Paweł Gładki

Ułamki łańcuchowe[1]

1 Wstęp

W numerze 1/1989 miesięcznika "Młody Technik" w dziale "ROzmaitości MAtematyczne" Michał Szurek zaprezentował następujące zadanie z egzaminów wstępnych do szkół średnich: Która z liczb:

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} \text{ i } 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$$

jest większa? Zadanie można rozwiązać na wiele sposobów; "fool proof" polega na tym, żeby zamienić powyższe liczby na "normalne" ułamki $\frac{13}{8}$ i $\frac{18}{11}$ i (najlepiej za pomocą kalkulatora...) porównać takie dwie liczby. Można oczywiście prościej: postawienie mniejszej liczby w mianowniku zwiększa ułamek, a ponieważ każdy z widocznych ułamków ma 4 piętra w mianowniku, początkowy zwrot nierówności $2 < 3$ zmieni się czterokrotnie...

Takie piętrowe ułamki nazywamy łańcuchowymi. Uważa się, że pierwszy wprowadził je matematyk włoski Rafael Bombelli (1526-1573). Prace nad teorią ułamków łańcuchowych zapoczątkował w XVII w. matematyk włoski Pietro Antonio Cataldi (1548-1625), a do rozwoju teorii przyczynili się matematycy angielscy John Wallis (1616-1703) i William Brouckner (1620-1684), matematyk holenderski Christian Huygens (1629-1695), matematyk szwajcarski Leonhard Euler (1707-1783), matematyk niemiecki Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matematycy francuscy Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) i Adrien Marie Legendre (1752-1833) oraz matematk holenderski Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894). Zajmijmy się niektórymi ich własnościami.

2 Redukty, twierdzenie o reduktach; liczby Δ_k, twierdzenie "o deltach"; rozwijanie liczb wymiernych na ułamki ciągłe normalne.

Rozważmy ułamek:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}, a_0 \in \mathbb{R}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+ \tag{2.1}$$

[1]Referat wygłoszony na spotkaniu Koła Naukowego Matematyków przy Uniwersytecie Śląskim w dniu 7.IX.2000r.

Definicja **2.1** <u>Redukt.</u> *Liczbę:*

$$R_k = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

nazywamy reduktem rzędu k ułamka (2). Jako redukt rzędu 0 uważamy liczbę $R_0 = a_0$*. Redunkt rzędu n nazywamy wartością ułamka łańcuchowego.* ❑

Połóżmy:

$P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$
$P_1 = a_0 a_1 + 1$, $Q_1 = a_1$
$P_k = P_{k-1} a_k + P_{k-2}$, $Q_k = Q_{k-1} a_k + Q_{k-2}$

Twierdzenie **2.1** (o reduktach) $R_k = \frac{P_k}{Q_k}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

D o w ó d :

1. (początek indukcji): $R_0 = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}$, $R_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{P_1}{Q_1}$

2. (krok indukcyjny):

2.1. (zał.) $R_m = \frac{P_m}{Q_m}$

2.2. $R_{m+1} = \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$ (?)

2.3. $R_m = \frac{P_{m-1} a_m + P_{m-2}}{Q_{m-1} a_m + Q_{m-2}}$

2.4. równość powyższa pozostaje prawdziwa, gdy zastąpimy po obu stronach a_m przez $a_m + \frac{1}{a_{m+1}}$, $(a_{m+1} > 0)$

2.5. $R_{m+1} = \frac{P_{m-1}(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}) + P_{m-2}}{Q_{m-1}(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}) + Q_{m-2}} = \frac{(P_{m-1} a_m + P_{m-2}) a_{m+1} + P_{m-1}}{(Q_{m-1} a_m + Q_{m-2}) a_{m+1} + Q_{m-1}} = \frac{P_m a_{m+1} + P_{m-1}}{Q_m a_{m+1} + Q_{m-1}} = \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$ *QED*

Program **2.1** *Obliczanie wartości ułamka łańcuchowego*

```
10 Obliczanie wartosci ulamka lancuchowego
20 input ''Ile bedzie mianownikow?''; n
30 dim b(n-1)
40 for i=0 to n-1
50 b(i) = 0
60 next i
70 input ''Czesc calkowita =''; b
80 for i=1 to n-1
90 input ''Podaj kolejny mianownik''; m
100 b(i) = m
110 next i
120 p1=1; q1=0; p2=b; q2=i
```

```
130 for i=0 to n-1
140 p=p2*b(i)+p1; q = q2*b(i)+q1
150 p1=p2; q1=q2; p2=0; q2=0
160 next i
170 print ''Wynik:'';p;''/'';q
180 end
```

DEFINICJA **2.2** <u>LICZBY Δ_k.</u> $\Delta_k = P_{k-1}Q_k - Q_{k-1}P_k,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ❑

TWIERDZENIE **2.2** (O "DELTACH") $\Delta_k = (-1)^k$

D o w ó d :

