O pewnej regule alokacji jako sposobie inwestowania na giełdzie papierów wartościowych

Paweł Gładki

1 Podstawowe pojęcia teorii gier dwuosobowych

Strategia gracza to reguła określająca wybór przez gracza poszczególnego ruchu. Zbiorem strategii gracza jest zbiór wszystkich możliwych poczynań, jakie może on wykonać jako swój ruch. **Funkcją wypłat gry** nazywamy funkcję, przyporządkowującą każdej wybranej przez obu graczy parze strategii wypłatę przypadającą graczowi 1, należną od gracza 2. Grą G w **postaci strategicznej** nazywamy trójkę (A, B, Φ), gdzie A jest zbiorem strategii gracza 1, B jest zbiorem strategii gracza 2, zaś $\Phi = \{\phi_{ij}\}$ jest macierzą wypłat $\phi_{ij} = \phi(a_i, b_j)$ dla $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ określonych dla każdej pary strategii (a_i, b_j), gdzie $a_i \in A$, $b_j \in B$. Grę G nazywamy **skończoną**, gdy zbiory A i B są skończone. Staregie $a_1, \dots, a_m$ nazywamy **czystymi** strategiami gracza 1, a $b_1, \dots, b_n$ - gracza 2, odpowiednio.

Dolną wartością gry G nazywamy liczbę:

$$v_1 = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \phi(a, b)$$

Górną wartością gry G nazywamy liczbę:

$$v_2 = \min_{b \in B} \min_{a \in A} \phi(a, b)$$

Strategię $a_0 \in A$ odpowiadającą dolnej wartości gry v_1 nazywamy **maksiminową** dla gracza 1, a stategię $b_0 \in B$ odpowiadającą górnej wartości gry v_2 nazywamy **minimaksową** strategią gracza 2. Jeśli dla gry G zachodzi równość $v = v_1 = v_2$, to v nazywamy **wartością gry**. Strategia $a_0 \in A$ oraz $b_0 \in B$ odpowiadające wartości gry (o ile takowa istnieje), noszą nazwę strategii **optymalnych**. Znalezienie strategii optymalnych nazywamy **rozwiązaniem gry**.

Jeśli wartość gry nie istnieje , to gracz chcąc wygrać jak najwięcej, lub przegrać jak najmniej, musi stosować z określoną częstością poszczególne strategie czyste. Mówimy wtedy, że gracz stosuje strategię mieszaną. Zatem strategią **mieszaną** gracza 1 nazywamy rozkład prawdopodobieństwa określony na zbiorze A strategii gracza 1, odpowiednio strategią mieszaną gracza 2 nazywamy rozkład prawdopodobieństwa określony na zbiorze B strategii gracza

2. **Zrandomizowaną** strategię gracza 1 określają prawdopodobieństwa $x(a_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$ z jakimi gracz 1 ma stosować poszczególne swoje strategie czyste $a_i \in A$:

$$x(a_i) \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} x(a_i) = 1$$

Analogicznie definiujemy zrandomizowaną strategię gracza 2. Jeśli strategia mieszana danego gracza jest rozkładem jednopunktowym $x(a_i) = 1$, to staje się strategią czystą. Jeżeli $G = (A, B, \Phi)$ jest grą skończoną, to grę $\Gamma = (X, Y, H)$ nazywamy **mieszanym rozszerzeniem** gry G, przy czym X jest zbiorem wszystkich strategii mieszanych gracza 1, Y - gracza 2, zaś H jest średnią funkcją wypłat oreśloną wzorem:

