

Sprawdzian 2

- Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K , $\dim V < \infty$, $\xi : V \times V \rightarrow K$ funkcjonalem dwuliniowym.
 - Podać przynajmniej 3 warunki równoważne na to, aby ξ był nieosobliwy.
 - Pod jakimi założeniami istnieje (i czemu jest równe) uzupełnienie ortogonalne podprzestrzeni $U < V$?
- Niech $(\mathbb{R}^3, \xi)$ będzie przestrzenią dwuliniową i niech $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ będzie macierzą ξ w bazie kanonicznej. Wyznaczyć wymiar radykału tej przestrzeni.
- Znajdź przynajmniej jedną macierz $C \in \mathbb{C}_n^n$ taką, by $C^T \cdot A \cdot C$ była diagonalna, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Rozwiązania

- (a) Niech $\xi', \xi'' : V \rightarrow V^*$ będą dane wzorami:

$$\xi'(\alpha) = \xi(\alpha, \cdot), \quad \xi''(\alpha) = \xi(\cdot, \alpha),$$

niech A będzie macierzą ξ w pewnej bazie. Warunkami równoważnymi nieosobliwości ξ są:

- $\det A \neq 0$,
- $r(\xi) = \dim V$,
- ξ' jest izomorfizmem,
- ξ'' jest izomorfizmem,
- $\bigwedge_{\alpha \in V \setminus \{0\}} \bigvee_{\beta \in V} \xi(\alpha, \beta) \neq 0$,
- $\bigwedge_{\alpha \in V \setminus \{0\}} \bigvee_{\beta \in V} \xi(\beta, \alpha) \neq 0$.

(b) Przestrzeń musi być nieosobliwa i refleksywna. Uzupełnienie ortogonalne jest wtedy równe dopełnieniu ortogonalnemu.

- Ponieważ macierz funkcjonału jest symetryczna, więc przestrzeń jest symetryczna, a zatem refleksywna. Wobec tego:

$$\dim V = r(\xi) + \dim \text{rad} V.$$

Tak więc ponieważ $r(\xi) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 3$, więc $\dim \text{rad} V = \dim V - r(\xi) = 3 - 3 = 0$.

- Niech A będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego, symetrycznego $\xi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ w bazie kanonicznej. Wówczas:

$$q_\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = [x, y, z] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 + 2xy + 2xz + 5y^2 - 2yz + 5z^2.$$

Znajdujemy bazę $\mathbb{C}^3$, w której ξ ma macierz diagonalną. Zastosujemy w tym celu metodę Lagrange'a.

$$\begin{aligned} q_\xi([x, y, z]^T) &= x^2 + 2xy + 2xz + 5y^2 - 2yz + 5z^2 = x^2 + x(2y + 2z) + 5y^2 - 2yz + 5z^2 = \\ &= x^2 + x(2y + 2z) + 5y^2 - 2yz + 5z^2 + \left(\frac{1}{2}(2y + 2z)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(2y + 2z)\right)^2 = (x + y + z)^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 - y^2 - 2yz - z^2 = \\ &= (x + y + z)^2 + 4y^2 + y(-4z) + 4z^2 = (x + y + z)^2 + 4y^2 + y(-4z) + 4z^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}(-4z)\right)^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}(-4z)\right)^2 = \\ &= (x + y + z)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2 + 4z^2 - \frac{1}{4}z^2 = (x + y + z)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{15}{4}z^2. \end{aligned}$$

Tak więc w pewnej bazie prostopadłej $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}\right)$ ξ ma macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$. Aby wyznaczyć $\mathcal{A}$ rozwiązujemy układy równań:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 1 \\ y_1 - \frac{1}{2}z_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 = 0 \\ y_2 - \frac{1}{2}z_2 = 4 \\ z_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 + y_3 + z_3 = 0 \\ y_3 - \frac{1}{2}z_3 = 0 \\ z_3 = \frac{15}{4} \end{cases}$$

skąd

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{45}{8} \\ y_3 = \frac{15}{8} \\ z_3 = \frac{15}{4} \end{cases}$$

Szukaną macierzą jest macierz przejścia od bazy kanonicznej do bazy $\mathcal{A}$, czyli:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -\frac{45}{8} \\ 0 & 4 & \frac{15}{8} \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}.$$