

Sprawdzian 1

1. Odpowiedzieć na następujące pytania teoretyczne:

- (a) Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi, $\phi : V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym. Pod jakimi założeniami prawdziwy jest wzór $\dim V = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{im} \phi$?
- (b) Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi, $\phi : V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym. Niech M_1 oznacza macierz ϕ w bazach Ξ_1, Ψ_1 , M_2 macierz ϕ w bazach Ξ_2, Ψ_2 , Θ macierz przejścia od bazy Ξ_1 do Ξ_2 , a Γ macierz przejścia od bazy Ψ_1 do Ψ_2 . Jaki jest związek między macierzami M_1, M_2, Θ i Γ ?

2. Niech funkcja $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dana będzie wzorem:

$$\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x - y + 2t \\ 2x + 3y + 5z - t \\ x + z - t \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, że ϕ jest przekształceniem liniowym. Wyznaczyć $\ker \phi$ oraz $\operatorname{im} \phi$. Czy odwzorowanie ϕ jest monomorfizmem, epimorfizmem?

3. Niech F oznacza ciało q elementowe. Przyjmując $k \leq n$, wyznaczyć:

- (a) liczbę odwzorowań liniowych przestrzeni F^n w przestrzeń F^k ,
- (b) liczbę epimorfizmów przestrzeni F^n na przestrzeń F^k .

Rozwiązania

1. (a) Wzór jest prawdziwy, o ile $\dim V < \infty$.

(b) Związek między macierzami M_1, M_2, Θ i Γ ujmuje wzór $M_2 = \Gamma^{-1} \cdot M_1 \cdot \Theta$.

2. Ustalmy $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Mamy:

$$\begin{aligned} \phi \left(a \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \right) &= \phi \left(\begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ ay_1 + by_2 \\ az_1 + bz_2 \\ at_1 + bt_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 - ay_1 - by_2 + 2at_1 + 2bt_2 \\ 2ax_1 + 2bx_2 + 3ay_1 + 3by_2 + 5az_1 + 5bz_2 - at_1 - bt_2 \\ ax_1 + bx_2 + az_1 + bz_2 - at_1 - bt_2 \end{bmatrix} = \\ &= a \begin{bmatrix} x_1 - y_1 + 2t_1 \\ 2x_1 + 2y_1 + 5z_1 - t_1 \\ x_1 + z_1 - t_1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x_2 - y_2 + 2t_2 \\ 2x_2 + 2y_2 + 5z_2 - t_2 \\ x_2 + z_2 - t_2 \end{bmatrix} = a\phi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \right) + b\phi \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Z definicji:

$$\begin{aligned} \ker \phi &= \phi^{-1}(\{\theta\}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} x - y + 2t \\ 2x + 3y + 5z - t \\ x + z - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Sol} \left(\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 2x + 3y + 5z - t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \right) \end{aligned}$$

Rozwiązujemy zatem stosowny układ równań:

$$\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 2x + 3y + 5z - t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 5y + 5z - 5t = 0 \\ y + z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ y + z - 3t = 0 \\ 10t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \\ t = 0 \end{cases}$$

Wobec tego $\ker \phi = \operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. Ponieważ $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker \phi + \dim \operatorname{im} \phi$ oraz $\dim \ker \phi = 1$, więc $\dim \operatorname{im} \phi = 3$ i tym samym $\operatorname{im} \phi = \mathbb{R}^3$. Na koniec, skoro $\dim \operatorname{im} \phi > 0$, więc ϕ nie jest monomorfizmem. Ale ponieważ $\operatorname{im} \phi = \mathbb{R}^3$, więc ϕ jest epimorfizmem.

3. (a) Ponieważ każdemu przekształceniu liniowemu $\phi : F^n \rightarrow F^k$ odpowiada macierz $M_\phi \in F_{n \times k}$ i każdej macierzy $A \in F_{n \times k}$ odpowiada przekształcenie liniowe $\phi : F^n \rightarrow F^k$, więc przekształceń liniowych $\phi : F^n \rightarrow F^k$ jest tyle, ile macierzy $n \times k$ o współczynnikach z ciała F , czyli $q^{n \cdot k}$.

- (b) Ponieważ każdemu przekształceniu liniowemu $\phi : F^n \rightarrow F^k$ odpowiada macierz $M_\phi \in F_{n \times k}$ i każdej macierzy $A \in F_{n \times k}$ odpowiada przekształcenie liniowe $\phi : F^n \rightarrow F^k$, więc przekształceń liniowych $\phi : F^n \rightarrow F^k$ jest tyle, ile macierzy $n \times k$ o współczynnikach z ciała F . Dalej, odwzorowanie jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jego obraz jest całą przestrzenią F^k , czyli gdy rząd tego przekształcenia, równy rzędowi jego macierzy (w dowolnej bazie), wynosi k . Zatem epimorfizmów $\phi : F^n \rightarrow F^k$ jest dokładnie tyle, ile macierzy $n \times k$ o współczynnikach z ciała F i rzędzie k .

Aby wyznaczyć liczbę macierzy $n \times k$ o współczynnikach z ciała F i rzędzie k zauważmy, że macierz $n \times k$, $n \geq k$, ma rząd k wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiersze tworzą niezerowe wektory liniowo niezależne. Tak więc pierwszy wiersz wybieramy dowolnie poza wektorem zerowym - możemy to zrobić na $(q^n - 1)$ sposobów. Drugi wiersz, przy ustalonym pierwszym, może być dowolny za wyjątkiem wierszy proporcjonalnych do pierwszego, można go więc wybrać na $(q^n - q)$ sposobów. Trzeci wiersz, przy ustalonych pierwszych dwóch, może być dowolny za wyjątkiem wierszy proporcjonalnych do pierwszych dwóch, można go więc wybrać na $(q^n - q^2)$ sposobów. Postępując analogicznie wiersz q -ty może być wybrany na $(q^n - q^{n-k+1})$ sposobów. Tak więc macierz $n \times k$ o współczynnikach z ciała F i rzędzie k można wybrać na

$$(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-k+1})$$

sposobów.