1. (początek indukcji): $\Delta_1 = P_0Q_1 - Q_0P_1 = a_0a_1 - a_0a_1 - 1 = -1 = (-1)^1$

2. (krok indukcyjny):

2.1. (zał.) $\Delta_m = (-1)^m$

2.2. $\Delta_{m+1} = (-1)^{m+1}(?)$

2.3. $\Delta_k = -\Delta_{k-1},\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ponieważ:
$\Delta_k = P_{k-1}(Q_{k-1}a_k + Q_{k-2}) - Q_{k-1}(P_{k-1}a_k + P_{k-2}) = P_{k-1}Q_{k-2} - Q_{k-1}P_{k-2} = -\Delta_{k-1}$

2.4. $\Delta_{m+1} = -\Delta_m = -(-1)^m = (-1)^{m+1}$ *QED*

DEFINICJA **2.3** <u>UŁAMEK ŁAŃCUCHOWY ARYTMETYCZNY.</u> *Ułamek (2), w którym a_0 jest liczbą całkowitą, a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami naturalnymi, nazywamy ułamkiem łańcuchowym arytmetycznym.* ❑

TWIERDZENIE **2.3** *Jeżeli ułamek (2) jest arytmetyczny, to ułamki:*

$$\tfrac{P_k}{Q_k},\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

są ułamkami nieskracalnymi o naturalnych mianownikach.

D o w ó d : P_k i Q_k będą liczbami catymi, co wynika z ich definicji. Z twierdzenia "o deltach" wynika natomiast, że są względnie pierwsze. *QED*

UWAGA **2.1** *Rozważmy ułamek $\frac{n_0}{n_1}$. Na podstawie algorytmu Euklidesa:*
$n_0 = q_1n_1 + n_2$
$n_1 = q_2n_2 + n_3$
$\vdots$
$n_{k-2} = q_{k-1}n_{k-1} + n_k$
$n_{k-1} = q_kn_k$
Inaczej:
$\frac{n_0}{n_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{n_1}{n_2}}$
$\frac{n_1}{n_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{n_2}{n_3}}$

$\vdots$
$\frac{n_{k-2}}{n_{k-1}} = q_{k-1} + \frac{1}{\frac{n_{k-1}}{n_k}}$
$\frac{n_{k-1}}{n_k} = q_k$
Zatem:

$$\frac{n_0}{n_1} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \cdots + q_{k-2} + \frac{1}{q_{k-1} + \frac{1}{q_k}}}$$

Algorytm Euklidesa przedstawia więc metodę rozwijania liczby wymiernej na ułamek ciągły. ❑

Przykład **2.1** *Rozwiniemy na ułamek ciągły liczbę* $\frac{314159}{100000}$. *Kolejne dzielenia dają:*
$314159 = 3 \cdot 100000 + 14159$
$100000 = 7 \cdot 14159 + 887$
$14159 = 15 \cdot 887 + 854$
$887 = 1 \cdot 854 + 33$
$854 = 25 \cdot 33 + 29$
$33 = 1 \cdot 29 + 4$
$29 = 7 \cdot 4 + 1$
$4 = 4 \cdot 1$
Jest więc:

$$3,14159 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{25 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4}}}}}}}$$ ❑

Uwaga **2.2** *Łatwo zauważyć, że każda liczba wymierna daje co najmniej dwa różne rozwinięcia na łańcuchowy ułamek algebraiczny. Istsnie, niech:*

$$w = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$$

będzie rozwinięciem otrzymanym z algorytmu Euklidesa. Oczywiście $a_n > 1$, *zatem* $a_n - 1 \in \mathbb{N}$. *Ponadto:*

$$a_n = a_n - 1 + \frac{1}{1}$$

Zatem mamy drugie rozwinięcie:

$$w = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}}}$$

❑

Definicja **2.4** Rozwinięcie normalne. *Rozwinięcie, w którym ostatni mianownik* a_n *jest większy od jedności, nazywamy rozwinięciem normalnym.* ❑

Twierdzenie **2.4** *Każda liczba wymierna daje dokładnie jedno rozwinięcie normalne na ułamek łańcuchowy arytmetyczny.*

D o w ó d :

1. Ustalmy $w = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$

2. $x_k := a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

3. $x_k > a_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $x_n = a_n$

4. $x_k > 1$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

5. $x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

6. $a_k < x_k < a_k + 1$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

7. $a_k = [x_k]$, $k \in \{0, 1, \ldots, n$

8. $x_k = [x_k] + \frac{1}{x_{k+1}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

9. $x_{k+1} = \frac{1}{x_k - [x_k]}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

10. Liczby x_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ są zatem wyznaczone jednoznacznie przez x_0.
QED

PROGRAM **2.2** *Rozkład liczby wymiernej na ułamek łańcuchowy.*

```
210 Rozklad liczby wymiernej na ulamek lancuchowy
220 input ''Licznik='';l
230 input ''Mianownik='';m
240 y=1
250 o=int(l/m); r = l-o*m
260 if y=1 then print ''Czesc calkowita='';o
270 if y=0 then print ''Kolejny mianownik='';o
280 y=o
290 if r=o then print ''koniec''; goto 310
300 l=m; m=r; goto250
310 end
```

