ROZDZIAŁ 1

Porządki, waluacje i ciała rzeczywiste

1. Ciała i pier'scienie uporządkowane

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką.

1.1. Definicja. *Zbiór $T \subsetneq A$ nazywamy* **pre-porządkiem** *pierścienia A, gdy:*
(1) $\bigwedge_{t_1,t_2\in T} t_1 + t_2 \in T$,
(2) $\bigwedge_{t_1,t_2\in T} t_1 \cdot t_2 \in T$,
(3) $\bigwedge_{a\in A} a^2 \in T$.

1.2. Przykłady. (a) Rozważmy pierścień $\mathbb{Z}$. Wówczas zbiór $T = \{a \in \mathbb{Z} : a \geqslant 0\}$ jest pre-porządkiem.

(b) Rozważmy pierścień $\mathbb{R}$. Wówczas zbiór $T = \{a \in \mathbb{R} : a \geqslant 0\}$ jest pre-porządkiem.

(c) Rozważmy dowolny pierścień A. Wówczas zbiór $T = \sum A^2 = \{\sum_{i=1}^n a_i^2 : n \in \mathbb{N}, a_i \in A\}$ wszystkich sum kwadratów pierścienia A jest pre-porządkiem. Jest to także podgrupa grupy elementów odwracalnych $\mathsf{U}(A)$ pierścienia A - nazywamy ją **grupą sum kwadratów**.

Istotnie, bez trudu sprawdzamy, że $\sum A^2$ jest pre-porządkiem. Aby przekonać się, że jest podgrupą $\mathsf{U}(A)$ ustalmy $a, b \in \sum A^2$ i zauważmy, że $ab^{-1} = abb^{-1}b^{-1} = ab(b^{-1})^2 \in \sum A^2$.

1.3. Uwaga. *Niech $\{P_i : i \in I\}$ będzie rodziną pre-porządków pierścienia A. Wówczas $\bigcap_{i\in I} P_i$ jest pre-porządkiem.*

Dowód jest bardzo prosty i go tu pomijamy. W świetle powyższej uwagi ma sens poniższa definicja.

1.4. Definicja. (a) *Najmniejszy pre-porządek zawierający dany zbiór $S \subset A$ nazywamy* **pre-porządkiem generowanym przez** S *i oznaczamy* $\sum A^2[S]$.

(b) *Najmniejszy pre-porządek zawierający dany zbiór $S \subset A$ i pre-porządek T nazywamy* **pre-porządkiem generowanym przez** S **nad** T *i oznaczamy* $T[S]$.

1.5. Uwaga. Niech T będzie pre-porządkiem, $S = \{g_1, \dots , g_s\} \subset A$ dowolnym zbiorem. Wówczas:
(i) $T[S] = \{\sum_{(e_1,\dots,e_s)\in\{0,1\}^s} t_{(e_1,\dots,e_s)} \cdot g_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot g_s^{e_s} : t_{(e_1,\dots,e_s)} \in T\}$,
(ii) $\sum A^2[S] = \{\sum_{(e_1,\dots,e_s)\in\{0,1\}^s} \sigma_{(e_1,\dots,e_s)} \cdot g_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot g_s^{e_s} : \sigma_{(e_1,\dots,e_s)} \in \sum A^2\}$.

D o w ó d. (i) Oznaczmy:

$$A_1 = \{ \sum_{(e_1,\dots,e_s)\in\{0,1\}^s} t_{(e_1,\dots,e_s)} \cdot g_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot g_s^{e_s} : t_{(e_1,\dots,e_s)} \in T\}.$$

Bez trudu sprawdzamy, że A_1 jest pre-porządkiem pierścienia A, wystarczy więc pokazać, że $A_1 = T[S]$. Inkluzja $(\supset)$ jest oczywista, a w celu wykazania inkluzji przeciwnej $(\subset)$, ustalmy

$\sum_{(e_1,\dots,e_s)\in\{0,1\}^s} t_{(e_1,\dots,e_s)}\cdot g_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot g_s^{e_s} \in A_1$. Aby pokazać, że element ten należy do $T[S]$ wystarczy sprawdzić, że dla wszystkich $(e_1,\dots,e_s)\in\{0,1\}^s$ do $T[S]$ należą elementy $t_{(e_1,\dots,e_s)}\cdot g_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot g_s^{e_s}$ - a jest tak w istocie, gdyż dla ustalonego $(e_1,\dots,e_s)\in\{0,1\}^s$ element $t_{(e_1,\dots,e_s)}\cdot g_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot g_s^{e_s}$ jest iloczynem elementów z $T[S]$.

(ii) Dowód tej części twierdzenia wynika bezpośrednio z części (i). □

1.6. Definicja. *Zbiór $P \subsetneq A$ nazywamy* **porządkiem** *pierścienia A, gdy:*

(1) $\bigwedge_{p_1,p_2\in P} p_1+p_2\in P$,
(2) $\bigwedge_{p_1,p_2\in P} p_1\cdot p_2\in P$,
(3) $\bigwedge_{a\in A} a\in P \vee -a\in P$,
(4) *$P\cap -P$ jest ideałem pierwszym, gdzie $-P=\{a\in A : -a\in P\}$.*

Ponadto ideał $P\cap -P$ nazywamy **nośnikiem porządku**.

1.7. Przykłady. (a) Podobnie jak dla pre-porządków, zbiór $P=\{a\in\mathbb{Z} : a\geqslant 0\}$ jest porządkiem w pierścieniu $\mathbb{Z}$, a zbiór $P=\{a\in\mathbb{R} : a\geqslant 0\}$ - porządkiem w $\mathbb{R}$.

(b) Rozważmy pierścień $\mathbb{R}[X]$ wielomianów rzeczywistych. Zbiór $P=\{a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\in\mathbb{R}[X] : a_n\geqslant 0\}$ jest porządkiem w tym pierścieniu.

(c) Rozważmy dowolny pierścień całkowity A z porządkiem P i niech (A) będzie jego ciałem ułamków. Wówczas zbiór $P'=\{\frac{a}{b}\in(A) : a\cdot b\in P\}$ jest porządkiem w ciele (A).

Pojęcie ciała uporządkowanego wprowadził w 1898 roku D. Hilbert w związku z badaniami podstaw geometrii. Teorię tę rozwinęli - wraz z podaniem głównych twierdzeń o pierścieniach i ciałach uporządkowanych - E. Artin i O. Schreier i dwóch klasycznych pracach z 1927 roku (por. [**2**] i [**3**])

1.8. Oznaczenia. Dla ustalonego porządku P pierścienia A oznaczamy:

(1) $a\geqslant_P b$, gdy $a-b\in P$,
(2) $a=_P b$, gdy $a\geqslant_p b$ i $b\geqslant_P a$,
(3) $a>_P b$, gdy $\sim b\geqslant_P a$.

Ponadto jeżeli $T\subset A$ jest pre-porządkiem, to oznaczmy:

$$X_T=\{P\subset A : P \text{ jest porządkiem i } T\subset P\}.$$

1.9. Uwaga. Załóżmy, że F jest ciałem, a P jego porządkiem. Wówczas dla $a,b\in F$ $a=_P b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

D o w ó d. Inkluzja ($\Leftarrow$) jest oczywista, a dla dowodu inkluzji ($\Rightarrow$) załóżmy, że dla pewnych $a,b\in F$, $a=_P b$. Wówczas $a-b\in P$ i $b-a\in P$, więc $a-b\in P\cap -P$. Ale $P\cap -P$ jest ideałem pierwszym, a F jest ciałem, skąd $P\cap -P=\{0\}$. □

1.10. Uwaga. Niech F będzie ciałem. Relacja $\geqslant\subset F\times F$ jest relacją liniowego porządku, tj.

(i) (zwrotność) $\bigwedge_{a\in F} a\geqslant a$,
(ii) (antysymetria) $\bigwedge_{a,b\in F} a\geqslant b\wedge b\geqslant a\Rightarrow a=b$,
(iii) (przechodniość) $\bigwedge_{a,b,c\in F} a\geqslant b\wedge b\geqslant c\Rightarrow a\geqslant c$,
(iv) (spójność) $\bigwedge_{a,b\in F} a\geqslant b\vee b\geqslant a\vee a=b$,

która ponadto spełnia warunki:

(v) (zgodność z dodawaniem) $\bigwedge_{a,b,c \in F} a \geqslant b \Rightarrow a + c \geqslant b + c$,

(vi) (zgodność z mnożeniem) $\bigwedge_{a,b \in F} \bigwedge_{F \ni c \geqslant 0} a \geqslant b \Rightarrow a \cdot c \geqslant b \cdot c$, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $P = \{a \in F : a \geqslant 0\}$ jest porządkiem.

D o w ó d. Dowód implikacji ($\Leftarrow$) sprowadza się do serii nietrudnych rachunków. Podobnie wynikanie ($\Rightarrow$) jest proste w dowodzie - dla przykładu pokażemy, że $P \cap -P = \{0\}$.