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(a_i)\phi(a_i, b_j)y(b_j)$$

Ponieważ zbiory X i Y są nieskończone, więc dolną h_1 i górną h_2 wartość gry Γ definiujemy następująco:

$$h_1 = \sup_x \inf_y H(x, y)$$

$$h_2 = \inf_y \sup_x H(x, y)$$

2 Gry statystyczne

Mówimy, że gra jest **o sumie zerowej**, gdy suma wypłat jest równa zeru - w przeciwnum wypadku mówimy o grze **o sumie niezerowej**. Rozważmy grę dwuosobową o sumie zerowej, gdzie graczami są S (statystyk) i N (natura). Grę tę tworzą następujące elementy: Θ - przestrzeń zdarzeń, czyli stanów natury, θ - stan gracza N, A - zbiór strategii (akcji) gracza S i a - decyzja, $a \in A$. Zakładamy, że przestrzenie Θ i A są mierzalne i powiedzmy, że przed podjęciem decyzji $a \in A$ gracz S obserwuje pewną zmienną losową X, której rozkład zależy od pownego parametru θ (niekoniecznie znanego), określającego pewien stan gracza N. Oznaczmy przez $F(x|\theta)$ dystrybuantę warunkową rozkładu zmiennej losowej X, którą gracz S może obserwować.

Zbiór wszystkich wyników prób $n-$elementowych nazywamy **przestrzenią prób** i oznaczamy przez X. Tak więc $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ jest wektorem wyników eksperymentu. Każdą funkcję $d : X \rightarrow A$ nazywamy **niezrandomizowaną funkcją decyzyjną**. Zbiór funkcji decyzyjnych oznaczamy symbolem D. Dla każdego parametru $\theta \in \Theta$ i dla każdej decyzji $a \in A$, liczba $J(\theta, a)$ jest kosztem, jaki ponosi gracz S w związku z podjęciem decyzji $a \in A$ przy ustalonym parametrze $\theta \in \Theta$ (stanie gracza N). Grę określoną jako trójka (Θ, A, J) nazywamy **pierwotną grą strategiczną** odpowiadającą statystycznemu problemowi decyzyjnemu. Funkcję $R(\theta, d)$ określoną na $\Theta \times D$ wyrażoną wzorem:

$$R(\theta, d) = EJ(\theta, a) = \int_X J(\theta, a) dF(x|\theta)$$

nazywamy **funkcją ryzyka**. Dla ustalonego parametru θ i ustalonej funkcji $d \in D$ ryzyko $R(\theta, d)$ jest nielosowe i odgrywa rolę wypłaty w grze pomiędzy graczem S a graczem N. Wypłata jest średnim kosztem, jaki ponosi gracz S stosujący wielokrotnie funkcję decyzyjną $d \in D$, gdy parametr $\theta \in \Theta$. Trójkę (Θ, D, R) nazywamy grą statystyczną.

3 Gra na giełdzie

Zakładamy, że „gra na giełdzie" jest dwuosobową grą losową prowadzoną przez gracza S, czyli statystyka, oraz gracza N, czyli „naturę". Giełdy nie można jednak zaliczyć do gier o sumie zerowej - bardziej odpowiednim modelem jest model przetargu (por. referat **„Problem przetargu"**). Reguły gry są ustalone z gy i nie ulegają zmianom losowym.

Istnieje wiele sposobów inwestowania na giełdzie, dzięki ktym można zminimalizować ryzyko przegranej, lub zmaksymalizować wygraną. Są to na przykład metody: regularnego inwestowania, stałej kwoty kapitału, stałej relacji dwóch portfeli, metoda cenowo-wskaźnikowa itp. Zaprezentujemy tu strategię gry na giełdzie bazującą na pewnej regule alokacji, którą można zaadoptować jako strategię inwestora, zamierzającego przegrać jak najmniej. Regułę taką nazywamy **asymptotycznie efektywną adaptacyjną regułą alokacji.**

Gra na giełdzie jest typową grą statystyczną. Wyróżniamy w niej następujące elementy: zbiór stanów gracza N - Θ, pokrywający się z przestrzenią nieznanych parametrów, zbiór decyzji gracza S - Φ, funkcję kosztu związaną z grą J. Zakładamy więc, że gra na giełdzie jest trójką (Θ, Φ, J).