UWAGA **2.3** *Dowód twierdzenia 2.4. dostarcza inną niż algorytm Euklidesa metodę wyznaczania rozkładu liczby wymiernej na ułamek łańcuchowy.* ❑

PRZYKŁAD **2.2** (ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ NIEOZNACZONYCH) *Niech:*

$$ax + by = 1, a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{2.2}$$

Rozwiązanie tego równania sprowadza się do wyznaczenia jednego rozwiązania typu (2.2) (zasadnicze twierdzenie arytmetyki). Rozwińmy liczbę $\frac{a}{b}$ na ułamek łańcuchowy ($\frac{a}{b}$ jest nieskracalne, co wynika z faktu, że równanie (2.2) ma być rozwiązane w liczbach całkowitych). Niech $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ oraz $\frac{P_n}{Q_n}$ będą przedostatnim i ostatnim reduktem tego rozwinięcia. Jest:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$$

Zatem, wobec nieskracalności tych ułamków:

$$P_n = \pm a,\ Q_n = \pm b$$

Z twierdzenia "o deltach":

$$P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n = (-1)^n$$

Zatem:

$$\pm(-1)^n P_{n-1} b \mp (-1)^n Q_{n-1} a = 1$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie (2.2):

$$x = \mp(-1)^n Q_{n-1},\ y = \pm(-1)^n P_n - 1 \ ❏$$

Przykład **2.3** *Chcemy rozwiązać równanie nieoznaczone:*

$$96x + 65y = 1$$

Mamy:
$96 = 1 \cdot 65 + 31$
$65 = 2 \cdot 31 + 3$
$31 = 10 \cdot 3 + 1$
$3 = 3 \cdot 1$
Stąd:

$$\frac{96}{65} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{3}}}$$

Zatem $n = 3$. *Ponadto:*
$P_1 = 3,\ Q_1 = 2$
$P_2 = 31,\ Q_2 = 21$
i przeto:

$$x = -(-1)^3 Q_2 = 21,\ y = (-1)^3 P_2 = -31$$

Istotnie:

$$96 \cdot 31 - 65 \cdot 31 = 1 \ ❏$$

3 Rozwijanie liczb niewymiernych na ułamek łańcuchowy; prawo najlepszego przybliżenia.

Zachowujemy wszystkie oznaczenia z poprzedniego paragrafu.

UWAGA **3.1** *Algorytm poznany w dowodzie twierdzenia 2.4 do rozwijania liczb wymiernych na ułamek łańcuchowy, dobry jest też dla liczb niewymiernych:*
$x_0 = w$, $a_0 = [x_0]$ *i jeżeli* $a_0 \neq x_0$ *to wyznaczamu dalej:*
$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$, $a_1 = [x_1]$ *i jeżeli* $a_1 \neq x_1$ *to wyznaczamu dalej:*
$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, $a_2 = [x_2]$ *i jeżeli* $a_2 \neq x_2$ *to wyznaczamu dalej:*
$\vdots$
W tym przypadku algorytm staje się nieskończony. Istotnie, przypuśćmy, iż istnieje $n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $a_n = x_n$*. Wówczas:*

$$w = x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

zatem $w \in \mathbb{Q}$ *wbrew założeniu.* ❏

TWIERDZENIE **3.1** *Niech* $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*. Wówczas* $\lim_{n\to\infty} R_n = x_0$*.*

D o w ó d :

1. $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$, $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, $\ldots$, $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}}$

2. $x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}$, $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, $\ldots$, $x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}$

3. $x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{x_n}}}$, $R_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$

4. $x_0 = \frac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}}$, $R_n = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}}$

5. $x_0 = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}}$

6. $x_0 - R_n = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n}{(Q_n x_{n+1} + Q_n)Q_n} = \frac{(-1)^n}{(Q_n x_{n+1} + Q_n)Q_n}$

7. $x_{n+1} > a_{n+1}$

8. $|x_0 - R_n| < \frac{1}{(Q_n a_{n+1} + Q_n)Q_n} = \frac{1}{Q_{n+1}Q_n}$

9. $Q_k \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}$

- **9.1.** (początek indukcji): $Q_1 = a_1 \in \mathbb{N}$
- **9.2.** (krok indukcyjny):
  - **9.2.1.** (zał.) $Q_n \geqslant n$
  - **9.2.2.** $Q_{n+1} \geqslant n + 1$ (?)
  - **9.2.3.** $Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} \geqslant Q_n + 1 \geqslant n + 1$

10. $|x_0 - R_n| < \frac{1}{n(n+1)}$ *QED*

UWAGA **3.2** *Każdy następny redukt daje lepsze przybliżenie dla liczby* x_0*, niż redukt poprzedzający.*