Aby sprawdzić prawdziwość inkluzji ($\supset$) zauważmy, że $0 \geqslant 0$ i $-0 = 0 \geqslant 0$, więc $0 \in P \cap -P$. Na odwrót, aby pokazać zawieranie ($\subset$) ustalmy $a \in P \cap -P$ i przypuśćmy, że $a \neq 0$. Wówczas $a \geqslant 0$ i $-a \geqslant 0$, skąd $0 \geqslant a$. Zatem $a = 0$, co jest sprzecznością. □

1.11. Definicja. *Zbiór wszystkich porządków pierścienia A oznaczamy $\mathsf{Spec}_R(A)$. W zbiorze tym wprowadzamy topologię przez zbiory podbazowe:*

$$U(a) = \{P \in \mathsf{Spec}_R(A) : a >_P 0\}, \quad a \in A.$$

Tak skonstruowaną przestrzeń topologiczną nazywamy **spektrum rzeczywistym** *pierścienia A.*

1.12. Przykład. Rozważmy pierścień $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ i jego spektrum rzeczywiste. W przestrzeń $\mathsf{Spec}_R(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n])$ naturalnie zanurza się przestrzeń $\mathbb{R}^n$; istotnie, bez trudu sprawdzamy, że odwzorowanie $\Sigma : \mathbb{R}^n \to \mathsf{Spec}_R(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n])$ dane wzorem:

$$\Sigma(x_1, \ldots, x_n) = \{f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] : f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0\}$$

jest dobrze określoną ciągłą injekcją. Opis wszystkich elementów przestrzeni $\mathsf{Spec}_R(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n])$ jest na ogół dosyć skomplikowany - stosunkowo prosty jest jedynie przypadek $n = 1$.

1.13. Uwaga. Porządki w pierścieniu A są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z parami (I, P'), gdzie I jest ideałem pierwszym pierścienia A, zaś P' jest porządkiem w ciele ułamków (A/I). Dokładniej, równoliczność ustala odwzorowanie dane wzorem:

$$\Theta(P) = (P \cap -P, \{\frac{a + P \cap -P}{b + P \cap -P} \in (A/P \cap -P) : a \cdot b \in P\}).$$

Dowód sprowadza się do prostego sprawdzenia niezbędnych warunków i zostanie przez nas pominięty.

ROZDZIAŁ 2

Wybrane techniki specjalizacji

2. Twierdzenie Langa o homomorfizmie

2.1. Twierdzenie Langa o homomorfizmie. *Niech K będzie ciałem i niech $K \subset K(x_1, \dots, x_n)$ będzie jego skończnie generowanym rozszerzeniem. Niech $K(x_1, \dots, x_n)$ będzie ciałem uporządkowanym (w szczególności K również jest uporządkowane), a R rzeczywistym domknięciem ciała K indukującym w ciałach K i $K(x_1, \dots, x_n)$ to samo uporządkowanie. Wówczas istnieje K-zanurzenie $\phi : K(x_1, \dots, x_n) \to R$.*

D o w ó d. –ooOO PoTeM OOoo–

□

2.2. Wniosek (Zasada transferowa Tarskiego). *Niech K będzie ciałem uporządkowanym, niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym takim, że $R \subset K$. Niech ponadto $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ będzie rozwiązaniem pewnego skończonego układu równań i nierówności algebraicznych o współczynnikach z ciała R. Wówczas istnieje rozwiązanie $(y_1, \dots, y_n) \in R^n$ tego samego układu.*

D o w ó d. –ooOO PoTeM OOoo–

□

ROZDZIAŁ 3

Teoria dodatnich wartości wielomianów

W rozdziale tym podamy kilka z ogólnej klasy twierdzeń zwanych „positivstellensatze” . Bardzo niedoskonała próba przetłumaczenia tego zwrotu to właśnie tytuł ninejszego rozdziału. Punktem wyjścia do naszych rozważań będzie jedna z wersji twierdzenia Stengle'a z 1974 roku. Jest to pierwsze z osławionych „positivstellensatz” - analogonów twierdzenia Hilberta o zerach z 1893 roku. Przypomnijmy, że twierdzenie Hilberta o zerach - „nullstellensatz” - podaje warunki konieczne i dostateczne na to, aby wielomian o współczynnikach z ciała algebraicznie domkniętego był wielomianem zerującym się na pewnym zbiorze algebraicznym. Twierdzenie Stengle'a ideowo jest bardzo podobne - podaje warunki na to, jaki powinien być wielomian o współczynnikach z ciała rzeczywiście domkniętego, przyjmujący wartości nieujemne na pewnym zbiorze semialgebraicznym.

Twierdzenie Stengla udowodnimy w pełnej ogólności dla dowolnych pierścieni z porządkiem. Wersję o której mowa powyżej dostaniemy jako wniosek, przy czym w dowodzie tego wniosku istotną rolę będzie grała zasada transferowa Tarskiego. Podamy następnie twierdzenie Kadisona - Dubois z roku 1967 i wykorzystamy je do dowodu twierdzenia Schmüdgena z 1991 roku - pięknego uproszczenia twierdzenia Stengle'a w przypadku, gdy rozważany zbiór semialgebraiczny jest zwarty. Jako wniosek końcowy tego rozdziału rozwiążemy pewien problem z pogranicza fizyki matematycznej i analizy funkcjonalnej, wiążący się z definiowaniem momentu bezwładności bryły sztywnej.

3. Ogólny positivstellensatz Stengle'a

Podamy zapowiadaną wcześniej ogólną wersję twierdzenia Stengle'a. Prezentowany dowód pochodzi z książki Marshalla [**12**], inne uogólnienia znaleźć można w [**1**], a także w klasycznej książce Bochnaka, Coste'y i Roya [**5**] czy też Lama [**11**].

W całym tym rozdziale zakładamy, że A jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

3.1. Twierdzenie (Ogólny positivstellensatz Stengle'a). *Niech T będzie pre-porządkiem w pierścieniu A, niech $a \in A$. Wówczas:*

(i) $a >_P 0$ *dla* $P \in X_T$ *wtw. gdy* $\bigvee_{p,q \in T} pa = 1 + q$,

(ii) $a \geqslant_P 0$ *dla* $P \in X_T$ *wtw. gdy* $\bigvee_{p,q \in T} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} pa = a^{2m} + q$,

(iii) $a =_P 0$ *dla* $P \in X_T$ *wtw. gdy* $\bigvee_{m \in \mathbb{N}} -a^{2m} \in T$.

Dowód porzedzimy lematem:

3.2. Lemat. *Niech P będzie maksymalnym pre-porządkiem pierścienia A takim, że $-1 \notin P$. Wówczas P jest porządkiem.*

D o w ó d. Ponieważ P jest pre-porządkiem, więc jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie. Pokażemy więc, że dla wszelkich $a \in A$ zachodzi warunek $a \in P$ lub $-a \in P$. Istotnie, ustalmy $a \in A$ i przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że $a \notin P$ i $-a \notin P$. Rozważmy pre-porządki $P[\{a\}] = \{p_1 + p_2 a : p_1, p_2 \in P\}$ oraz $P[\{-a\}] = \{p_1 - p_2 a : p_1, p_2 \in P\}$. Oczywiście $P \subsetneq P[\{a\}]$ i $P \subsetneq P[\{-a\}]$ i ponieważ P jest maksymalnym pre-porządkiem nie zawierającym -1, więc $-1 \in P[\{a\}]$ oraz $-1 \in P[\{-a\}]$. Zatem dla pewnych $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P$:

$$-1 = p_1 + p_2 a, \quad -1 = q_1 - q_2 a$$

skąd $-p_2 a = 1 + p_1$ i $q_2 a = 1 + q_1$, co po pomnożeniu stronami daje:

$$-p_2 q_2 a^2 = (1 + p_1)(1 + q_1) = 1 + p_1 + q_1 + p_1 q_1.$$

Wobec tego $-1 = p_1 + q_1 + p_1 q_1 + p_2 q_2 a^2 \in P$, jako suma elementów z P, co daje sprzeczność.

Pokażemy, że $P \cap -P$ jest ideałem pierwszym. Sprawdzenie, że jest to ideał nie nastręcza trudności - dla przykładu zobaczmy, że jest to podgrupa grupy addytywnej pierścienia; faktycznie, dla ustalonych $p_1, p_2 \in P \cap -P$ mamy, że $p_1 \in P$, $-p_1 \in P$, $p_2 \in P$ oraz $-p_2 \in P$, a zatem $p_1 - p_2 \in P$ oraz $-p_1 + p_2 \in P$. Podobnie sprawdzamy, że dowolny element pierścienia A przemnożony przez element z $P \cap -P$ staje się elementem $P \cap -P$. Aby sprawdzić, że jest to ideał pierwszy, ustalmy $a, b \in A$ i załóżmy, że $ab \in P \cap -P$. Przypuśćmy, że $a \notin P \cap -P$ i $b \notin P \cap -P$. Możemy bez straty ogólności założyć (zastępując ewentualnie a przez $-a$ i b przez $-b$), że $a \notin P$ oraz $b \notin P$. Rozważmy pre-porządki $P[\{a\}] = \{p_1 + p_2 a : p_1, p_2 \in P\}$ oraz $P[\{b\}] = \{p_1 + p_2 b : p_1, p_2 \in P\}$. Oczywiście $P \subsetneq P[\{a\}]$ i $P \subsetneq P[\{b\}]$, więc $-1 \in P[\{a\}]$ oraz $-1 \in P[\{b\}]$, czyli dla pewnych $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P$:

$$-1 = p_1 + p_2 a, \quad -1 = q_1 + q_2 b$$

skąd $p_2 a = -1 - p_1$ i $q_2 b = -1 - q_1$, co po pomnożeniu stronami daje:

$$p_2 q_2 ab = (1 + p_1)(1 + q_1) = 1 + p_1 + q_1 + p_1 q_1.$$

Wobec tego $-1 = p_1 + q_1 + p_1 q_1 - p_2 q_2 a^2 \in P$, gdyż $p_1, q_1, p_1 q_1, p_2 q_2 \in P$ oraz $-ab \in P$, co daje sprzeczność. □

Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia Stengle'a.