Załóżmy, że gracz S gra $N > 1$ spółkami wybranymi spośród ognej liczby spółek notowanych na giełdzie. Dodatkowo załóżmy, że w dowolnym momencie t gracz S posiada akcje m, $1 \leqslant m < N$, spółek. Gra $j-$tą spółką daje graczowi S ciąg wypłat $Y_1^j, Y_2^j, \ldots$, który jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $f(y; \theta^j)$, gdzie θ^j jest nieznanym rzeczywistym parametrem takim, że $\theta^j \in \Theta$. Role wypłat odgrywają różnice kursów; dla giełdy warszawskiej:

$$Y_i^j = X_i^j - X_{i-1}^j, \quad j \in \{1, \ldots, N\}, i \in \mathbb{N}$$

Znacznie gorzej jest w przypadku giełdy np. nowojorskiej, tutaj wygodniej jest przyjąć:

$$Y_i^j = \log \frac{X_i^j}{X_{i-1}^j} + \kappa$$

Gracz S wybiera w każdym momencie decyzyjnym m spółek, a swój wybór uzależnia od poprzednich notowań w taki sposób, by zmaksymalizować spodziewaną wypłatę w długim horyzoncie czasowym. Zakładamy, że spełniony jest warunek:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(y;\theta) dl_1(y) < \infty$$

i średnia spodziewana wypłata wynikająca z gry $j-$tą spółką wynosi:

$$\mu(\theta^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y;\theta^j) dl_1(y)$$

gdzie $\mu(\theta)$ jest ściśle rosnącą funkcją parametry θ.

Adaptacyjna reguła alokacji ϕ jest ciągiem wektorów losowych $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{N^{\mathbb{N}}}$, informujących, którymi m, $1 \leqslant m < N$ spośród N spółek gracz S powinien grać w chwili t, $t \in \mathbb{N}$. W momencie decyzyjnym t reguła ϕ zależy od historii gry $\phi_1, \ldots, \phi_{t-1}$ oraz wypłat $Y_1^j, \ldots, Y_{T_j(t)}^j$, gdzie

$$T_j(t) = \sum_{i=1}^{t} \phi_i^j$$

oznacza czas gry spółką $j-$tą do chwili t.

Niech

$$S_t = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{T_j(t)} Y_i^j$$

będzie sumą wypłat, którą zgromadzi gracz S do chwili t. Średni spodziewany zysk wynikający ze stosowania reguły ϕ wynosi:

$$E_\theta S_t = \sum_{j=1}^{N} \mu(\theta^j) E_\theta T_j(t)$$

Zauważmy, że gdyby gracz S znał prawdziwe parametry $\Theta^0 = (\theta^{0,1}, \theta^{0,1}, \ldots, \theta^{0,N})$, to grałby walorami o najwyższej wartości statystyki $\mu(\theta)$. Ponieważ jednak ich nie zna i gra według pewnej z góry ustalonej strategii, więc zamiast o zysku można mówić o koszcie, który jest równy różnicy między zyskiem wynikającym z gry m najlepszymi spółkami, a zyskiem wynikającym ze stosowania strategii $\phi \in \Phi$.

Niech ρ oznacza permutację $\{1, \ldots, N\}$ taką, że:

$$\mu(\theta^{\rho(1)}) \geqslant \mu(\theta^{\rho(2)}) \geqslant \ldots \geqslant \mu(\theta^{\rho(N)})$$

Jeżeli $\mu(\theta^{\rho(m)}) > \mu(\theta^{\rho(m+1)})$, to o spółkach $\rho(1),\ldots,\rho(m)$ mówimy, że są $m-$**liderami**, a spółki $\rho(m+1),\ldots,\rho(N)$ są $m-$**najgorszymi**.

Koszt gry wynosi:

$$J^\theta(t) = t\sum_{i=1}^{m}\mu(\theta^{\rho(i)}) - ES_t$$

Problem polega na minimalizacji funkcjonału powyższego kosztu.

W przypadku, gdyby gracz S grał zawsze spółkami takimi, że $\mu(\theta^i) > \mu(\theta^j)$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $m+1 \leqslant j \leqslant N$, to koszt byłby zerowy. Jeżeli jednak wybrałby takie m spółek, dla których $\mu(\theta^i) < \mu(\theta^j)$ dla pewnych $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $m+1 \leqslant j \leqslant N$, to koszt byłby proporcjonalny do t.

O regule alokacji możemy powiedzieć, że jest **jednostajnie dobra**, jeśli dla każdej konfiguracji parametrów spełniony jest warunek $J^\theta(t) = o(t^a)$, który zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$.

