MNIEJ I BARDZIEJ ZNANE PROBLEMY TEORII LICZB

PAWEŁ GŁADKI

Teoria liczb, mogłoby się wydawać, jest gałęzią matematyki zajmującą się historią i filozofią pojęcia liczby, jego rozwojem i uogólnieniami. W rzeczywistości zagadnieniami tymi zajmuje się arytmetyka teoretyczna, dziedzina zaś badań teorii liczb jest o wiele węższa - - jest to badanie własności liczb całkowitych.

Pojęcie liczby naturalnej jest najbardziej pierwotnym pojęciem kojarzonym z matematyką. Dociekania dotyczące istoty i własności liczb naturalnych wydają się leżeć u podstaw najstarszych form myśli matematycznej.

Wiadomo, że zarówno Sumerowie, Babilończycy jak i starożytni Egipcjanie posiadali pewną wiedzę z zakresu własności liczb naturalnych. Tym nie mniej dopiero od czasów starożytnej Grecji możemy mówic o rozwoju właściwej teorii liczb. Pitagoras i jego uczniowie około 500 r. p.n.e. prowadzili intensywne badania na polu liczb całkowitych. Pierwszym systematycznym wykładem zawierającym znane w starożytności wyniki teorii liczb były *Elementy* Euklidesa (ok. 300 r. p.n.e). Wśród późniejszych matematyków greckich wspomnieć należy o Diofantosie (ok. 350 r. n.e.) i jego *Artymrtyce* - do dzisiejszych czasów zachowało się 6 z 13 ksiąg tego dzieła, dającego pojęcie o stopniu zaawansowania greckiej teorii liczb.

Teoria liczb ma również bardzo starą tradycję w Indiach, gdzie bujnie rozwijała się między 500 a 1200 rokiem naszej ery.

W Europie zachodniej dokonania matematyków greckich znane są głównie dzięki matamatyce arabskiej. Rozwój europejskiej teorii liczb był jednak bardzo powolny i dopiero od XVII stulecia możemy mówić o niej jako o niezależnej gałęzi matematyki. Matematy francuski Pierre Fermat (1601 - 1665) uważany jest za ojca większości problemów, którymi zajmowała się teoria liczb w późniejszych czasach. Dalszy rozwój teorii liczb wiąże się ściśle z nazwiskami Eulera (1707 - 1783), Lagrange'a (1736 - 1813), Legendre'a (1752 - 1833) i Gaussa (1777 - 1855). Pierwsza książka poświęcona wyłącznie teorii liczb, *Essai sur la theorie des nombres* Legendre'a została wydana w 1798 roku, ale za podstawową pozycję uważa się książkę Gaussa *Disquitiones Arethmeticae* z 1801 roku. Począwszy od tej pracy teoria liczb stała się samodzielną gałęzią nauki. Gauss uważał, że była to jego najważniejsza książka, a jego opinia o roli teorii liczb najlepiej sformułowana jest w znanym cytacie: "Matematyka jest królową nauk, zaś teoria liczb jest królową matematyki".

1. Problemy podziału liczby na sumę składników

Jak wiadomo, każda liczba naturalna jest suma pewnej ilości jedynek:

$$1 = 1,\ 2 = 1 + 1,\ 3 = 1 + 1 + 1$$

Tak więc jeśli chodzi o budowę liczb naturalnych przy pomocy dodawania, to jest ona niezmiernie prosta. Można by więc powiedzieć, że pod tym względem liczby naturalne zachowują się bardzo jednolicie. Nie oznacza to jednak, że wszystkie zagadnienia dotyczące otrzymywania danej liczby przez sumę innych liczb należą do prostych, o czym za chwilę się przekonamy. Wspomianymi problemami zajmuje się **addytywna teoria liczb.**

Problem 1. *Na ile sposobów można przedstawić daną liczbę jako sumę dwóch różnych składników?*