D o w ó d. Zacznijmy od części (i). Dowód implikacji $(\Leftarrow)$ jest w każdym przypadku bardzo prosty - przeprowadzimy go tylko dla części (i). Załóżmy więc, że dla $a \in A$ i dla $p, q \in T$, $pa = 1 + q$. Przypuśćmy więc, iż nie jest prawdą, że $a >_P 0$ dla wszystkich $P \in X_T$, czyli że $-a \geqslant_P 0$, lub - inaczej mówiąc - $-a \in P$ dla pewnego $P \in X_T$. Wobec tego $-1 = q - pa \in P$, skąd wynika, że $P = A$; istotnie, inkluzja $(\subset)$ jest zawsze prawdziwa, a dla dowodu inkluzji $(\supset)$ ustalmy $a \in A$ i zauważmy, że wtedy $a \in P$ lub $-a \in P$, przy czym z drugiego przypadku dostajemy, że również $a = (-1)(-a) \in P$. Dostaliśmy więc sprzeczność z definicją porządku.

Aby udowodnić wynikanie $(\Rightarrow)$ załóżmy, że $a >_P 0$ dla $P \in X_T$. Przypuśćmy, że dla wszelkich $p, q \in T$ $pa \neq 1 + q$, czyli $-1 \neq q - pa$. Oznacza to, że $-1 \neq \{q - pa : p, q \in T\} = T[\{-a\}]$. Wobec lematu **3.2** istnieje porządek P pierścienia A taki, że $T[\{-a\}] \subset P$. W szczególności $T \subset P$, więc $P \in X_T$. Ale z konstrukcji P wynika, że $-a \in P$, co daje sprzeczność.

Udowodnimy teraz implikację ($\Rightarrow$) w punkcie (ii). Załóżmy, że $a \geqslant_P 0$ dla $P \in X_T$. Rozważmy zbiór $S = \{a^n : n \geqslant 0\}$. Oczywiście S jest zbiorem multyplikatywnym, możemy więc rozpatrywać pierścień ułamków $S^{-1}A$. Niech $T_1 = \{\frac{t}{a^{2m}} : t \in T, m \geqslant 0\}$. Bez trudu sprawdzamy, że zbiór T_1 jest pre-porządkiem. Zauważmy też, że $-1 \notin T_1$; istotnie, gdyby $-1 = \frac{-1}{1} \in T_1$, to $-1 \in T \subset P$, co, podobnie jak przez chwilą, doprowadziłoby nas do równości $P = A$. Tak więc wobec lematu **3.2** istnieje porządek P_1 pierścienia $S^{-1}A$ taki, że $T_1 \subset P_1$. Niech $P_0 = \{b \in A : \frac{b}{1} \in P_1\}$. Bez trudu sprawdzamy, że jest to porządek w pierścieniu A oraz $T \subset P_0$. Zatem $P_0 \in X_T$ i wobec założenia $a \geqslant_{P_0} 0$. Pokażemy jednak, że $\frac{a}{1} >_{P_1} \frac{0}{1}$; oczywiście $\frac{a}{1} \geqslant_{P_1} \frac{0}{1}$, przypuśćmy więc, że $\frac{a}{1} =_{P_1} \frac{0}{1}$, czyli $\frac{0}{1} \geqslant_{P_1} \frac{a}{1}$. Zauważmy, że $\frac{1}{a} \geqslant_{P_1} \frac{0}{1}$, bo $\frac{1}{a} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a^2} \in P_1$. Zatem $\frac{0}{1} \cdot \frac{1}{a} \geqslant_{P_1} \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a}$, czyli $\frac{0}{1} \geqslant_{P_1} \frac{1}{1}$, skąd $\frac{-1}{1} \geqslant_{P_1} \frac{0}{1}$, a zatem $\frac{-1}{1} \in P_1$, czyli $-1 \in P_0$, co - podobnie jak wcześniej - doprowadza nas do sprzeczności.

Wobec udowodnionego już punktu (i) zastosowanego do pierścienia $S^{-1}A$ z porządkiem P_1, istnieją $p'_1, q'_1 \in T_1$ takie, że $p'_1 \frac{a}{1} = \frac{1}{1} + q'_1$. Niech $p'_1 = \frac{p_1}{a^{2m_1}}$, $q'_1 = \frac{q_1}{a^{2m_2}}$, $p_1, q_1 \in T$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Mnożąc otrzymany związek przez a^m, gdzie $m = m_1 \cdot m_2$ i kładąc $p = p_1 a^{2m_2}$, $q = q_1 a^{2m_1}$, dostajemy tezę.

Dla dowodu implikacji ($\Rightarrow$) punktu (iii) załóżmy, że $a =_P 0$ dla $P \in X_T$, czyli że $a \geqslant_P 0$ i $-a \geqslant_P 0$ dla $P \in X_T$. Wobec udowodnionego już punktu (ii), istnieją $p_1, q_1, p_2, q_2 \in T$ oraz $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ takie, że:

$$p_1 a = a^{2m_1} + q_1, \quad -p_2 a = a^{2m_2} + q_2$$

skąd po pomnożeniu stronami:

$$-p_1 p_2 a^2 = a^{2(m_1+m_2)} + a^{2m_1} q_2 + a^{2m_2} q_1 + q_1 q_2$$

czyli kładąc $m = m_1 + m_2$ dostajemy, że $-a^{2m} = p_1 p_2 a^2 + a^{2m_1} q_2 + a^{2m_2} q_1 + q_1 q_2 \in T$ □

Jako wniosek z powyższego ogólnego twierdzenia dostajemy twierdzenie Stengle'a w wersji udowodnionej po raz pierwszy w 1974 roku w pracy [**14**]:

3.3. Wniosek (Klasyczny positivstellensatz Stengle'a). *Rozważmy pierścień* $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ *i niech* $S = \{g_1, \dots, g_s\} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. *Niech* $K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g_i(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0, g_i \in S\}$ *będzie zbiorem semialgebraicznym związanym ze zbiorem* S, *a* $T = \sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2[S]$ *pre-porządkiem generowanym przez* S. *Niech* $a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. *Wówczas:*

(i) $a(x_1, \dots, x_n) > 0$ *dla* $(x_1, \dots, x_n) \in K$ *wtw. gdy* $\bigvee_{p,q \in T} pa = 1 + q$,
(ii) $a(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ *dla* $(x_1, \dots, x_n) \in K$ *wtw. gdy* $\bigvee_{p,q \in T} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} pa = a^{2m} + q$,
(iii) $a(x_1, \dots, x_n) = 0$ *dla* $(x_1, \dots, x_n) \in K$ *wtw. gdy* $\bigvee_{m \in \mathbb{N}} -a^{2m} \in T$.

Do dowodu potrzebny będzie nam następujący lemat:

3.4. Lemat. *Niech* P *będzie porządkiem w pierścieniu* A. *W ciele ułamków* $(A/P \cap -P)$ *zbiór*

$$P_1 = \{\frac{a + P \cap -P}{b + P \cap -P} : ab \in P\}$$

jest porządkiem. Porządek ten indukuje porządek P.

D o w ó d. Sprawdzenie, że P_1 jest porządkiem nie sprawia najmniejszych trudności, więc je pomijamy. Aby przekonać się, że porządek P_1 indukuje porządek P rozważmy następującą wieżę zanurzeń:

$$A \overset{\kappa}{\hookrightarrow} A/P\cap -P \overset{\phi}{\hookrightarrow} (A/P\cap -P)$$

gdzie $\kappa(a) = a + P\cap -P$ i $\phi(a + P\cap -P) = \frac{a+P\cap -P}{1+P\cap -P}$. Oczywiście $\phi(\kappa(A)) < (A/P\cap -P)$, tak więc jeżeli $\frac{a+P\cap -P}{1+P\cap -P} \in P_1$, to $a\cdot 1 = a \in P$. □

Przystępujemy do dowodu wniosku **3.3**.

