

Kolokwium 2

Odpowiedzieć na pytanie 1, a następnie rozwiązać wybrane 5 spośród zadań 2 - 8

- Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K , $\xi : V \times V \rightarrow K$ odwzorowaniem dwuliniowym.
 - Zacytować twierdzenie o bezwładności.
 - Niech $\dim V = n < \infty$, niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V , A macierzą ξ w $\mathcal{A}$. Niech $\phi \in \text{End}(V)$, a ϕ° endomorfizmem sprzężonym z ϕ . Niech B będzie macierzą ϕ w $\mathcal{A}$, a C macierzą ϕ° w $\mathcal{A}$. Jaki jest związek między macierzami A , B i C ?
- Niech $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem dwuliniowym danym wzorem $\xi([x, y, z]^T, [x', y', z']^T) = xy' + x'y - 2zz'$. Znaleźć macierz przekształcenia $\xi' : \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$ w bazie $(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_3)$ i bazie sprzężonej z bazą jednostkową.
- W bazie $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ macierz funkcjonału ξ jest równa
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
. Wskazać w przestrzeni $(\mathbb{R}^4, \xi)$ wektor izotropowy.
- Wyznaczyć macierz odwracalną $X \in \mathbb{R}_2^2$ taką, aby $X^T \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Obliczyć rzut prostopadły wektora $[7, -4, -1, 2]^T$ na podprzestrzeń $\text{Sol} \left(\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \right)$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze zwykłym iloczynem skalarnym.
- Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ przestrzenie ortogonalne $(\mathbb{R}^3, \xi)$, $(\mathbb{R}^3, \zeta)$, gdzie $q_\xi([x, y, z]^T) = x^2 + 4xz + y^2 + 2yz + 4z^2$, $q_\zeta([x, y, z]^T) = x^2 + 2xz + ay^2$ są izomorficzne?
- Sprawdź, czy endomorfizm $\psi([x, y]^T) = [x + y, x - y]^T$, $\psi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$, jest endomorfizmem samosprężonym w przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{R}^2, \xi)$, gdzie $q_\xi = 2x^2 + 2xy + y^2$.
- Znajdź rzeczywistą macierz ortogonalną P taką, żeby $P^T \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} P$ była diagonalna.

Rozwiązania

- Niech $K = \mathbb{R}$, $\dim V = n < \infty$, $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ będą bazami prostopadłymi (V, ξ) , $r^+(\mathcal{A}) = |\{\alpha_i : \xi(\alpha_i, \alpha_i) > 0\}|$, $r^-(\mathcal{A}) = |\{\alpha_i : \xi(\alpha_i, \alpha_i) < 0\}|$, $r^+(\mathcal{B})$, $r^-(\mathcal{B})$ - analogicznie. Wtedy $r^+(\mathcal{A}) = r^+(\mathcal{B})$ oraz $r^-(\mathcal{A}) = r^-(\mathcal{B})$.
 - Związek między macierzami ujmuje wzór $C = A^{-1} \cdot B^T \cdot A$.
- Przypomnijmy, że odwzorowanie $\xi' : \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$ dane jest wzorem $\xi'([x', y', z']^T) = \xi([x', y', z']^T, \cdot)$, oraz że bazę sprzężoną z bazą jednostkową tworzą $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorami $\epsilon_1^*([x, y, z]^T) = x$, $\epsilon_2^*([x, y, z]^T) = y$, $\epsilon_3^*([x, y, z]^T) = z$. Zatem:

$$\xi'(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3) = \xi' \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \xi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = x + y + 2z, \quad \xi'(\epsilon_2 + \epsilon_3) = \xi' \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \xi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = x - 2z,$$

$$\xi'(\epsilon_3) = \xi' \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \xi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = -2z$$
 i szukaną macierzą jest $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.
- Niech (x, y, z, t) będą współrzędnymi wektora izotropowego w bazie $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Wówczas:

$$[x, y, z, t] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = x^2 + y^2 - 2z^2 + t^2 = 0.$$

Niech więc - na przykład - $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 0$. Wektorem izotropowym jest wtedy $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