R o z w i ą z a n i e :
I wariant: Za różne rozkłady uważamy też te, które różnią się tylko kolejnością składników. Nietrudno się przekonać, że dla danej liczby $n \in \mathbb{N}$ rozkłady te, to:

$$1 + (n-1),\ 2 + (n-2),\ \ldots,\ (n-1) + 1$$

jest więc ich:

$$n - 1$$

II wariant: Za różne rozkłady nie uważamy tych, które różnią się tylko kolejnością składników. Tutaj rozważmy dwa przypadki. Gdy liczba n jest nieparzysta, to każdemu składnikowi $k+(n-k)$ odpowiada składnik $(n-k)+k$, więc wszystkich takich rozkładów jest:

$$\frac{n-1}{2}$$

Gdy liczba n jest parzysta postaci $2k$, to składnikowi k nie odpowiada żaden inny składnik, więc wszystkich rozkładów jest:

$$\frac{n}{2}$$

Problem 2. *Na ile sposobów można przedstawić daną liczbę jako sumę trzech różnych składników?*

R o z w i ą z a n i e :
I wariant: Za różne rozkłady uważamy też te, które różnią się tylko kolejnością składników. Dla danej liczby n pierwszy składnik, liczbę k możemy wybrać na $n-2$ sposobów. Zostaje nam liczba $n-k$, którą rozkładamy na dwa składniki na $n-k-1$ sposobów. Wszystkich rozkładów jest więc:

$$\begin{aligned}(n-1-1) \quad + & \quad (n-2-1) + (n-3-1) + \ldots + [n-(n-2)-1] = \\ = & \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2}\end{aligned}$$

II wariant: Za różne rozkłady nie uważamy tych, które różnią się tylko kolejnością składników. `[ćwiczenie]`

Problem 3. *Na ile sposobów można przedstawić daną liczbę jako sumę s różnych składników?*

R o z w i ą z a n i e :
I wariant: Za różne rozkłady uważamy też te, które różnią się tylko kolejnością składników. `[ćwiczenie]`
Odpowiedź: $\binom{n-1}{s-1}$

Problem 4. Partitio Numerorum *Na ile sposobów można przedstawić daną liczbę jako sumę dowolnej liczby różnych składników?*

R o z w i ą z a n i e : Niezadowalające.
Zdefiniujmy liczbę:

$p(n) =$ liczba przedstawień liczby n jako dowolnej sumy różnych składników

Dla niewielkich n, $p(n)$ można liczyć "na piechotę". Mamy na przykład:

$$p(1) = 1,\ p(2) = 2,\ p(3) = 3,\ p(4) = 5,\ p(5) = 7,\ p(6) = 11$$

Stosunkowo łatwo policzyć jeszcze:

$$p(7) = 15,\ p(8) = 22,\ p(9) = 30,\ p(10) = 42$$

Jak policzył Mac Mahon:

$$p(200) = 3972999029388$$

zaś Lehmer sprawdził w 1936 roku, że liczba $p(14031)$ składa się ze 127 cyfr. Ogólny wzór na $p(n)$ nie jest znany. Poszukiwano pewnych przybliżonych wartości liczby $p(n)$. Jak udowodnili w 1918 roku Hardy i Ramanujan, zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. $\sqrt{n}(\pi\sqrt{\frac{2}{3}} - 1) < \ln p(n) < \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n}$

2. Kwadraty magiczne

Kwadratem magicznym nazywamy tabliczkę $n \times n$ liczb $1, 2, \ldots, n^2$ taką, że każdy wiersz, każda kolumna i obydwie przekątne sumują się do tej samej liczby, zwanej sumą kwadratu magicznego. Nietrudno wyznaczyć wzór na sumę S kwadratu magicznego.

Twierdzenie 2. $S = \frac{n}{2}(n^2 + 1)$

D o w ó d : Sumując wszystkie wiersze otrzymujemy (ze znanego wzoru na sumę szeregu arytmetycznego) $\frac{n^2}{2}(n^2 + 1)$, co z drugiej strony jest równe n sumom kwadratu magicznego. Po podzieleniu przez n dostajemy tezę. ❑

Jasne jest, że dla $n = 1$ istnieje tylko jeden kwadrat magoczny. Nietrudno się też przekonać, że dla $n = 2$ takiego kwadratu nie ma. Dla $n = 3$ mamy jeden kwadrat magiczny:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Kwadrat ten znany był już w starożytności. Jak obliczył w XVI w. Frenicle, dla $n =$ 4 istnieje 880 kwadratów magicznych. Najbardziej znany jest kwadrat zamieszczony na jednej z rycin Albrechta Durera z 1514 roku, zatytuowany *Melancholia*:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Mac Mahon sprawdził, że dla $n = 5$ istnieje przeszło 60000 kwadratów magicznych. Oto jeden z nich:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