D o w ó d. Podobnie jak w ogólnej wersji twierdzenia, implikacje ($\Leftarrow$) są trywialne, pozostawimy je więc bez dowodu. Aby udowodnić wszystkie wynikania przeciwne zauważmy, że wystarczy pokazać, iż jeśli $a(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$ dla $(x_1,\dots,x_n) \in K$, to $a \geqslant_P 0$ dla $P \in X_T$. W tym celu załóżmy, że $a(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$ dla $(x_1,\dots,x_n) \in K$ i przypuśćmy, że istnieje porządek $P \in X_T$ taki, że $\sim a \geqslant_P 0$, czyli że $a \notin P$. Wobec lematu **3.4** istnieje porządek P_1 w ciele $F = (\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]/P\cap -P)$. Rozważmy wieżę zanurzeń:

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] \hookrightarrow \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]/P\cap -P \hookrightarrow F.$$

Widzimy, że F jest rozszerzeniem ciała $\mathbb{R}$ i skoro $\mathbb{R}$ jest rzeczywiści domknięte, to ma jedyne uporządkowanie. Jest to więc uporządkowanie indukowane z pierścienia $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$, a zatem i z ciała F. Pokażemy, że istnieje punkt $(x_1,\dots,x_n) \in F^n$ taki, że $g_i(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$ i $a(x_1,\dots,x_n) < 0$.

Faktycznie, rozważmy punkt $(x_1,\dots,x_n)$, gdzie $x_i = \frac{X_i+P\cap -P}{1+P\cap -P}$. Zauważmy, że dla ustalonego $g_i \in S$, $g_i(X_1,\dots,X_n) = \sum bX_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}$, mamy:

$$g_i(x_1,\dots,x_n) = \sum b(\frac{X_1+P\cap -P}{1+P\cap -P})^{k_1}\dots(\frac{X_n+P\cap -P}{1+P\cap -P})^{k_n} = \frac{g_i(X_1,\dots,X_n)+P\cap -P}{1+P\cap -P} \in P_1,$$

ponieważ $g_i \in S \subset T \subset P$. Podobnie $a(x_1,\dots,x_n) = \frac{f(X_1,\dots,X_n)+P\cap -P}{1+P\cap -P} \notin P_1$, bo $a \notin P$.

Wobec zasady transferowej Tarskiego, istnieje punkt $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ taki, że $g_i(y_1,\dots,y_n) \geqslant 0$ i $a(y_1,\dots,y_n) < 0$, co doprowadza nas do sprzeczności. □

Jako szczególny przypadek otrzymanego twierdzenia dostajemy rozwiązanie 17-tego problemu Hilberta.

3.5. Wniosek (17-ty problem Hilberta). *Rozważmy pierścień $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ i niech $a \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$. Wówczas $a(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$ dla $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \sum \mathbb{R}(X_1,\dots,X_n)^2$.*

D o w ó d. Implikacja ($\Leftarrow$) jest oczywista, a dla dowodu wnioskowania odwrotnego załóżmy, że $a(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$ dla $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wobec wniosku **3.3** zastosowanego dla $S = \emptyset$ otrzymujemy $K = \mathbb{R}^n$ i $T = \sum \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]^2$. Zatem istnieją $p, q \in T$ oraz $m \in \mathbb{N}$ takie, że $pf = f^{2m} + q$. Stąd, gdy $f \neq 0$, to $p \neq 0$ i $q \neq 0$ oraz:

$$f = \frac{1}{p}(f^{2m}+q) = (\frac{1}{q})^2 p(f^{2m}+q) \in \sum \mathbb{R}(X_1,\dots,X_n)^2.$$

Gdy $f = 0$, to twierdzenie jest oczywiste. □

Jako kolejny - ostatni już - wniosek, dostajemy twierdzenie zwane „rzeczywistym nullstellensatz”, udowodnione po raz pierwszy przez Dubois w roku 1969 (por. [**7**]) i Rislera w 1970

3.6. Wniosek (Rzeczywisty nullstellensatz Dubois - Rislera). *Rozważmy pierścień* $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ *i niech* $S = \{g_1, \dots, g_s\} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. *Niech* $Z = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, g_i \in S\}$ *będzie zbiorem algebraicznym związanym ze zbiorem* S, *a* $I = < g_1, \dots, g_s >$ *ideałem generowanym przez zbiór* S. *Niech* $a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. *Wówczas* $a(x_1, \dots, x_n) = 0$ *dla* $(x_1, \dots, x_n) \in Z$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją* $\sigma \in \sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2$ *i* $m \in \mathbb{N}$ *takie, że* $a^{2m} - \sigma \in I$.

D o w ó d. Dowód implikacji ($\Leftarrow$) jest prosty i go tu opuścimy. Dla dowodu wynikania przeciwnego załóżmy, że $a(x_1, \dots, x_n) = 0$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in Z$. Wobec części (iii) wniosku **3.3** zastosowanej dla $S \cup -S$ otrzymujemy $K = Z$ i

$$T = \sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2[S \sum -S] = \{\sigma + \tau : \sigma \in \sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2, \tau \in I\},$$

a zatem istnieje $m \in \mathbb{N}$ oraz $\sigma \in \sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2$ i $\tau \in I$ takie, że $-a^{2m} = \sigma + \tau$, skąd $a^{2m} + \sigma = -\tau \in I$. □

4. Przestrzeń topologiczna homomorfizmów

W następnych trzech paragrafach przygotujemy teren pod dowód zapowiadanego twierdzenia Kadisona - Dubois. Będziemy odtąd zakładać, że A jest pierścieniem przemiennym z jedynką oraz $\mathbb{Q} \subset A$.

4.1. Oznaczenia. Począwszy od tego paragrafu przez χ oznaczać będziemy zbiór wszystkich homomorfizmów pierścienia A w pierścień $\mathbb{R}$. Ponadto dla ustalonego $a \in A$ będziemy rozważać homomorfizm $\widehat{a} : \chi \to \mathbb{R}$ zdefiniowany wzorem:

$$\widehat{a}(\phi) = \phi(a).$$

4.2. Definicja. **Przestrzenią topologiczną homomorfizmów** *nazywamy przestrzeń* χ *z topologią wprowadzoną przez rodzinę* $\{\widehat{a} : a \in A\}$ *(przy zwykłej topologii w* $\mathbb{R}$*).*

4.3. Uwaga. Zbiory:

$$U(\widehat{a}) = \{\phi \in \chi : \widehat{a}(\phi) > 0\} = \widehat{a}^{-1}((0, +\infty)), \quad a \in A$$

tworzą podbazę w topologii przestrzeni χ.

Dowód tej uwagi wynika bezpośrednio z definicji podbazy i określenia zbiorów otwartych w topologii wprowadzanej przez rodzinę odwzorowań (por. [**8**]). Podamy natomiast dowód następującej uwagi, wiążącej przestrzeń topologiczną χ ze spektrum rzeczywistym pierścienia A.

4.4. Uwaga. Topologia przestrzeni χ pokrywa się z topologią indukowaną z przestrzeni $\mathsf{Spec}_R(A)$ przez odwzorowanie $\Phi : \chi \to \mathsf{Spec}_R(A)$ dane wzorem:

$$\Phi(\phi) = P_\phi,$$

gdzie $P_\phi = \phi^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

D o w ó d. Bez większych trudności sprawdzamy, że dla ustalonego $\phi \in \chi$ zbiór P_ϕ jest porządkiem w A o nośniku równym $\ker \phi$. Wobec uwagi **4.3** i sposobu wprowadzania topologii w spektrum rzeczywistym, wystarczy sprawdzić, że dla ustalonego $a \in A$ zachodzi związek $U(\widehat{a}) = \Phi^{-1}(U(a))$, czyli $\widehat{a}(\phi) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a >_{P_\phi} 0$, dla $\phi \in \chi$.

Isotnie, ustalmy $\phi \in \chi$ i zauważmy, że $\widehat{a}(\phi) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(a) > 0$ lub inaczej $a \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^+) = P_\phi$. Pozostaje więc sprawdzić, że jeśli $P_\phi = P_\psi$, to $\phi = \psi$. Załóżmy więc, że $\phi \neq \psi$, czyli że dla pewnego $a \in A$ zachodzi - na przykład - $\phi(a) < \psi(a)$. Wówczas dla pewnego $r \in \mathbb{Q}$ mamy $\phi(a) < r < \psi(a)$, skąd $a - r \notin P_\phi$, ale $a - r \in P_\psi$. □

4.5. Uwaga. Odwzorowanie $\Psi : A \to C(\chi, \mathbb{R})$ dane wzorem

$$\Psi(a) = \widehat{a}$$

jest homomorfizmem pierścieni.

Dowód sprowadza się do prostych rachunków, więc go pominiemy. Jak się wydaje, szczególnie interesujący jest przypadek, gdy w roli pierścienia A występuje pierścień wielomianów rzeczywistych. Wówczas topologia przestrzeni χ ma bardzo czytelny opis, który postaramy się teraz przybliżyć.

4.6. Uwaga. Odwzorowanie $\Gamma : \mathsf{Hom}\,(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ dane wzorem

$$\Gamma(\phi) = (\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n))$$

jest izomorfizmem pierścieni.

