 0x + 4y + 20z + 60u + 176w + 175t = w \\ 0x + 4y + 20z + 60u + 175w + 176t = t \end{cases} \right) = 6 - r \left(\begin{bmatrix} 0 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -17 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 124 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -461 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 175 \end{bmatrix} \right) = \\ &= 6 - r \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 & -35 & -35 \\ -1 & 10 & 45 & 140 & 140 \\ 2 & 4 & 6 & 14 & 14 \\ 1 & 6 & 19 & 56 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 20 & 60 & 175 & 175 \end{bmatrix} \right) = 6 - r \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -35 & 0 \\ -1 & 10 & 40 & 140 & 0 \\ 2 & 4 & 16 & 14 & 0 \\ 1 & 6 & 24 & 56 & 0 \\ 4 & 20 & 80 & 175 & 0 \end{bmatrix} \right) = 6 - r \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -35 \\ 0 & 16 & 64 & 196 \\ 0 & 4 & 16 & 49 \\ 1 & 6 & 24 & 56 \\ 4 & 20 & 80 & 175 \end{bmatrix} \right) = \\ &= 6 - r \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 49 \\ 1 & 2 & 8 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & -70 \end{bmatrix} \right) = 6 - r \left(\begin{bmatrix} 0 & -4 & -16 & -49 \\ 0 & 4 & 16 & 49 \\ 1 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & -8 & -32 & -98 \end{bmatrix} \right) = 6 - r \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 49 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Podobnie sprawdzamy, że $\dim \mathbb{Q}^6(-1, \phi) = 2$. Zatem istnieje baza $\mathbb{Q}^6$ złożona z wektorów własnych ϕ i endomorfizm jest

diagonalizowalny. W bazie tej ϕ ma macierz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech C oznacza macierz przejścia z bazy

epsilonowej do powyższej bazy. Wówczas $B = C^{-1}AC$ i $A = CBC^{-1}$. Stąd $A^2 = CB^2C^{-1}$. Ale oczywiście $B^2 = I$, więc

$A^2 = CC^{-1} = I$. W szczególności oznacza to, że $A^{-1} = A$. Na koniec, ponieważ wielomian charakterystyczny nie zależy od wyboru bazy, więc:

$$C_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)^4(-1-X)^2$$