3. Problemy podziału liczby na sumę składników pierwszych

Nietrudno sprawdzić dla małych liczb, że każda większa lub równa od 4 liczba parzysta jest sumą dwóch nieparzystych liczb pierwszych. Mamy na przykład:

$$6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7 = 5 + 5,\ 12 = 5 + 7,\ 14 = 7 + 7 = 11 + 3$$

Trochę trudniej jest już dla liczby 100:

$$100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$$

Cierpliwi mogą sprawdzić, że liczba 1000 ma 28 takich rozkładów, a rekordzistką wśród liczb mniejszych od 1000 jest liczba 990, mająca aż 52 rozkłady.

Problem 5. Hipoteza Goldbacha *Czy parzysta liczba większa lub równa od 4 zawsze jest sumą dwóch liczb pierwszych?*

R o z w i ą z a n i e : Nieznane.

Problem ten został postawiony przez Goldbacha w 1742 roku i do dzisiaj - pomimo usilnych starań - pozostaje nierozstrzygnięty, chociaż przy użyciu komputerów wielkiej mocy został potwierdzony już w bardzo wielu przypadkach. Hipoteza Goldbacha została zaliczona do jednego z siedmiu problemów milenijnych, za których rozwiązanie przewidziana jest nagroda wysokości miliona dolarów. Z problemem tym związać można inne zagadnienie:

Problem 6. Postulat Bertranda *Pomiędzy liczbami n i $2n$ istnieje liczba pierwsza.*

Zauważmy, że z hipotezy Goldbacha wynika łatwo postulat Bertranda. Niech bowiem n będzie liczbą naturalną. Wówczas $2n + 2geq4$, a zatem $2n + 2 = p + q$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi nieparzystymi. Możemy przyjąć, że $q \geqslant p \geqslant 3$. Wobec tego $2n > q$ oraz $2n + 2 \leqslant 2q$, a stąd q leży między n a $2n$.

Postulat Bertranda można jednak udowodnić niezależnie od hipotezy Goldbacha. Postaramy się tutaj naszkicować dowód.

Niech $\pi(n)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od n. Funkcję taką zdefiniował Gauss. Na swoje 15 urodziny dostał w prezencie tablice matematyczne, w których znajdowały się między innymi tablice liczb pierwszych. Przeglądając je, Gauss zbudował następującą tabelkę:

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\pi(n)}$	$\Delta\frac{n}{\pi(n)}$
10	4	2,5	2,5
100	25	4,0	1,5
1000	168	6,0	2,0
10000	1229	8,1	2,1
100000	9592	10,4	2,3
1000000	78498	12,7	2,3
10000000	664579	15,0	2,3
100000000	5761455	17,4	2,4
1000000000	50827534	19,7	2,3
10000000000	455052512	22,0	2,3

Widzimy więc, że jeśli n wzrasta o 10, to $\frac{n}{\pi(n)}$ wzrasta mniej więcej o 2,3. Cóż to za tajemnicza liczba, 2,3? Okazuje się, że $\ln 10 \approx 2,3$. Na podstawie tego spostrzeżenia Gauss wysnuł przypuszczenie, że $\frac{n}{\pi(n)} \approx \ln n$. Jego hipoteza potwierdziła się po kilkudziesięciu latach. W roku 1850 Czebyszew udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. $0,89\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant 1,11\frac{n}{\ln n}$

Dowód tego twierdzenia jest bardzo trudny. Dowód Czebyszewa wykorzystywał zaawansowane metody analizy matematycznej. Później Erdos i Kalmar zaprezentowali dowód elementarny, jednak dalej jest on dość skomplikowany. Ponadto w 1896 roku Hadamard i de la Vallee - Pousin pokazali następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4. $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1$

Dowód tego twierdzenia jest jeszcze trudniejszy - klasyczne podejście wykorzystuje tzw. twierdzenia tauberowskie z zakresu analizy funkcjonalnej. W 1948 roku Selberg zaproponował inny dowód, wykorzystujący wyłącznie metody elementarne i pewne proste własności funkcji logarytmicznej, tym nie mniej nadal jest on bardzo rozbudowany i powikłany.

