Paweł Gładki

Problem przetargu.

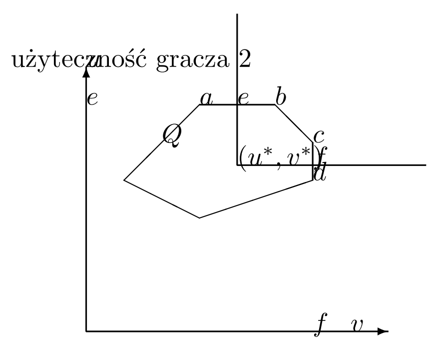
1 Problem przertargu

Co to jest przetarg w potocznym znaczeniu wyjaśniać chyba nie trzeba. W ujęciu eknomicznym, za przetarg uważamy takie sytuacje, jak negocjacje handlowe między państwami, między pracodawcą a związkami zawodowymi, czy też zwykły handel np. na bazarze.

Z naszego punktu widzenia, przetarg można uważać za pewną sytuację konfliktową, a zatem za grę o sumie niezerowej. Strategia w grze tego typu konstruowana jest według zasad obowiązujących dla gier o sumie zerowej. Stosuje się strategie czyste, mieszane i łączne mieszane ustalone przez obydwu graczy.

Przykład **1** Sprzedawca chce sprzedać towar o wartości v po cenie nie niższej niż v. Kupiec ocenia wartość towaru na u i chce go kupić po cenie nie wyższej niż u. Dla $v > u$ problem nie ma rozwiązania, dla $v = u$ mamy jedno rozwiązanie, dla $v < u$ mamy cały zbiór korzystnych rozwiązań - transakcji za kwotę p, $v < p < u$ ❏

Uogólniając powyższy przykład, rozważmy następującą sytuację: mamy dwa podmioty dysponujące towarem i chcące go wymienić, ale nie dysponujące gotówką. Wymiana następuje poprzez wniesienie na rynek wstępnej wiązki towarów i zaakceptowaniu jej przez obydwie strony. Zatem przez transakcję rozumiemy łączny podział wiązki towarów przyniesionych przez kontrahentów. Każedj więc transakcji można przyporządkować parę użyteczności (u, v) i skojarzyć ją z płaszczyzną:



użyteczność gracza 1

Q jest zbiorem wszystkich punktów określających dopuszczalne transaksje handlowe. Jest ograniczony, wypukły i domknięty. Nazywamy go zbiorem wypłat dopuszczalnych. Dopuszczalność rozumiemy w ten sposób, że dla dowolnej pary $(u, v) \in Q$ możliwe jest takie współdziałanie graczy, aby osiągnąć wartości u^* i v^* takie, że:

$$u^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \varphi_{ij} y_j,$$

$$v^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \psi_{ij} y_j$$

gdzie:
- x_i oznacza prawdopodobieństwo, z jakim gracz 1 stosuje $i-$tą strategię czystą,
- y_j prawdopodobieństwo, z jakim gracz 2 stosuje $j-$tą strategię czystą,
- φ_{ij}, ψ_{ij} wypłaty dla graczy 1 i 2 przy stosowaniu $i-$tej oraz $j-$tej strategii czystej,
- (u^*, v^*) oznacza transakcję wyróżnioną.

Gracz 1 zmierza do zawarcia porozumienia, któremu odpowiada użyteczność f, a gracz 2 zmierza do zawarcia porozumienia, któremu odpowiada użyteczność e. Aby osiągnąć kompromis, należy odrzucić transakcje zdominowane.

Mówimy, że punkt (u, v) jest łącznie zdominowany przez $(u', v') \in Q$, jeżeli $u' \geq u$ oraz $v' \geq v$. Należy zatem ograniczyć się do punktów niezdominowanych - na rysunku będzie to łamana $abcd$. Zbiory punktów niezdominowanych tworzą łączny zbiór maksymalny obszaru Q, zwany zbiorem optymalnym w sensie Pareto. Gracz 1 dąży do osiągnięcia d, gracz 2 do osiągnięcia a, gracze mogą sobie zapewnić wypłaty odpowiednio u^* i v^* (wartości maksyminowe). Punkty łącznego zbioru maksymalnego Q, dające każdemu graczowi co najmniej tyle, ile może osiągnąć przy strategii maksyminowej, to obszar negocjacji (u nas $ebcf$). Obszar negocjacji jest rozwiązaniem kooperatywnym gry.