- Niech $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ w bazie (ϵ_1, ϵ_2) . Wtedy:

$$\xi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right) = [x, y] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 2xx' + yx' + xy' + yy'.$$

Szukamy bazy ortonormalnej przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \xi)$. Łatwo sprawdzamy, że $(\mathbb{R}^3, \xi)$ nie jest przestrzenią izotropową, więc stosujemy metodę Grama - Schmidta dla znalezienia bazy ortogonalnej (α_1, α_2) . Mamy, że $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\alpha_2 = \pi_{\text{lin}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})^\perp} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\xi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}{\xi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ więc } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ jest bazą ortogonalną. Ponieważ } q_{xi} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

2, $q_{xi} \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}$, więc $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right)$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \xi)$. Oczywiście macierzą ξ w

bazie $\mathcal{A}$ jest macierz I . Niech X będzie macierzą przejścia od bazy $\mathcal{A}$ do bazy (ϵ_1, ϵ_2) , czyli macierzą identyczności w bazach (ϵ_1, ϵ_2) i $\mathcal{A}$. Mamy:

$$id(\epsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, id(\epsilon_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

więc $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ i ponieważ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = X^T \cdot I \cdot X = X^T \cdot X$, więc X jest szukaną macierzą.

5. Oznaczmy $U = Sol \left(\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \right)$. Wyznamy wzór na rzut π_U . Znajdujemy bazę prostopadłą U . Mamy:

$$U = Sol \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 + 11x_4 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases} = Sol \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases} = Sol \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_4 = 0 \end{cases} = lin \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Zatem U jest podprzestrzenią jednowymiarową i tym samym wektor $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ tworzy jej bazę prostopadłą. Wobec tego:

$$\pi_U \left(\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{\xi \left(\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}{\xi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Znajdujemy macierze ξ oraz ζ w pewnych bazach prostopadłych przy pomocy metody Jacobiego. Łatwo sprawdzamy, że w bazach jednostkowych macierze A i B funkcyjónów, odpowiednio, ξ i ζ są równe $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Obliczamy wyznaczniki minorów głównych obydwu macierzy:

$$\det A_1 = 1, \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \det B_1 = 1, \det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a, \det B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a$$

skąd macierze A' i B' funkcyjónów ξ i ζ w pewnych bazach prostopadłych są postaci:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, a \neq 0.$$

Przestrzenie $(\mathbb{R}^3, \xi)$, $(\mathbb{R}^3, \zeta)$ są izomorficzne, gdy mają równe rzędy i sygnatury. Oczywiście $r(\xi) = 3$ i $s(\xi) = 1$, zaś $r(\zeta) = 3$ i $s(\zeta) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$.

7. ψ jest samosprzężony, gdy jego macierz w pewnej bazie prostopadłej przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \xi)$ jest symetryczna. Znajdujemy więc bazę prostopadłą przestrzeni. Łatwo sprawdzamy, że $(\mathbb{R}^2, \xi)$ jest nieosobliwa, możemy więc zastosować metodę Lagrange'a:

$$q_\xi([x, y]^T) = 2x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2\left(\frac{1}{2 \cdot 2}2y\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2 \cdot 2}2y\right)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + y^2 - \frac{1}{2}y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

W bazie $\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right)$ ξ ma macierz diagonalną. Ponadto:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}y_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}y_1 = 0 \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

skąd $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$ jest bazą prostopadłą. Znajdujemy macierz B endomorfizmu ψ w $\mathcal{A}$:

$$\psi \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \psi \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zatem $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{16} \\ 4 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ nie jest macierzą symetryczną.