D o w ó d :

1. $x_0 = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}}$, $R_n = \frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}}$

2. $x_0 - R_n = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} Q_n - Q_{n-1} P_n}{(Q_n x_{n+1} + Q_n) Q_n} = \frac{(-1)^n}{(Q_n x_{n+1} + Q_n) Q_n}$

3. $a_{n+1} = [x_{n+1}] > x_{n+1} - 1 \Rightarrow x_{n+1} < a_{n+1} + 1$, $2 \leqslant a_{n+2}$

4. $|x_0 - R_n| > \frac{1}{(Q_n(a_{n+1}+1) + Q_{n-1}) Q_n} = \frac{1}{(Q_{n+1} + Q_n) Q_n}$, $|x_0 - R_{n+1}| < \frac{1}{(Q_{n+1} a_{n+2} + Q_n) Q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{(Q_{n+1} + Q_n) Q_{n+1}}$

5. $Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} \geqslant Q_n$

6. $|x_0 - R_{n+1}| < |x_0 - R_n|$ *QED*

Twierdzenie **3.2** (prawo najlepszego przybliżenia) *Jeżeli liczba wymierna* $\frac{r}{s}$, $s > 0$ *przedstawia lepsze przybliżenie liczby* x_0 *niż redikt* R_n, $n \geqslant 1$, *to mianownik* s *tej liczby jest większy od mianownika reduktu* R_n

D o w ó d :

1. (zał.) $|x_0 - \frac{r}{s}| < |x_0 - R_n|$

2. $(|x_0 - R_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem malejącym do zera

3. istnieje $k \in \mathbb{N}$: $|x_0 - R_k| > |x_0 - \frac{r}{s}| \geqslant |x_0 - R_{k+1}|$

4. ustalmy $k \geqslant n$

5. rozważmy dwa przypadki

1^o k parzyste

5.1. $x_0 - R_k > 0$, $x_0 - R_{k+1} < 0$ wobec punktu 2. dowodu uwagi 3.2.
5.2. $x_0 - R_k > |x_0 - \frac{r}{s}| \geqslant R_{k+1} - x_0$
5.3. $x_0 - R_k > x_0 - \frac{r}{s} \geqslant -(R_{k+1} - x_0)$
5.4. $R_k < \frac{r}{s} \leqslant R_{k+1}$

2^o k nieparzyste

5.1. $x_0 - R_k < 0$, $x_0 - R_{k+1} > 0$ wobec punktu 2. dowodu uwagi 3.2.
5.2. $R_k - x_0 > |\frac{r}{s} - x_0| \geqslant x_0 - R_{k+1}$
5.3. $R_k - x_0 > \frac{r}{s} - x_0 \geqslant -(x_0 - R_{k+1})$
5.4. $R_k > \frac{r}{s} \geqslant R_{k+1}$

6. $|\frac{r}{s} - R_k| \leqslant |R_k - R_{k+1}|$

7. $R_k - R_{k+1} = \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_k Q_{k+1} - Q_k P_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k+1}}$

8. $|\frac{r}{s} - R_k| \leqslant \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$

9. $rQ_k - sP_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

9.1. (hip.) $rQ_k - sQ_k = 0$

9.2. $\frac{r}{s} = \frac{P_k}{Q_k} = R_k$

9.3. $|x_0 - R_k| = |x_0 - \frac{r}{s}|$ - sprzeczność wobec punktu 3.

10. $|\frac{r}{s} - R_k| = |\frac{r}{s} - \frac{P_k}{Q_k}| = \frac{|rQ_k - sP_k|}{sQ_k} \geqslant \frac{1}{sQ_k}$

11. $\frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \geqslant \frac{1}{sQ_k}$

12. $s \geqslant Q_{k+1}$

13. $Q_{k+1} = Q_k a_{k+1} + Q_{k-1} > Q_k$

14. $s > Q_k$

15. $s > Q_n$ wobec punktu 4. *QED*

TWIERDZENIE **3.3** *Każda liczba niewymierna daje jedno i tylko jedno rozwinięcie na ułamek łańcuchowy nieskończony.*

UMOWA NOTACYJNA: Niech $a_0, a_1, \ldots$ oznacza ciąg nieskończony, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 1$. Połóżmy:

$$R_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \cdots + \frac{1}{a_n}},\ n \in \mathbb{N}$$

Jeżeli $\lim_{n \to \infty} R_n = x$, to piszemy:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}} \ \square$$

D o w ó d t w i e r d z e n i a 3 . 3 :

1. Wystarczy pokazać, że jeżeli zachodzi rozwinięcie (2), to liczby a_n mogą być wyznaczone według algorytmu z dowodu twierdzenia 2.4.