2 Schematy arbitrażowe

Jesteśmy w sytuacji, gdy gracze targują się, który punkt z obszaru negocjacji wybrać (punkt na krzywej $ebcf$). Spór ten powinien rozstrzygnąć arbiter - schemay arbitrażowy (funkcja arbitrażowa) przyporządkowująca konfliktowi wypłatę dla obydwu graczy. Wypłata taka to rozwiązanie naszej gry (kompromisowe lub arbitrażowe). Funkcji arbitrażowych jest nieskończenie wiele, dlatego też należy ich zbiór maksymalnie zawęzić stosując odpowienie kryteria. Dlatego należy kierować się następującymi warunkami:

- rozwiązanie arbitrażowe powinno byś elementem obszaru negocjacji gry,

- rozwiązanie arbitrażowe nie powinno zależeć od konkretnych jednostek użyteczności,
- schemat arbitrażowy nie powinien zależeć od nieistotnych uwarunkowań zewnętrznych,
- dwie gry bliskie w sensie strategicznym powinny mieć bliskie rozwiązania arbitrażowe.

2.1 Rozwiązanie problemu przetargu w sensie Nasha

Staramy się znaleźć funkcję γ, która oznacza schemat arbitrażowy, określonej na Q, która byłaby rozwiązaniem przetargu $(\overline{u}, \overline{v})$. Znamy przy tym wartości minimakskowe (u^*, v^*) oraz zbiór Q. Każdej trójce (Q, u^*, v^*) funkcja γ przypisuje rozwiązanie takie, że:

$$\gamma(Q, u^*, v^*) = (\overline{u}, \overline{v})$$

Funkcja taka powinna spełniać następujące aksjomaty, zwane aksjomatami Nasha:

Aksjomaty Nasha

(N1) Dokonujemy transformacji $\tilde{Q}$ - zmieniamy punkt zerowy użyteczności dla obu graczy tak, aby (u^*, v^*) przeszedł na $(0, 0)$,

(N2) W obszarze $\tilde{Q}$ znajdujemy punkt $(\overline{u}, \overline{v})$, tak, że $\overline{u} \cdot \overline{v}$ jest największym z możliwych iloczynów uv, przy czym $(u, v) \in Q$. Dokładniej:

   - $(\overline{u}, \overline{v}) \in \tilde{Q}$, $\overline{u} > 0, \overline{v} > 0$,
   - $\overline{u} \cdot \overline{v} \geq uv$ dla każdej pary punktów $(u, v) \in \tilde{Q}$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Punkt $(\overline{u}, \overline{v})$ jest rozwiązaniem w sensie Nasha gry przetargu $\gamma(\tilde{Q}, 0, 0)$. Rozwiązanie dla $\gamma(Q, u^*, v^*)$ otrzymujemy przez odwrócenie przekształcenia w ten sposób, aby $(\overline{u} - u^*)(\overline{v} - v^*) \geq (u - u^*)(v - v^*)$, dla $(u, v) \in Q$ takiego, że $u \geq u^*$, $v \geq v^*$.

(N3) (optymalność w sensie Pareto) Wynik arbitrażowy powinien mieć następujące cechy:

   - (indywidualna racjonalność) $(\overline{u}, \overline{v}) \geq (u^*, v^*)$,
   - (dopuszczalność) $(\overline{u}, \overline{v}) \in Q$,
   - jeżeli $(u, v) \in Q$ i $(u, v) \geq (\overline{u}, \overline{v})$, to $(u, v) = (\overline{u}, \overline{v})$, to znaczy w obszarze Q nie ma punktu dopuszczalnego lepszego od schematu arbitrażowego.

(N4) (niezależność od nieistotnych uwarunkowań zewnętrznych) Jeżeli $(\overline{u}, \overline{v}) \in P \subset Q$ i $(\overline{u}, \overline{v}) = \gamma(Q, u^*, v^*)$, to $(\overline{u}, \overline{v}) = \gamma(P, u^*, v^*)$

(N5) (niezależność od przekształceń liniowych) Niech P powstaje z Q poprzez:

$$\begin{cases} u' = \alpha_1 u + \beta_1 \\ v' = \alpha_2 v + \beta_2 \end{cases}$$