D o w ó d. Faktycznie, bez trudu sprawdzamy, że jest to homomorfizm, oczywiste jest również to, iż jest to surjekcja. Aby przekonać się, że mamy do czynienia z injekcją zauważmy, że jedynym automorfizmem ciała $\mathbb{R}$ jest identyczność, skąd dowolny homomorfizm $\phi : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbb{R}$ zacieśniony do $\mathbb{R}$ jest identycznością. Tak więc oznaczając $x_1 = \phi(X_1), \ldots, x_n = \phi(X_n)$ mamy dla dowolnego $a(X_1, \ldots, X_n) = \sum bX_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n}$:

$$\phi(a) = \sum b(\phi(X_1))^{k_1} \ldots (\phi(X_n))^{k_n} = \sum bx_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} = a(x_1, \ldots, x_n)$$

skąd oczywiście wynika różnowartościowość. □

4.7. Przykład. Topologia w przestrzeni $\mathsf{Hom}\,(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n], \mathbb{R})$ (izomorficznej z $\mathbb{R}^n$) pokrywa się z normalną topologią produktową przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Faktycznie, jak widzieliśmy w dowodzie poprzedniej uwagi, dla $a \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ i $\phi \in \mathsf{Hom}\,(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n], \mathbb{R})$:

$$\widehat{a}(\phi) = \phi(a) = a(\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n)),$$

a zatem jest to najsłabsza topologia w której funkcje wielomianowe (w szczególności - rzutowania) są ciągłe, czyli zwykła topologia w $\mathbb{R}^n$.

5. Zbiory pre-pierwsze i archimedesowe

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką takim, że $\mathbb{Q} \subset A$.

5.1. Definicja. *Zbiorem* **pre-pierwszym** *nazywamy taki zbiór $T \subset A$, że:*

(1) $\bigwedge_{t_1, t_2 \in T} t_1 + t_2 \in T$,
(2) $\bigwedge_{t_1, t_2 \in T} t_1 \cdot t_2 \in T$,
(3) $\mathbb{Q}^+ \subset T$.

Zbiór $S \subset A$ nazywamy **zbiorem archimedesowym**, *jeżeli*

$$\bigwedge_{a\in A}\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a \pm n \in S.$$

Zbiór $T \subset A$ nazywamy **zbiorem generującym**, *jeżeli*

$$\bigwedge_{a\in A}\bigvee_{t_1,t_2\in T} a = t_1 - t_2$$

czyli pisząc skrótowo $T - T = A$.

5.2. Uwaga. Niech T będzie zbiorem pre-pierwszym. Wtedy:

(i) Zbiór $T - T$ jest podpierścieniem A.
(ii) $\mathbb{Q}^+$ jest najmniejszym zbiorem pre-pierwszym.
(iii) Jeśli T jest archimedesowy, to jest też generujący.
(iv) Jeśli T jest pre-porządkiem, to jest też zbiorem pre-pierwszym i generującym.

D o w ó d. (i) Sprawdźmy, że $T-T$ jest podgrupą grupy addytywnej pierścienia A. Ustalmy w tym celu $t_1 - t_2, t_3 - t_4 \in T - T$. Wówczas:

$$(t_1 - t - 2) - (t_3 - t_4) = (t_1 - t_2) + (t_4 - t_3) = (t_1 + t_4) - (t_2 + t_3) \in T - T.$$

Podobnie sprawdzamy, że $T-T$ jest zamknięte na mnożenie - dla $t_1-t_2, t_3-t_4 \in T-T$ mamy:

$$(t_1 - t_2)(t_3 - t_4) = (t_1t_3 + t_2t_4) - (t_1t_4 + t_2t_3) \in T - T.$$

Stwierdzenie (ii) jest oczywiste, a dla dowodu (iii) załóżmy, że T jest zbiorem archimedesowym i ustalmy $a \in A$. Wtedy $a = (a+n)-n$ i dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ $a+n \in T$, więc wtedy i $a \in T-T$.

Na koniec, aby udowodnić tezę (iv) zauważmy, iż wystarczy sprawdzić, że $\mathbb{Q}^+ \subset T$. Jest tak istotnie, gdyż dla $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ mamy $\frac{m}{n} = (\frac{1}{n})^2(mn) = (\frac{1}{n})^2 + \ldots + (\frac{1}{n})^2 \in T$. □

5.3. Oznaczenie. Dla dowolnego zbioru $S \subset A$ przyjmujemy oznaczenie:

$$\chi_S = \{\phi \in \chi : \phi(S) \subset \mathbb{R}^+\}.$$

Jak zwykle, szczególnie interesuje nas przypadek, gdy $\chi = \mathsf{Hom}\,(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n], \mathbb{R})$. Zobaczmy, że wtedy zbiór χ_S ma bardzo naturalną interpretację.

5.4. Przykład. Rozważmy pierścień $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ i ustalmy $\phi \in \chi = \mathsf{Hom}\,(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n], \mathbb{R})$. Niech $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ będzie obrazem ϕ w odwzorowaniu Γ z uwagi **4.6**. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ $\phi(a) \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$. W szczególności, jeżeli $S = \{g_1, \ldots, g_s\} \subset \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ to obrazem χ_S we wspomnianym odwzorowaniu Γ jest zbiór $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, g_i \in S\}$, czyli zbiór semialgebraiczny związany ze zbiorem S.

5.5. Uwaga. Niech S będzie zbiorem archimedesowym. Wówczas χ_S jest zbiorem zwartym.

D o w ó d. Pokażemy najpierw, że χ_S jest zbiorem domkniętym. Istotnie:

$$\begin{aligned}\chi_S &= \{\phi \in \chi : \phi(a) \geqslant 0, a \in S\} = \\ &= \bigcap_{a\in S}\{\phi \in \chi : \phi(a) \geqslant 0\} = \bigcap_{a\in S}\{\phi \in \chi : \widehat{a}(\phi) \geqslant 0\} = \bigcap_{a\in S} \widehat{a}^{-1}([0,+\infty)),\end{aligned}$$

więc jako przekrój zbiorów domkniętych jest domknięty. Dalej, ponieważ S jest archimedesowy, więc dla każdego $a \in A$ istnieje $m_a \in \mathbb{N}$ takie, że $m_a \pm a \in S$. Zauważmy, że $\chi_S \subset \prod_{a\in A}[-m_a, m_a]$. Istotnie, ustalmy $\phi \in \chi_S$. Zgodnie z definicją produktu:

$$\prod_{a\in A}[-m_a, m_a] = \{f : A \to \mathbb{R} : f(a) \in [-m_a, m_a]\}.$$

Ustalmy więc $a \in A$. Wtedy $\phi(m_a+a) \geqslant 0$ i $\phi(m_a-a) \geqslant 0$, więc $\phi(a) \geqslant -\phi(m_a)$ i $\phi(a) \leqslant \phi(m_a)$. Ale skoro ϕ zacieśnione do $\mathbb{R}$ jest identycznością, a $m_a \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, to $\phi(m_a) = m_a$ i tym samym $\phi(a) \in [-m_a, m_a]$.

Oczywiście $[-m_a, m_a]$ są zwarte (jako domknięte i ograniczone podzbiory $\mathbb{R}$), więc $\prod_{a\in A}[-m_a, m_a]$ jest przestrzenią zwartą. Zatem χ_S jako domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty. □

5.6. Uwaga. Niech T będzie zbiorem pre-pierwszym. Wtedy:

(i) Zbiór

$$H_T = \{a \in A : \bigvee_{n\in\mathbb{N}} n \pm a \in T\}$$

jest podpierścieniem pierścienia A. Nazywamy go **pierścieniem elementów ograniczonych ze względu na T.**

(ii) T jest zbiorem pre-pierwszym archimedesowym wtedy i tylko wtedy, gdy $H_T = A$.

D o w ó d. Sprawdźmy, że H_T jest podgrupą grupy addytywnej pierścienia A; ustalmy $a_1, a_2 \in H_T$ i niech $n_1 \pm a_1, n_2 \pm a_2 \in T$. Wówczas:

$$(n_1 + n_2) \pm (a_1 - a_2) = (n_1 \mp a_1) + (n_2 \mp a_2) \in T,$$

zatem $a_1 - a_2 \in H_T$. Podobnie sprawdzamy, że jest to zbiór zamknięty na mnożenie - dla $a_1, a_2 \in H_T$ takich, że $n_1 \pm a_1, n_2 \pm a_2 \in T$ mamy:

$$n_1 n_2 \pm a_1 a_2 = \frac{1}{2}(n_1 \mp a_1)(n_2 - a_2) + \frac{1}{2}(n_1 \pm a_1)(n_2 + a_2),$$

więc $a_1 a_2 \in H_T$. □

6. T-moduły

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką takim, że $\mathbb{Q} \subset A$.

6.1. Definicja. *Niech $T \subset A$ będzie zbiorem pre-pierwszym. Zbiór $M \subset A$ nazywamy T-modułem, jeżeli:*

(1) $\bigwedge_{m_1,m_2\in M} m_1 + m_2 \in M$,
(2) $\bigwedge_{t\in T} \bigwedge_{m\in M} t \cdot m \in M$
(3) $T \subset M$

Ponadto T-moduł nazywamy **archimedesowym,** *gdy jest dodatkowo zbiorem archimedesowym.*

6.2. Uwaga. Niech T będzie zbiorem pre-pierwszym, M zaś T-modułem. Wówczas:

(i) T jest najmniejszym T-modułem,

(ii) Jeżeli T jest archimedesowy, to również M jest archimedesowy.

Uwaga powyższa jest oczywista. Zajmijmy się na chwilę specjalnym rodzajem T-modułów, a mianowicie takimi T-modułami, dla którychy w roli T występuje grupa sum kwadratów pierścienia A. Oczywiście specjalnie interesujący będzie przypadek, gdy A będzie pierścieniem wielomianów rzeczywistych.