Tak czy inaczej, twierdzenie Czebyszewa zostało udowodnione. Pokażemy, jak łatwo wynika z niego postulat Bertranda. Zdefiniujmy bowiem funkcję $f(x) = 0,89\frac{2x}{\ln(2x)} - 1,11\frac{x}{\ln x}$. Łatwo sprawdzamy, że f jest funkcją rosnącą i $f(10) > 1,2111$, a więc $\pi(2x) - \pi(x) > 0,89\frac{2x}{\ln(2x)} - 1,11\frac{x}{\ln x} > 1$ dla $x > 10$. Zatem liczba liczb pierwszych między $2x$ a x dla $x > 10$ jest równa co najmniej jeden, a dla $x \geqslant 10$ łatwo możemy postulat sprawdzić "na palcach".

Podobnie jak robiliśmy to wcześniej, możemy pytać się, ile jest różnych - o ile w ogóle jakieś są - rozkładów danej liczby parzystej na dwie liczby pierwsze. Można postawić też ogólniejszy problem:

Problem 7. *Ile jest rozkładów liczby n na sumę dowolnej liczby liczb pierwszych?*

Rozwiązanie nie jest znane. Można jednak zdefiniować liczbę $P(n)$ równą liczbie takich rozkładów dla liczby n i badać jej własności. Bezpośrednio sprawdzić można, że na przykład:

$$P(1) = 0,\ P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1,\ P(6) = P(7) = 2,\ P(8) = 3,\ P(9) = 4$$

Jedyne co dotychczas udało się dla liczby $P(n)$ pokazać, to następujace twierdzenie pochodzące od Erdosa i Batemana:

Twierdzenie 5. $P(n+1) \geqslant P(n)$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} P(n+1) - P(n) = \infty$

4. Ciągi liczb pierwszych

W 1861 roku Moritz Cantor postawił następujące pytanie:

Problem 8. *Czy - poza trójką 3, 5, 7 - trzy kolejne liczby pierwsze mogą tworzyć ciąg arytmetyczny?*

Przez prawie 100 lat uważano, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Dopiero w 1956 Andrzej Schinzel zauważył, że 47, 53 i 59 są takimi liczbami - jak więc widać, czasami problemy, które wydają się trudne, okazują się banalnie proste. Schinzel wskazał też kilka innych trójek liczb spełniających powyższy warunek, najmniejsza następna to 151, 157, 163. Pojawia się zatem inne pytanie:

Problem 9. *Czy istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb pierwszych tworzących ciąg arytmetyczny?*

Odpowiedź na to pytanie nie jest znana. Podobnie badać można ciągi utworzone z 4 kolejnych liczb pierwszych - jest nim na przykład 251, 257, 263, 269.

Można też zajmować się ciągami arytmetycznymi niekoniecznie kolejnych liczb pierwszych . Daje się wskazać 10 kolejnych liczb pierwszych tworzących ciąg arytmetyczny. Są to:

$$199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089$$

Podobnie można badać ciągi liczb pierwszych dowolnej długości. Ciekawszy z tego typu problemów wydaje się następujący:

Problem 10. *Czy istnieje ciąg arytmetyczny złożony ze stu liczb pierwszych?*

Rozwiązanie nie jest znane, sprawdzono tylko, że ciągu takiego nie ma wśród ciągów o różnicy mniejszej, niż kilkudziesięciocyfrowa. Najbardziej znane z twierdzeń obejmujących tematykę ciągów liczb pierwszych jest następujące, pochodzące od Dirichleta:

Twierdzenie 6. *Jeżeli liczby a i b są względnie pierwsze, to w ciągu $an + b$ jest nieskończenie wiele liczb pierwszych*

Bibliografia

[1] A. Czogała, M. Szyjewski, *Teoria liczb*, Skrypt do wykładu
[2] Sz. Jeleński, *Lilavati*, WSiP, Warszawa 1968
[3] T. Nagell, *Introduction to number theory*, Chelsea Publishing Co., New York 1964
[4] W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 1990
[5] W. Sierpiński, *200 zadań z elementarnej teorii liczb*, PZWS, Warszawa 1964
[6] W. Sierpiński, *Czym zajmuje się teoria liczb*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1957