Jeżeli $\gamma(Q, u^*, v^*) = (\overline{u}, \overline{v})$, to:

$$\gamma(P, \alpha_1 u^* + \beta_1, \alpha_2 v^* + \beta_2) = (\alpha_1 \overline{u} + \beta_1, \alpha_2 \overline{v} + \beta_2)$$

(N6) Niech $(u, v) \in Q \Leftrightarrow (v, u) \in Q$, niech $u^* = v^*$, niech $\gamma(Q, u^*, v^*) = (\overline{u}, \overline{v})$. Wówczas:

$$\overline{u} = \overline{v}$$

Mamy:

Twierdzenie **1** *Istnieje dokładnie jedna funkcja γ określona dla wszystkich problemów przetargu (Q, u^*, v^*) spełniająca aksjomaty Nasha.*

D o w ó d : Dowód znajduje się w książce G. Owena, *Teoria gier*, PWN, Warszawa 1975. ❏

2.2 Problem przetargu w sensie Harsányiego

Harsányi udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie **2** *Rozwiązanie problemu przetargu $(\overline{u}, \overline{v}) \in Q$ polegające na maksymalizacji iloczynu uv jest równoważne rozwiązaniu problemy Nasha.*

D o w ó d : Niech dany będzie problem przetargu, dla którego obszarem dopuszczalnych wypłat jest Q i niech transakcja wyróżniona przesunięta będzie w $(0, 0)$. Przypuśćmy, że gracz 1 chce dokonać transakcji o wypłatach danych w postaci użyteczności (u_1, v_1), gracz 2 (u_2, v_2). Niech będą to punkty różne i optymalne w sensie Pareto. Gracz 1 powinien ustąpić wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{u_1 - u_2}{u_1} \leq \frac{v_2 - v_1}{v_2}$$

a gracz 2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

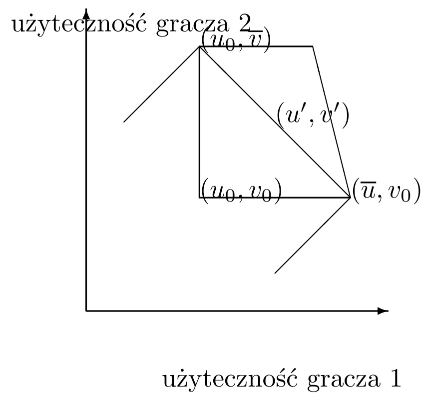
$$\frac{u_1 - u_2}{u_1} \geq \frac{v_2 - v_1}{v_2}$$

Pierwsza nierówność prowadzi do:

$$u_2 v_2 \geq u_1 v_1$$

Ustępujący gracz nie musi akceptować propozycji przeciwnika, lecz podsunąć transakcję (u_3, v_3) o iloczynie co najmniej takim, jak przeciwnika. Procedura ta zwiększa iloczyn składowych po każdym kolejnym przekształceniu i dlatego jest to to samo, co rozwiązanie w sensie Nasha. ❑

Zajmijmy się na chwilę nierównościami z dowodu twierdzenia. Zauważmy, że $\frac{u_1-u_2}{u_1}$, $\frac{v_2-v_1}{v_2}$ są to straty relatywne ustępujących graczy. Gracz, którego strata relaywna jest mniejsza winien ustąpić. Taki model negocjacji prowadzi od punktu (u^*, v^*) do ulepszenia krok po kroku pozycji gracza aż do osiągnięcia punktu optymalnego w sensie Pareto.



Przyjmijmy, że na pewnym etapie negocjacji gracze znajdują się w punkcie (u_0, v_0). Dla gracza 1 najbardziej optymalnym punktem jest $(\overline{u}, v_0)$, dla gracza 2 $(u_0, \overline{v})$. Arbitrażowy model negocjacji znajduje się w punkcie (u', v'):

$$u' = \frac{u_0 + \overline{u}}{2}, \quad v' = \frac{v_0 + \overline{v}}{2}$$

Przechodząc od punktu (u_0, v_0) gracze dochodzą w sposób nieliniowy do punktu (u', v'). Linię łączącą te dwa punkty nazywamy krzywą negocjacji.

3 Aukcje

Co to jest aukcja, wyjaśniać chyba nie trzeba. Aby jednak uniknąć nieporozumień wyszczególnijmy aukcje statyczne (takie jak w gazetach), aukcje dynamiczne (takie jak na filmach =:) , aukcje pierwszej ceny (kupujący deklarują na wstępie kwotę, którą zdecydowani są zapłacić), aukcje angielskie (popularne licytacje w górę), aukcje holenderskie (licytacje w dół tak jak w komisach). Nas aukcje interesują z punktu widzenia teorii gier jako szczególny przypadek przetargu.