2. niech $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 1$

3. $R_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$, $R'_n = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n+1}}}}$

4. $R_{n+1} = a_0 + \frac{1}{R'_n}$

5. $R'_n = \frac{1}{R_{n+1} - a_0}$

6. $R'_n \leqslant a_1 + \frac{1}{a_2}$

7. $R_{n+1} \geqslant a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$

8. $x \geqslant a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$

9. $x > a_0$

10. $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = x$

11. $\lim_{n\to\infty}(R_{n+1} - a_0) = x - a_0$

12. $\lim_{n\to\infty} R'_n = x_1 = \frac{1}{x-a_0}$

13. $x_1 = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\cdots}}$

14. rozumując analogicznie: $x_1 > a_1$

15. $x_1 > 1$

16. $\frac{1}{x-a_0} > 1$

17. $x < a_0 + 1$

18. $a_0 < x < a_0 + 1$

19. $a_0 = [x]$

20. Rozumując analogicznie znaleźlibyśmy $a_1 = [x_1]$. Kładąc $x_2 = \frac{1}{x_1-a_1}$ będziemy mieli rozwinięcie na ułamek nieskończony:

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\cdots}}$$

oraz znowu $a_2 = [x_2]$.
Rozszerzając indukcyjnie powyższe rozumowanie na dowolne $n \in \mathbb{N}$, kładąc:

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1}-a_{n-1}}$$

mamy $a_n = [x_n]$. *QED*

4 Niewymierności stopnia 2; twierdzenie Lagrange'a.

Zachowujemy wszystkie oznaczenia z poprzednich paragrafów.

DEFINICJA **4.1** <u>NIEWYMIERNOŚĆ DRUGIEGO STOPNIA.</u> *Niewymiernością drugiego stopnia nazywamy liczbę niewymierną, spełniającą równanie drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych.* ❏

TWIERDZENIE **4.1** (LAGRANGE'A) *Każda niewymierność drugiego stopnia rozwija się na ułamek łańcuchowy okresowy.*

D o w ó d :

1. Niech x oznacza liczbę rzeczywistą niewymierną, spełniającą równanie:

$$Ax^2 + Bx + c = 0,\ A, B, C \in \mathbb{Z},\ A \neq 0,\ B^2 - 4AC > 0$$

2. $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}$, $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$, $x_1 = \frac{1}{x - a_0}$, $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, ...

3. $x = \frac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}}$, $|x - R_{n-1}| < \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}$, $|x - R_{n-2}| < \frac{1}{Q_{n-2}Q_{n-1}}$ (porównaj też dowód twierdzenia 3.1.)

4. $n \geqslant 2 : |\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x| < \frac{1}{Q_{n-1}^2}$, $|\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} - x| < \frac{1}{Q_{n-2}Q_{n-1}}$

5. $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x = \frac{\epsilon}{Q_{n-1}^2}$, $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} - x = \frac{\eta}{Q_{n-2}Q_{n-1}}$

6. $|\epsilon| < 1$, $|\eta| < 1$

7. Zdefiniujmy:
$A_n := AP_{n-1}^2 + BP_{n-1}Q_{n-1} + CQ_{n-1}^2$
$B_n := 2AP_{n-1}P_{n-2} + B(P_{n-1}Q_{n-2} + Q_{n-1}P_{n-2}) + 2CQ_{n-1}Q_{n-2}$
$C_n := AP_{n-2}^2 + BP_{n-2}Q_{n-2} + CQ_{n-2}^2$

8. $A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n = 0$ wobec punktów 1., 3. i 7.

9. Równość powyższa nie jest tożsamością x_n, gdyż $A_n \neq 0$. Gdyby $A_n = 0$, to wobec punktu 7. (po podzieleniu pierwszej równości przez Q_{n-1}^2) wynikay, że R_{n-1} jest wymiernym pierwiastkiem równania z punktu 1.

10. $P_{n-1} = xQ_{n-1} + \frac{\epsilon}{Q_{n-1}}$ wobec punktu 5.

11. $A_n = A(xQ_{n-1} + \frac{\epsilon}{Q_{n-1}})^2 + B(xQ_{n-1} + \frac{\epsilon}{Q_{n-1}})Q_{n-1} + CQ_{n-1}^2 = (Ax^2 + Bx + C)Q_{n-1}^2 + (2Ax + B)\epsilon + A\frac{\epsilon^2}{Q_{n-1}^2}$ wobec punktu 7.

12. $|A_n| < |2Ax| + |A| + |B|$ wobec punktów 1., 6. i faktu, że $Q_{n-1} \in \mathbb{N}$

13. $C_n = A_{n-1}$, $n \geqslant 1$ wobec punktu 7.