8. Oznaczmy $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Niech $(\mathbb{R}^3, \xi)$ będzie przestrzenią ortogonalną ze zwykłym iloczynem skalarnym. Oczywiście $(\mathbb{R}^3, \xi)$ jest euklidesowa i $\mathcal{E} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ jest jej bazą prostopadłą. Niech A będzie macierzą endomorfizmu ϕ w bazie $\mathcal{E}$. Wówczas ϕ jest samosprzężony (bo A jest symetryczna). Wyznamy wzór na ϕ :

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \end{bmatrix}$$

Znajdujemy wartości własne ϕ :

$$C_\phi(X) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - X & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} - X & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - X \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 2 - 3X & 1 & 2 \\ 1 & -2 - 3X & 1 \\ 2 & 1 & -1 - 3X \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(-27X^3 - 9X^2 + 39X + 13) = \frac{1}{27}(X + \frac{1}{3})(-27X^2 + 39)$$

Zatem $C_\phi(X) = 0$ wtw. gdy $X = -\frac{1}{3}$, $X = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $X = -\frac{\sqrt{13}}{3}$ i wyznaczamy przestrzenie własne:

$$V(\phi, -\frac{1}{3}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2x + 3y + 2z \\ x - 2y + 2z \\ 2x + 2y - z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$V(\phi, \frac{\sqrt{13}}{3}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{13}}{3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2x + 3y + 2z \\ x - 2y + 2z \\ 2x + 2y - z \end{bmatrix} = \sqrt{13} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 3 + \sqrt{13} \\ -1 + \sqrt{13} \\ 4 \end{bmatrix}\right),$$

$$V(\phi, -\frac{\sqrt{13}}{3}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{13}}{3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2x + 3y + 2z \\ x - 2y + 2z \\ 2x + 2y - z \end{bmatrix} = -\sqrt{13} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 3 - \sqrt{13} \\ -1 - \sqrt{13} \\ 4 \end{bmatrix}\right).$$

Wobec twierdzenia spektralnego $\mathbb{R}^3 = V(\phi, -\frac{1}{3}) \perp V(\phi, \frac{\sqrt{13}}{3}) \perp V(\phi, -\frac{\sqrt{13}}{3})$, więc $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{13} \\ -1 + \sqrt{13} \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{13} \\ -1 - \sqrt{13} \\ 4 \end{bmatrix}\right)$

jest bazą prostopadłą $(\mathbb{R}^3, \xi)$. Ponieważ $q_\xi\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3$, $q_\xi\left(\begin{bmatrix} 3 + \sqrt{13} \\ -1 + \sqrt{13} \\ 4 \end{bmatrix}\right) = 4(13 + \sqrt{13})$, $q_\xi\left(\begin{bmatrix} 3 - \sqrt{13} \\ -1 - \sqrt{13} \\ 4 \end{bmatrix}\right) = 4(13 - \sqrt{13})$,

więc $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3 + \sqrt{13}}{2\sqrt{13 + \sqrt{13}}} \\ \frac{-1 + \sqrt{13}}{2\sqrt{13 + \sqrt{13}}} \\ \frac{4}{2\sqrt{13 + \sqrt{13}}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3 - \sqrt{13}}{2\sqrt{13 - \sqrt{13}}} \\ \frac{-1 - \sqrt{13}}{2\sqrt{13 - \sqrt{13}}} \\ \frac{4}{2\sqrt{13 - \sqrt{13}}} \end{bmatrix}\right)$ jest bazą ortonormalną $(\mathbb{R}^3, \xi)$ złożoną z wektorów własnych ϕ . Niech C

oznacza macierz przejścia z $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ do $\mathcal{A}$. Oczywiście $C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3 + \sqrt{13}}{2\sqrt{13 + \sqrt{13}}} & \frac{3 - \sqrt{13}}{2\sqrt{13 - \sqrt{13}}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1 + \sqrt{13}}{2\sqrt{13 + \sqrt{13}}} & \frac{-1 - \sqrt{13}}{2\sqrt{13 - \sqrt{13}}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{2\sqrt{13 + \sqrt{13}}} & \frac{4}{2\sqrt{13 - \sqrt{13}}} \end{bmatrix}$. Macierzą ξ w bazie kanonicznej

jest I i ponieważ $\mathcal{A}$ jest ortonormalna, więc również macierzą ξ w $\mathcal{A}$ jest I . Zatem $I = C^T \cdot I \cdot C = C^T \cdot C$, czyli $C^T = C^{-1}$, więc C jest ortogonalna.