6.3. Uwaga. Niech M będzie $\sum A^2$-modułem. Wówczas:

(i) Zbiór

$$H_M = \{a \in A : \bigvee_{n\in\mathbb{N}} n \pm a \in M\}$$

jest podpierścieniem pierścienia A. Nazywamy go **pierścieniem elementów ograniczonych ze względu na M.**

(ii) M jest zbiorem T-modułem archimedesowym wtedy i tylko wtedy, gdy $H_T = A$.

D o w ó d. (i) Bez trudu sprawdzamy, że H_M jest podgrupą grupy addytywnej pierścienia A. Aby sprawdzić, że H_M jest zamknięte na mnożenie, zauważmy, że dla ustalonych $a, b \in H_M$ $ab = \frac{1}{4}((a + b)^2 - (a - b)^2)$, tak więc wystarczy pokazać, że dla dowolnych $a \in H_M$ również $a^2 \in H_M$. Istotnie, gdy $a^2 \in H_M$ dla $a \in H_M$, to $(a+b)^2, (a-b)^2 \in H_M$, więc i $(a+b)^2-(a-b)^2 \in H_M$, czyli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ $n \pm ((a + b)^2 - (a - b)^2) \in M$. Ale skoro $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+ \subset \sum A^2 \subset M$, więc wtedy także $4n \pm ((a+b)^2 - (a-b)^2) \in M$. Ostatecznie, ponieważ M jest $\sum A^2$-modułem i $\mathbb{Q}^+ \subset \sum A^2$, więc $n \pm \frac{1}{4}((a + b)^2 - (a - b)^2) = \frac{1}{4}(4n \pm ((a + b)^2 - (a - b)^2) \in M)$.

Ustalmy zatem $a \in H_M$ i niech $n \pm a \in M$. Wówczas $a^2, n^2 \in \sum A^2 \subset M$, więc $n^2 + a^2 \in M$. Ponadto:

$$\begin{aligned} n^2 - a^2 = {} & \frac{1}{2n}((n + a)(n^2 - a^2) + (n - a)(n^2 - a^2)) = \\ = {} & \frac{1}{2n}((n + a)^2(n - a) + (n - a)^2(n + a)) \in M, \end{aligned}$$

skąd $a^2 \in H_M$. Dowód części (ii) jest oczywisty. $\square$

6.4. Uwaga. Niech M będzie $\sum A^2$-modułem. Wówczas:

(i) Jeżeli $a^2 \in H_M$, to $a \in H_M$.

(ii) Jeżeli $\sum_{i=1}^n a_i^2 \in H_M$, to $a_1, \dots , a_n \in H_M$.

D o w ó d. (i) Ustalmy $a \in A$ i załóżmy, że $a^2 \in H_M$, czyli dla pewnego $n \pm a^2 \in M$. Wówczas $n \pm a = \frac{1}{2}((n - 1) + (n - a^2) + (a \pm 1)^2) \in M$, gdyż każdy ze składników w nawiasie należy do M.

(ii) Ustalmy $\sum_{i=1}^n a_i^2 \in A$ i załóżmy, że $\sum_{i=1}^n a_i^2 \in H_M$. Niech $m \pm \sum_{i=1}^n a_i^2 \in M$. Wówczas, dla ustalonego $i \in \{1, \dots , n\}$, $n - a_i^2 = (n - \sum_{i=1}^n a_i^2) + \sum_{j\neq i} a_j^2 \in M$, a więc $n \pm a_i = \frac{1}{2}((n - 1) + (n - a_i^2) + (a_i \pm 1)^2) \in M$. $\square$

Powyższa własność może się wydawać zaskakująca - jest jednak prawdziwa. Jak wniosek podamy eleganckie kryterium pozwalające sprawdzać, kiedy dany $\sum \mathbb{R}[X_1, \dots , X_n]^2$-moduł jest archimedesowy.

6.5. Wniosek. *Rozważmy pierścień* $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ *i niech* M *będzie* $\sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2$*-modułem. Jeżeli dla pewnego* $k \in \mathbb{N}$ $k - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in M$*, to* M *jest archimedesowy.*

D o w ó d. Ponieważ $\mathbb{R}^+ = \{a^2 \in \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\}$, więc $\mathbb{R}^2 \subset M$ i tym samym $\mathbb{R}^+ \subset H_M$. Tak więc, wobec uwagi **6.4** (i), $\mathbb{R} \subset H_M$ i ponadto - postępując jak w dowodzie uwagi **6.4** (ii) - otrzymujemy, że $X_1, \dots, X_n \in H_M$. Skoro H_M jest pierścieniem, to $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \subset H_M$ i tym samym $H_M = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. W świetle uwagi **6.3**, M jest archimedesowy. $\square$

7. Twierdzenie Kadisona - Dubois

Głównym rezultatem tego paragrafu będzie dowód następującego twierdzenia udowodnionego przez Kadisona w 1951 roku (por. [**10**]), uogólnionego następnie przez Dubois w roku 1967 (por. [**6**]). Prezentowana przez nas wersja, jak również dowód, pochodzi z pracy Beckera i Schwarza [**4**] z roku 1983.

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką takim, że $\mathbb{Q} \subset A$.

7.1. Twierdzenie Kadisona - Dubois. *Niech* T *będzie zbiorem pre-pierwszym i archimedesowym, a* M T*-modułem,* $-1 \notin M$*. Wówczas:*

(i) $\chi_M \neq \emptyset$.

(ii) χ_M *jest zbiorem zwartym.*

(iii) *Odwzorowanie* $\Lambda : A \to C(\chi_M, \mathbb{R})$ *dane wzorem:*

$$\Lambda(a) = \widehat{a} \restriction_{\chi_M}$$

jest homomorfizmem. Obraz tego homomorfizmu jest zbiorem gęstym (w topologii przestrzeni $C(\chi_M, \mathbb{R})$ *wyznaczonej przez normę supremum).*

(iv) $\widehat{a}(\phi) > 0$ *dla* $\phi \in \chi_M$ *wtw. gdy* $\bigvee_{\epsilon>0} a - \epsilon \in M$.

(v) $\widehat{a}(\phi) \geqslant 0$ *dla* $\phi \in \chi_M$ *wtw. gdy* $\bigwedge_{\epsilon>0} a + \epsilon \in M$.

(vi) $\widehat{a}(\phi) = 0$ *dla* $\phi \in \chi_M$ *wtw. gdy* $\bigwedge_{\epsilon>0} \pm a + \epsilon \in M$.

Dowód porzedzimy serią lematów.

7.2. Lemat. *Niech* T *będzie zbiorem pre-pierwszym i generującym, a* Q *maksymalnym* T*-modułem takim, że* $-1 \notin Q$*. Wówczas* $Q \cup -Q = A$ *oraz* $Q \cap -Q$ *jest ideałem.*

D o w ó d. Pokażemy, że $Q \cup -Q = A$. Oczywiście inkluzja ($\subset$) jest trywialna, a dla dowodu zawierania w drugą stronę ustalmy $a \in A$ i przypuśćmy, że $a \notin Q \cup -Q$. Rozważmy zbiory $Q[\{a\}] = \{s + at : s \in Q, t \in T\}$, $Q[\{-a\}] = \{s - at : s \in Q, t \in T\}$. Jest kewstią rutynowego przeliczenia sprawdzenie, że są to T-moduły. Ponadto $Q \subsetneq Q[\{a\}]$, $Q \subsetneq Q[\{-a\}]$, więc $-1 \in Q[\{a\}]$, $-1 \in Q[\{-a\}]$, powiedzmy, że $-1 = s_1 + at_1$, $-1 = s_2 - at_2$, $s_1, s_2 \in Q$, $t_1, t_2 \in T$. Wówczas:

$$t_1 + t_2 + t_2 s_1 + t_1 s_2 = t_1(1 + s_2) + t_2(1 + s_1) = t_1 t_2 a - t_1 t_2 a = 0,$$

a zatem $-t_1 = t_2 + t_2 s_1 + t_1 s_2 \in Q$. Ponieważ T jest generujący, więc istnieją $t_3, t_4 \in T$ takie, że $a = t_3 - t_4$. Wtedy:

$$-1 = s_1 + t_1 a = s_1 + t_1(t_3 - t_4) = s_1 + t_1 t_3 + t_4(-t_1) \in Q$$

co doprowadza nas do sprzeczności. Sprawdzenie, że $Q \cap -Q$ jest ideałem jest proste i pozostawiamy je bez dowodu. $\square$

7.3. LEMAT. *Niech T będzie zbiorem pre-pierwszym i generującym, a Q maksymalnym T-modułem archimedesowym takim, że $-1 \notin Q$. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : A \to \mathbb{R}$ taki, że $Q = \phi^{-1}(\mathbb{R}^+)$.*

D o w ó d. Pokażemy najpierw istnienie stosownego homomorfizmu. Dla dowolnego $a \in A$ zdefiniujmy zbiory:

$$G(a) = \{r \in \mathbb{Q} : r - a \in Q\}, \quad D(a) = \mathbb{Q} \setminus G(a).$$