14. $|C_n| < |2Ax| + |A| = |B|$

15. $P_{n-1} = xQ_{n-1} + \frac{\epsilon}{Q_{n-1}}$, $P_{n-2} = xQ_{n-2} + \frac{\eta}{Q_{n-1}}$

16. $B_n = 2A(xQ_{n-1} + \frac{\epsilon}{Q_{n-1}})(xQ_{n-2} + \frac{\eta}{Q_{n-1}}) + B(xQ_{n-1} + \frac{\epsilon}{Q_{n-1}})Q_{n-2} + BQ_{n-1}(xQ_{n-2} + \frac{\eta}{Q_{n-1}}) + 2CQ_{n-1}Q_{n-2} = 2(Ax^2 + Bx + C)Q_{n-1}Q_{n-2} + (2Ax + B)(\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}\epsilon + \eta) + 2A\frac{\epsilon\eta}{Q_{n-1}^2}$ wobec punktu 7.

17. $|B_n| < 2(|2Ax| + |A| + |B|)$ wobec punktów 1., 6. i faktu, że $Q_{n-2} \leqslant Q_{n-1}$ zaś $Q_{n-1} > 1$

18. $M := |2Ax| + |A| + |B|$

19. $n \geqslant 2 : |A_n| < M$, $|B_n| < 2M$, $|C_n| < M$ wobec punktów 12., 14. i 18.

20. $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Z}$, zatem różnych liczb całkowitych spełniających powyższe nierówności jest skończona liczba.

21. Skończona jest też liczba różnych x_n, dla których spełniona jest równość z punktu 8.

22. W ciągu wszystkich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczba różnych wartości x_n jest skończona.

23. $\bigvee\limits_{p,q;q>p} : x_p = x_q$

24. $a_p = a_q$

25. $x_{p+1} = \frac{1}{x_p - a_p}$, $x_{q+1} = \frac{1}{x_q - a_q}$ zatem $x_{p+1} = x_{q+1}$

26. $s := q - p$

27. Poprzez indukcję otrzymujemy:

$$a_{n+s} = a_n,\ n \geqslant p$$

co dowodzi, iż rozwinięcie x na ułamek łańcuchowy jest okresowe. *QED*

ALGORYTM **4.1** *Rozważmy równanie:*

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0,\ A, B, C \in \mathbb{Z},\ NWD(A, B, C) = 1,\ A > 0$$

Kładziemy:

$$H = [\sqrt{B^2 - AC}],\ E_0 = \pm A,\ F_0 = \mp B$$

obierając znak + lub − zależnie od tego, czy rozwijamy większy, czy też mniejszy pierwiastek uważanego równania; dalej wyznaczamy liczby a_{n-1}, E_n, F_n *kolejno ze wzorów:*

$$a_{n-1} = [\tfrac{F_{n-1}+H}{E_{n-1}}],\ F_n = a_{n-1}E_{n-1} - F_{n-1},\ E_n = \tfrac{D - F_n^2}{E_{n-1}}$$

gdzie $D = B^2 - AC$. *Będzie:*

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}$$

LEMAT **4.1** $[\frac{z}{k}] = [\frac{[z]}{k}],\ z \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$

D o w ó d :

1. $(\geqslant)$

1.1. $[z] \leqslant z$

1.2. $\frac{[z]}{k} < \frac{z}{k}$

1.3. $[\frac{[z]}{k}] < [\frac{z}{k}]$

2. $(\leqslant)$

2.1. $u - [u] < 1$

2.2. $\frac{[z]}{k} - [\frac{[z]}{k}] < 1$

2.3. $[z] < k[\frac{[z]}{k}] + k$

2.4. $[z] \leqslant k[\frac{[z]}{k}] + k - 1$

2.5. $z < [z] + 1$

2.6. $z < k[\frac{[z]}{k}] + k$

2.7. $\frac{z}{k} < [\frac{[z]}{k}] + 1$

2.8. $[\frac{z}{k}] \leqslant [\frac{[z]}{k}]$ *QED*

D o w ó d p o p r a w n o ś c i a l g o r y t m u :

1. Rozważmy $Ax^2 + 2Bx + C = 0,\ A, B, C \in \mathbb{Z},\ NWD(A, B, C) = 1,\ A > 0$

2. $x = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{A},\ D = B^2 - AC,\ D > 0$

3. $x = \frac{\mp B + \sqrt{D}}{\pm A}$

4. $E_0 := \pm A,\ F_0 := \mp B,\ G_0 := \pm C$

5. $x = \frac{F_0 + \sqrt{D}}{E_0},\ E_0, F_0, G_0 \in \mathbb{Z},\ E_0 \neq 0,\ F_0^2 - E_0 G_0 = D > 0$

6. $a_0 := [x],\ x_1 : x = a_0 + \frac{1}{x_1}$

7. $x_1 = \frac{1}{x - a_0} = \frac{E_0}{F_0 - a_0 E_0 + \sqrt{D}} = \frac{E_0(a_0 E_0 - F_0 + \sqrt{D})}{D - (a - 0E_0 - F_0)^2}$

8. $F_1 := a_0 E_0 - F_0,\ E_1 := \frac{D - F_1^2}{E_0},\ G_1 := -E_0$

9. $E_1 \neq 0$, bo $\sqrt{D}$ jest niewymierny

10. $E_1 = \frac{D - (a_0 E_0 - F_0)^2}{E_0} = \frac{D - F_0^2}{E_0} - a_0^2 F_0 + 2a_0 F_0 = -G_0 - a_0^2 E_0 + 2a_0 F_0$