Są to gry $n-$osobowe w postaci strategicznej, o dosyć skomplikowanych zbiorach strategii. Jako procedurę przyjmuje się zasadę określającą komu i na jakich warunkach zostaje sprzedany oferowany przedmiot. Wypłaty określa się dosyć zawile. Każdy z uczestników charakteryzuje liczba $v^1, \dots, v^n$ mówiąca, jaką wartość ma dla uczestnika licytowany przedmiot. Liczbę taką nazywamy waluacją. Jeśli przedmiot aukcji zostaje sprzedany graczowi i za kwotę p, to jego wypłatą jest $v_i - p$

3.1 O pewnym modelu aukcji statycznej (aukcja pierwszej ceny)

Niech będzie aukcja jednego przedmiotu sprzedanego po najwyższej cenie wymienionej w ofertach (aukcja pierwszej ceny). Oferty składane są niezależnie, kupujący nie wiedzą nic o cenach oferowanych przez konkurentów, znane są numery ofert. Niech $v^1, \dots, v^n$ będą waluacjami n graczy. Gracze nie znają waluacji swoich konkurentów, znają zaś swe waluacje. Znany natomiast jest rozkład prawdopodobieństwa dla waluacji. Niech $F(\cdot)$ oznacza dystrybuantę dla rozkładu waluacji, $f(\cdot)$ gęstość prawdopodobieństwa dla waluacji. Dla każdego gracza i optymalna oferta dana jest wzorem:

$$b^i = e(v^i, n, p^0, F) = v^i - \frac{1}{(F(v^i))^{n-1}} \int_{p^0}^{v^i} (F(x))^{n-1} dx$$

gdzie $v^i \geq p^0$, p^0 jest najniższą ceną (ceną rezerwacji), za którą sprzedawca skłonny jest sprzedać przedmiot aukcji.

Strategię równowagi aukcji pierwszej ceny określamy następująco:

$$\begin{cases} b^i \leq v^i, & \text{jeżeli } v^i \geq p^0 \\ b^i = p^0, \text{ jeżeli } v^i < p^0 \end{cases}$$

Przez b^w oznaczamy ofertę wygrywającą, $b^w = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} b^i$ jeżeli $b^w \geq p^0$. W przeciwnym wypadku obiekt nie zostaje sprzedany.

Optymalna oferta wyrażona jest wedle wzoru:

$$b^w = e(v^w, n, p^0, F) \cdot \chi_{\{v^w > p^0\}} + p \cdot \chi_{\{v^w > p^0\}}$$

gdzie $v^w = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} v^i$, zaś $\chi_{\{\cdot\}}$ jest indykatorem zdarzenia.

Zwycięzcą jest gracz o najwyższej waluacji.

Niech R oznacza spodziewany dochód sprzedawcy. Dochód ten jest równy b^w, jeśli obiekt został sprzedany, lub zero w przeciwnym wypadku. Z punktu widzenia sprzedawcy R jest losowe, zaś jego spodziewany dochód wynosi:

$$E(R) = n \int_{p^0}^{+\infty} \left(v(F(v))^{n-1} = \int_{p^0}^{v^i} (F(n))^{n-1} dx \right) f(v) dv$$

Aukcja pierwszej ceny i aukcja holenderska są strategicznie równoważne.

Aukcja drugiej ceny (tj. taka, w której wygrywa gracz składający najwyższą ofertę, ale płaci drugą co do wysokości cenę) jest równoważna w sensie węższym niż strategiczny aukcji angielskiej. Teoria aukcji drugiej ceny jest obszernym i skomplikowanym działem teorii gier. W 1996 roku William Vickrey otrzymał Nagrodę Nobla z dziedziny ekonomii m. in. za opracowanie teorii aukcji drugiej ceny.

Bibliografia:

E. Drabik, "*Elementy teorii gier dla ekonomistów*", Wyd. Uniw. w Białymstoku, Białystok 1998;
A.A. Borowkow, "*Rachunek prawdopodobieństwa*", PWN, Warszawa 1977;
L. Duncan, H. Raiffa, "*Gry, decyzje*", PWN, Warszawa 1964;