Zauważmy, że zbiory te są niepuste. Istotnie, ustalmy $a \in A$. Ponieważ Q jest archimedesowy, więc dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ $n \pm a \in Q$, więc $G(a) \neq \emptyset$. Przypuśćmy więc, że $D(a) = \emptyset$. Wtedy $G(a) = \mathbb{Q}$ i ponieważ Q jest archimedesowy, więc dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, $m + a \in Q$. Ponadto $-(m+1) \in G(a)$, czyli $-(m+1) - a \in Q$. Wobec tego $-1 = m + a - (m+1) - a \in Q$, co daje sprzeczność.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : A \to \mathbb{R}$ wzorem $\phi(a) = \inf(G(a)) = \sup(D(a))$. Pokażemy, że jest to szukany homomorfizm. Na początek zauważmy, że $\phi(1) = 1$. Faktycznie, przypuśćmy, że istnieje $r < 1$ takie, że $r - 1 = s \in Q$. Natenczas $s < 0$ i $s \in Q$; ponadto $-\frac{1}{s} \in \mathbb{Q}^+ \subset T$, więc $-1 = s(-\frac{1}{s}) \in Q$ - sprzeczność. Podobnie prosto sprawdzamy, że $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ dla $a, b \in A$ oraz że $\phi(ta) = \phi(t)\phi(a)$ dla $t \in T$, $a \in A$. Jeżeli teraz ustalimy $a, b \in T$ i korzystając z faktu, że T jest generujący przedstawimy a w postaci $a = t_1 - t_2$, $t_1, t_2 \in T$, to:

$$\begin{aligned} \phi(ab) &= \phi(t_1 b - t_2 b) = \phi(t_1 b) - \phi(t_2 b) = \\ &= \phi(t_1)\phi(b) + \phi(t_2)\phi(b) = \phi(b)(\phi(t_1) - \phi(t_2)) = \phi(b)\phi(t_1 - t_2) = \phi(a)\phi(b). \end{aligned}$$

Bez trudu sprawdzamy, że $\phi(Q) \subset \mathbb{R}^+$. Wobec tego $Q' = \phi^{-1}(\mathbb{R}^+)$ jest T-modułem takim, że $Q \subset Q'$ i $-1 \notin Q'$. Ale wobec maksymalności Q, $Q = Q' = \phi^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

W dowodzie jednoznaczności postępujemy tak, jak w dowodzie uwagi **4.4**. $\square$

7.4. LEMAT. *Niech T będzie zbiorem pre-pierwszym i generującym, a M T-modułem archimedesowym. Wówczas $-1 \notin M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi_M \neq \emptyset$.*

D o w ó d. Dowód implikacji $(\Leftarrow)$ jest oczywisty; jeżeli $\phi \in \chi_M$, to wtedy $\phi(-1) = -1 < 0$, więc $-1 \notin M$. Dla dowodu wynikania $(\Rightarrow)$ załóżmy, że $-1 \notin M$. Wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje maksymalny T-moduł Q zawierający M i taki, że $-1 \notin Q$, więc w myśl lematu **7.3** istnieje homomorfizm $\phi : A \to \mathbb{R}$ taki, że $Q = \phi^{-1}(\mathbb{R}^+)$. W szczególności, skoro $M \subset Q$, to $\phi(m) > 0$ dla $m \in M$. $\square$

7.5. LEMAT. *Niech T będzie zbiorem pre-pierwszym i archimedesowym, a M T-modułem. Wówczas jeśli $\widehat{a}(\phi) > 0$ dla $\phi \in \chi_M$, to $a \in M$.*

D o w ó d. Ustalmy $a \in A$ i załóżmy, że $\widehat{a}(\phi) > 0$ dla $\phi \in \chi_M$. Rozważmy zbiór $M[\{-a\}] = \{s - at : s \in M, t \in T\}$. Z łatwością sprawdzamy, że jest to T-moduł. Skoro $\widehat{a}(\phi) = \phi(a) > 0$ dla $\phi \in \chi_M$, to $\widehat{-a}(\phi) = \phi(-a) < 0$ dla $\phi \in \chi_M$, a tym samym $\chi_{M[\{-a\}]} = \emptyset$. Tak więc wobec lematu **7.4** $-1 \in M[\{-a\}]$, powiedzmy $-1 = s - at$, $s \in M$, $t \in T$, skąd $at - 1 = s \in M$.

Dalej, zdefiniujmy zbiór $S = \{r \in \mathbb{Q} : r + a \in M\}$. Zbiór ten jest niepusty, gdyż skoro T jest archimedesowy, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n + a \in T \subset M$. Aliści można wskazać element ujemny $r < 0$, który do tego zbioru należy. Faktycznie, ustalmy $r \in S$ i załóżmy, że $r > 0$. Ponieważ T jest archimedesowy, więc istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k - t_1 \in T$. Wtedy:

$$\begin{aligned} kr - 1 + ka &= kr - 1 + ka - ta + ta + tr - tr = \\ &= \ a(k-t) + r(k-t) + ta - 1 + tr = (r+a)(k-t) + (ta-1) + tr \in M \end{aligned}$$

jako suma elementów należących do M. Stąd $r - \frac{1}{k} + a = \frac{1}{k}(kr - 1 + ka) \in M$, w szczególności $r - \frac{1}{k} \in S$. Powtarzając argument odpowiednio wiele razy dostajemy w końcu ujemny element r' zbioru S. Możemy wtedy napisać $a = (a + r') + (-r) \in M$. □

Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia Kadisona - Dubois.

D o w ó d. Tezę (i) dostajemy wprost z lematu **7.4**, a tezę (ii) z uwagi **5.5**. Przechodząc do dowodu części (iii) rozważmy rodzinę:

$$\Lambda(A) = \{\widehat{a} : \chi_M \to \mathbb{R} : a \in A\}.$$

Wobec udowodnionej już części twierdzenia, χ_M jest zbiorem zwartym. Ponadto rodzina $\Lambda(A)$ rozdziela punkty - w rzeczy samej, dla ustalonych $\phi, \psi \in \chi_M$, jeżeli $\phi \neq \psi$, to dla pewnego $a \in A$ $\phi(a) \neq \psi(a)$, czyli $\widehat{a}(\phi) \neq \widehat{a}(\psi)$. Tak więc na mocy twierdzenia Stone'a-Weierstrassa zbiór $\Lambda(A)$ jest gęsty w tradysyjnej topologii przestrzeni $C(\chi_M, \mathbb{R})$.

(iv) Celem przeprowadzenia wnioskowania ($\Rightarrow$) załóżmy, że $\widehat{a}(\phi) > 0$ dla $\phi \in \chi_M$. Ze zwartości zbioru χ_M, $\widehat{a}(\phi) > \epsilon$ dla pewnego $\epsilon > 0$ (bo w przeciwnym wypadku rodzina $\{\{\phi \in \chi_M : \widehat{a}(\phi) > \frac{1}{n}\} : n \in \mathbb{N}\}$ byłaby pokryciem zbioru χ_M, z którego po wybraniu podpokrycia skończonego otrzymalibyśmy sprzeczność) i dla $\phi \in \chi_M$. Stąd $\widehat{a - \epsilon}(\phi) = \widehat{a}(\phi) - \widehat{\epsilon}(\phi) = \widehat{a}(\phi) - \epsilon > 0$, bo $\widehat{\epsilon}(\phi) = \phi(\epsilon) = \epsilon$ dla $\epsilon \in \mathbb{R}$, więc na podstawie lematu **7.5** $a - \epsilon \in M$.

Implikacja ($\Leftarrow$) jest oczywista; jeżeli $a - \epsilon \in M$, to dla $\phi \in \chi_M$ $\widehat{a}(\phi) - \epsilon = \widehat{a - \epsilon} \geqslant 0$, czyli $\widehat{a}(\phi) > 0$.

(v) Tutaj podobnie implikacja ($\Leftarrow$) jest trywialna,przejdźmy więc do dowodu wynikania ($\Rightarrow$). Załóżmy, że $\widehat{a}(\phi) \geqslant 0$ dla $\phi \in \chi_M$. Wtedy $\widehat{a}(\phi) + \delta \geqslant \delta > 0$ dla wszelkich $\delta > 0$ i $\phi \in \chi_M$. Korzystając ze zwartości χ_M dla ustalonego $\delta > 0$ $\widehat{a}(\phi) + \delta > \gamma$ dla pewnego $\gamma > 0$ oraz wszelkich $\phi \in \chi_M$, tak więc kładąc $\epsilon = \delta - \gamma > 0$ dostajemy, że $\widehat{a}(\phi) + \epsilon > 0$ dla $\phi \in \chi_M$, skąd wobec (iv) otrzymujemy tezę.

Dowód tezy (vi) wynika bezpośrednio z (v). □

8. Twierdzenie Schmüdgena

W ostatnim paragrafie tego rozdziału udowodnimy zaskakujące uproszczenie klasycznego twierdzenia Stengle'a w przypadku, gdy rozpatrywany zbiór semialgebraiczny jest zwarty. Twierdzenie, o którym mowa, pochodzi z roku 1991 i zostało udowodnione przez Schmüdgena przy użyciu metod analizy funkcjonalnej (por. [**13**]). Prezentowany tu dowód pochodzi od Wörmanna.