11. $x_1 = \frac{F_1 + \sqrt{D}}{E_1},\ E_1, F_1, G_1 \in \mathbb{Z},\ F_1^2 - E_1 G_1 = D$

12. Ogólnie, rozumując indukcyjnie, jeśli założymy, że przy pewnym n zachodzą wzory:

$$F_n^2 - E_n G_n = D,\ x_n = \frac{F_n + \sqrt{D}}{E_n},\ E_n, F_n, G_n \in \mathbb{Z},\ E_n \neq 0$$

to wyznaczając ze wzorów:

$$a_n := [x_n],\ F_{n+1} := a_n E_n - F_n,\ E_{n+1} := \frac{D - F_{n+1}^2}{E_n},\ G_{n+1 := -E_n}$$

będziemy mieli:

$$F_{n+1}^2 - E_{n+1} G_{n+1} = D,\ x_{n+1} = \frac{F_{n+1} + \sqrt{D}}{E_{n+1}},\ E_{n+1}, F_{n+1}, G_{n+1} \in \mathbb{Z},\ E_{n+1} \neq 0$$

13. $a_n = [\frac{F_n+\sqrt{D}}{E_n}]$

14. z lematu: $a_n = [\frac{F_n+[\sqrt{D}]}{E_n}]$

15. $H := [\sqrt{D}]$

16. $a_n = [\frac{F_n+H}{E_n}]$ *QED*

Umowa notacyjna: Rozwinięcie (2) piszemy:

$$x = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, \overline{a_p, \ldots, a_{p+s-1}})$$

pisząc kreskę nad wyrazami tworzącymi okres. ❏

Przykład **4.1** $9x^2 - 6x - 1 = 0$
$H = [\sqrt{18}] = 4,\ E_0 = 9,\ F_0 = 3$
$a_0 = [\frac{3+4}{9}] = 0,\ F_1 = 0 \cdot 9 - 3 = -3,\ E_1 = \frac{18-9}{9} = 1$
$a_1 = [\frac{-3+4}{1}] = 1,\ F_2 = 1 \cdot 1 + 3 = 4,\ E_2 = \frac{18-16}{1} = 2$
$a_2 = [\frac{4+4}{2}] = 4,\ F_3 = 4 \cdot 2 - 4 = 4,\ E_3 = \frac{18-16}{2} = 1$
$a_3 = [\frac{4+4}{1}] = 8,\ F_4 = 8 \cdot 1 - 4 = 4,\ E_4 = \frac{18-16}{1} = 2$
Jest więc:

$$x = (0, 1, \overline{4, 8})$$ ❏

Twierdzenie **4.2** (odwrotne do twierdzenia Lagrange'a) *Każdy ułamek łańcuchowy może być wyrażony jako rozwinięcie pewnej niewymierności drugiego stopnia.*

D o w ó d :

1. (przypadek, kiedy uważany ułamek daje okres czysty)

1.1. $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}$

1.2. istnieje $s \in \mathbb{N} : a_{n+s} = a_n,\ n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

1.3. $R_n := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}}$

1.4. $R_{n+s} := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + a_{s-1} + \frac{1}{R_n}}} = \frac{P_{s-1}R_n + P_{s-2}}{Q_{s-1}R_n + Q_{s-2}}$

Uwaga: Załóżmy, że $R_n \to x$

1.5. $x := \lim_{n\to\infty} R_n$

1.6. $x > 0$, bo $a_0 = a_s \in \mathbb{N}$

1.7. $x = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{n+s}$

1.8. $x = \frac{P_{s-1}x + P_{s-2}}{Q_{s-1}x + Q_{s-2}}$

1.9. x jest dodatnim pierwiastkiem równania:

$$Q_{s-1}x^2 + (Q_{s-2} - P_{s-1})x - P_{s-2} = 0$$

1.10. Drugi pierwiastek x' jest ujemny, gdyż Q_{s-1} i $-P_{s-2}$ są przeciwnych znaków.

Pokażemy, że dodatni pierwiastek równania z punktu 1.9. daje rozwinięcie na ułamek łańcuchowy z punktu 1.1.