8.1. Twierdzenie Schmüdgena. *Rozważmy pierścień* $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ *i niech* $S = \{g_1, \ldots, g_s\} \subset \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. *Niech* $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, g_i \in S\}$ *będzie zbiorem* *semialgebraicznym związanym ze zbiorem S, a $T = \sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2[S]$ pre-porządkiem generowanym przez S. Załóżmy, że K jest zwarty i niech $a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Wówczas jeżeli $a(x_1, \dots, x_n) > 0$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in K$, to $a \in T$.*

Dowód poprzedzimy lematem:

8.2. LEMAT. *Rozważmy pierścień $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ i niech $S = \{g_1, \dots, g_s\} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Niech $K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g_i(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0, g_i \in S\}$ będzie zbiorem semialgebraicznym związanym ze zbiorem S, a $T = \sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2[S]$ pre-porządkiem generowanym przez S. Wówczas T jest archimedesowy wtedy i tylko wtedy, gdy K jest zwarty.*

D o w ó d. Implikacja $(\Rightarrow)$ wynika bezpośrednio z uwagi **5.5** i przykładu **5.4**. Aby udowodnić wynikanie $(\Leftarrow)$ załóżmy, że K jest zbiorem zwartym. Jako zwarty podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest on ograniczony, więc dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ $K \subset K(0, \sqrt{k})$, czyli dla $(x_1, \dots, x_n) \in K$ $k - \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$. Wobec positivstellensatz Stengle'a istnieją $p, q \in T$ takie, że $p(k - \sum_{i=1}^n X_i^2) = 1 + q$, skąd $(1+q)(k - \sum_{i=1}^n X_i^2) = p(k - \sum_{i=1}^n X_i^2)^2 \in T$.

Rozważmy pre-porządek $T[\{k - \sum_{i=1}^n X_i^2\}] = \{s + (k - \sum_{i=1}^n X_i^2)t : s, t \in T\}$. Ponieważ $\sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2 \subset T[\{k - \sum_{i=1}^n X_i^2\}]$, więc $T[\{k - \sum_{i=1}^n X_i^2\}]$ jest $\sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2$-modułem i skoro $k - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T[\{k - \sum_{i=1}^n X_i^2\}]$, więc wobec wniosku **6.5** $T[\{k - \sum_{i=1}^n X_i^2\}]$ jest archimedesowy. Zatem dla $a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $m - a \in T[\{k - \sum_{i=1}^n X_i^2\}]$, powiedzmy $m - a = s + (k - \sum_{i=1}^n X_i^2)t$, $s, t \in T$. Wówczas $(m-a)(1+q) = t(1+q) + t(1+q)(k - \sum_{i=1}^n X_i^2) \in T$. W szczególności istnieje $m' \in \mathbb{N}$ takie, że $m' - q \in T[\{k - \sum_{i=1}^n X_i^2\}]$ i w konsekwencji $(m'-q)(1+q) \in T$. Ponieważ dodatkowo $(\frac{m'}{2} - q)^2 \in T$, więc:

$$m' + \frac{m'^2}{4} - q = \frac{m'^2}{4} - m'q + q^2 + m'q - q^2 + m' - q = (\frac{m'}{2} - q)^2 + (m'-q)(1+q) \in T$$

a zatem

$$k(\frac{m'}{2}+1)^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2 = k(\frac{m'}{2}+1)^2 + (1-q)(k - \sum_{i=1}^n X_i^2) + q\sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$$

skąd wobec wniosku **6.5** T jest archimedesowy. □

Przechodzimy do dowodu twierdzenia Schmüdgena.

D o w ó d. Ustalmy $a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ i załóżmy, że $a(x_1, \dots, x_n) > 0$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in K$. Natenczas w myśl przykładu **5.4** $\widehat{a}(\phi) > 0$ dla $\phi \in \chi_T$, więc wobec udowodnionego lematu T jest archimedesowy. Stosując lemat **7.5**, $a \in T$ □

Jako przykład zastosowania tego twierdzenia podamy pewne rozwiązanie tzw. problemu momentowego.

8.3. PRZYKŁAD. Jak wiadomo, moment pędu cząstki definiuje się jako iloczyn wektorowy $L = r \times p$ wektora wodzącego i wektora pędu.Przyjrzyjmy się ciału sztywnemu obracającemu się z prędkością kątową ω wokół stałej osi w układzie środka masy. Dzieląc bryłę na odpowiednio wiele części, jeżeli element masy Δm_j jest w odległości r_j od osi obrotu, to jego prędkość wynosi $v_j = r_j\omega$. Tak więc wartość bezwzględna momentu pędu ciała sztywnego K jest

$$L = \sum r_j \Delta m_j v_j = \sum r_j \Delta m_j (r_j \omega) = (\sum r_j^2 \Delta m_j)\omega.$$

„Przechodząc do granicy” z wyrażeniem w nawiasie dostajemy wielkość:

$$I = \int_K r^2 dm.$$

Wartość tę nazywamy, jak wiadomo, momentem bezwładności bryły K.

Z wyrażeniami takimi jak powyżej wiąże się szereg ciekawych problemów. Ten, który będzie nas interesował, można sformułować następująco: kiedy istnieje dodatnia miara borelowska μ niezerowa na zbiorze $K \subset \mathbb{R}^n$ taka, że funkcjonał liniowy $L : \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \to \mathbb{R}$ można reprezentować jako całkę:

$$L(a) = \int_K a d\mu?$$

Skorzystamy z następującego twierdzenia, które podamy tu bez dowodu (por. [**9**]):

TWIERDZENIE HAVILANDA. *Niech $L : \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem liniowym, niech $K \subset \mathbb{R}^n$. Dodatnia miara borelowska μ niezerowa na K i taka, że*

$$L(a) = \int_K a d\mu$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $L(a) \geqslant 0$ dla wszelkich $a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ takich, że $a(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in K$.

Korzystając z tego twierdzenia udowodnimy następujące:

TWIERDZENIE. *Rozważmy pierścień $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ i niech $S = \{g_1, \dots, g_s\} \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Niech $K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g_i(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0, g_i \in S\}$ będzie zbiorem semialgebraicznym związanym ze zbiorem S, a $T = \sum \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^2[S]$ pre-porządkiem generowanym przez S. Załóżmy, że K jest zwarty. Wówczas dodatnia miara borelowska μ niezerowa na K i taka, że*

$$L(a) = \int_K a d\mu$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $L(h^2 g_1^{e_1} \dots g_s^{e_s}) \geqslant 0$ dla $h \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $e_1, \dots, e_s \in \{0, 1\}$.

D o w ó d. Implikacja ($\Rightarrow$) jest oczywista. Dla dowodu implikacji ($\Leftarrow$) wystarczy - wobec twierdzenia Havilanda - udowodnić, że $L(a) \geqslant 0$ dla wszelkich $a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ takich, że $a(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in K$. Ustalmy więc stosowne $a \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Wówczas dla dowolnej liczby $e > 0$, $(a + \epsilon)(x_1, \dots, x_n) > 0$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in K$, więc z twierdzenia Schmüdgena $a + \epsilon \in T$, czyli - wobec założenia - $L(a + \epsilon) \geqslant 0$ i z liniowości L, $L(a) \geqslant -\epsilon$. Ale ponieważ ϵ było wybrane dowolnie, więc $L(a) \geqslant 0$. $\square$

Spis literatury

[1] C. Andradas, L. Bröcker, J. M. Ruiz, *Constructible sets in real geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1996.
[2] E. Artin, O. Schreier, *Algebraische Konstruktionen reeller Körper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 85-99.
[3] E. Artin, O. Schreier, *Eine Kenzeichnung der reell abgeschlossenen Körper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 225-231.
[4] E. Becker, N. Schwartz, *Zum Darstellungsatz von Kadison-Dubois*, Archiv der Mathematik (1983), 421-428.
[5] J. Bochnak, M. Coste, M. F. Roy, *Real algebraic geometry*, Springer-Verlag, Paris 1986.
[6] D. W. Dubois, *A Note on David Harrison's Theory of Preprimes*, Pac. J. of Math. 21 (1967), 15-19.
[7] D. W. Dubois, *A Nullstellensatz for Ordered Fields*, Ark. Mat. 9 (1969), 111-114.
[8] R. Engelking, *Zarys topologii ogólnej*, PWN, Warszawa 1968.
[9] E. K. Haviland, *On the Moment Problem for Distribution Functions in more than one Dimension II*, Amer. J. Math. 58 (1936), 164-168.
[10] R. V. Kadison, *A representation theorem for commutative topological algebra*, Memoirs of the AMS 7 (1951)
[11] T. Y. Lam, *An introduction to real algebra*, Rky. Mtn. J. Math. 14 (1984), 767-814.
[12] M. Marshall, *Positive Polynomials and Sums of Squares*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Universita di Pisa, Pisa 2000.
[13] K. Schmüdgen, *The K-moment Problem for Compact Semialgebraic Sets*, Math. Ann. 289 (1991), 203 - 206.
[14] G. Stengle. *A Nullstellensatz and a Positivenstellensatz in semialgebraic geometry*, Math. Ann. 207 (1974), 67-97.