1.11. $x = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+a_{s-1}+\frac{1}{x}}} = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+a_{s-1}+\frac{1}{a_0+\cdots+a_{s-1}+\frac{1}{x}}}} =$
$a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+a_{2s-1}+\frac{1}{x}}}$

1.12. Ogólnie: $x = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+a_{ks-1}+\frac{1}{x}}}$

1.13. $x = \frac{P_{ks-1}x+P_{ks-2}}{Q_{ks-1}x+Q_{ks-2}}$

1.14. $|x - R_{ks-1}| = |\frac{P_{ks-1}x+P_{ks-2}}{Q_{ks-1}x+Q_{ks-2}} - \frac{P_{ks-1}}{Q_{ks-2}}| = |\frac{1}{(Q_{ks-1}x+Q_{ks-2})Q_{ks-1}}|$

1.15. $|x - R_{ks-1}| < \epsilon$ dla dostatecznie dużych k, powiedzmy $k \geqslant \mu$

1.16. $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{k\in\mathbb{N}} k > \mu$ oraz $ks - 1 > n$

1.17. $\xi := a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}+\frac{1}{a_{n+3}+\cdots+\frac{1}{a_{ks-1}}}}$

1.18. $R_{ks-1} = \frac{P_n\xi+Q_{n-1}}{Q_n\xi+Q_{n-1}}$

1.19. $\xi \geqslant 1$

1.20. $|R_{ks-1} - R_n| = \frac{1}{(Q_n\xi+Q_{n-1})Q_n} < \frac{1}{Q_n^2}$

1.21. $|x - R_n| \leqslant |x - R_{ks-1}| + |R_{ks-1} - R_s| < \frac{1}{Q_n^2} + \epsilon$

2. (przypadek, gdy ułamek jest okresowy o okresie nieczystym, rozpoczynającym się od a_k)

2.1. $a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots}}$

2.2. $a_k + \frac{1}{a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+2}+\cdots}}$ ma okres czysty

2.3. $R'_n := a_k + \frac{1}{a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+2}+\cdots}+\frac{1}{a_n}}$

2.4. $\xi := \lim_{n\to\infty} R'_n$

2.5. ξ jest pierwiastkiem dodatnim pewnego równania stopnia 2 o współczynnikach całkowitych;

$$A\xi^2 + B\xi + C = 0$$

2.6. $R_n = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+a_{k-1}+\frac{1}{R'_{n-k}}}}$

2.7. $R_n = \frac{P_{k-1}R'_{n-k}+P_{k-2}}{Q_{k-1}R'_{n-k}+Q_{k-2}}$

2.8. $\lim_{n\to\infty} R_n = x = \frac{P_{k-1}\xi+P_{k-2}}{Q_{k-1}\xi+Q_{k-2}}$

2.9. $(Q_{k-1}x - P_{k-1})\xi = P_{k-2} - Q_{k-2}x$

2.10. $Q_{k-1}x - P_{k-1} \neq 0$

2.10.1. (hip.) $Q_{k-1}x - P_{k-1} = 0$

2.10.2. $P_{k-2} - Q_{k-2}x = 0$

2.10.3. $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ - sprzeczność

2.11. $\xi = \frac{P_{k-2}-Q_{k-2}x}{Q_{k-1}x-P_{k-1}}$

2.12. $A(P_{k-2} - Q_{k-2}x)^2 + B(P_{k-2} - Q_{k-2}x)(Q_{k-1}x - P_{k-1}) + C(Q_{k-1}x - P_{k-1})^2 = 0$

2.13. Równanie powyższe nie jest tożsamością x

2.13.1. (hip.) współczynnik przy x^2 jest 0

2.10.2. $AQ_{k-2}^2 - BQ_{k-1}Q_{k-2} + CQ_{k-1}^2 = 0$ - sprzeczność

2.14. Dowiedliśmy więc, że liczba x spełnia pewne równanie o współczynnikach całkowitych, a ponieważ $x = \lim_{n\to\infty}$, więc x jest wartością ułamka łańcuchowego z punktu 2.1. *QED*

Uwaga **4.1** *Punkty 1.5. - 1.9. dowodu powyższego twierdzenia dają praktyczną metodę wyznaczania wartości ułamka łańcuchowego o okresie czystym. Przykładowo chcemy znaleźć wartość ułamka o o rozwinięciu:*

$$a + \frac{1}{b+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\cdots}}}$$

Mamy:

$$s = 2,\ P_{s-2} = P_0 = a,\ Q_{s-2} = Q_0 = 1,\ P_{s-1} = P_1 = ab+1,\ Q_s - 1 = Q_1 = b$$

I otrzymujemy równanie:

$$bx^2 - abx - a = 0$$

które posiada pierwiastek dodatni:

$$x = \frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}$$

Na przykład dla $a = 2$ i $b = 1$ mamy:

$$2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\cdots}}} = 1 + \sqrt{3}$$

Skąd w szczególności:

$$\sqrt{3} = (1, \overline{1, 2})$$

Bibliografia

[1] Michał Szurek, *Ułamki łańcuchowe*, Młody Technik, 1/1989

[2] Wacław Sierpiński, *Teoria liczb*, Wydawnictwo Kasy im. Mianowskiego Instytutu Popierania Polskiej Twórczości Naukowej, Warszawa 1925

[3] Wacław Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, Biblioteka Matematyczna tom 7, PWN, Warszawa 1959

[4] Andrzej Grzegorczyk, *Zarys arytmetyki teoretycznej*, Biblioteka Matematyczna tom 39, PWN, Warszawa 1971