Niech $I(\theta,\lambda)$ oznacza **liczbę Kulbacka - Leiblera**:

$$I(\theta,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty}[\log\frac{f(y;\theta)}{f(y;\lambda)}]f(y;\theta)dl_1(y)$$

Zauważmy, że $0 \leqslant I(\theta,\lambda) \leqslant \infty$ oraz spełnia następujące warunki:

A1: $0 < I(\theta,\lambda) < \infty$ jeżeli $\lambda > 0$;

A2: Jeżeli dla wszelkich $\epsilon > 0, \theta, \lambda$ takich, że $\mu(\lambda) > \mu(\theta)$ istnieje $\delta(\epsilon,\theta,\lambda) > 0$ taka, że $|I(\theta,\lambda) - I(\theta,\lambda')| < \epsilon$, to wówczas:

$$\mu(\lambda) \leqslant \mu(\lambda') \leqslant \mu(\lambda) + \delta$$

;

A3: $I(\theta,\lambda)$ jest ciągła ze względu na $\lambda > \theta$ dla pewnego ustalonego θ.

Mówimy, że adaptacyjna reguła alokacji jest **asymptotycznie efektywna**, jeżeli dla każdej konfiguracji parametrów $\Theta = (\theta^1,\ldots,\theta^N)$, dla których $\mu(\theta^j)$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, nie są równe, koszt daje się przedstawić w postaci:

$$\limsup_{t\to\infty} J^\theta(t) = (\sum_{j\in\{\sigma(m+1),\ldots,\sigma(N)\}}\frac{\mu(\theta^{\rho(m)}) - \mu(\theta^j)}{I(\theta^j,\theta^{\rho(m)})})\log t$$

W celu zdefiniowania strategii gry $\phi \in \Phi$, która może być traktowana jako jeden ze sposobów inwestowania na giełdzie papierów wartościowych, posłużymy się dwiema funkcjami pomocniczymi: $g_{ti} : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,2,\ldots,t\}$ oraz $h_i : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. Funkcje te muszą spełniać następujące warunki:

- Dla każdego $\theta \in \Theta$ istnieją $\lambda, \xi \in \Theta$ takie, że:

$$P_\theta\{g_{ti}(Y_1, \ldots, Y_i) \geqslant \mu(\xi) \bigwedge_{i \leqslant t}\} = 1 - o(t^{-1})$$

  dla każdego $\mu(\xi) < \mu(\theta)$.

- Dla dostatecznie małych $\epsilon > 0$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{t \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{t} P_\theta\{g_{ti}(Y_1, \ldots, Y_i) \geqslant \mu(\lambda) - \epsilon\}}{\log t} \leqslant \frac{1}{I(\theta, \lambda)}$$

- g_{ti} jest niemalejąca dla $t \geqslant i$ dla pewnych stałych $i \in \mathbb{N}$

- $h_i \leqslant g_{ti}$ dla każdego $t \geqslant i$

- Dla każdego $\theta \in \Theta$ statystyka h_i powinna spełniać warunek:

$$P_\theta\{\max_{\delta t \leqslant i \leqslant t} |h - i(Y_1, \ldots, Y_i) - \mu(\theta)| > \epsilon\} = o(t^{-1})$$

  dla każdego $\epsilon > 0$ oraz $0 < \delta < 1$.

Funkcję g_{ti} interpretujemy jako górną granicę przedziału ufności dla średniej wypłaty $\mu(\theta)$, zaś funkcję h_i jako statystykę punktową $h_i(Y_1, \ldots, Y_i)$ dla oczekiwanej wypłaty $\mu(\theta)$.

Dobrym estymatorem spełniającym ostatni warunek jest średnia:

$$h_i(Y_1, \ldots, Y_i) = (Y_1 + \ldots + Y_i)/i$$

przy założeniu, że $E_\theta(Y_1)^2 < \infty$.

Niech $Y_1^j, \ldots, Y_{T_j(t)}^j$ oznacza obserwację wypłat spółki $j-$tej do chwili t. Definiujemy dwie statystyki pomocnicze:

$$\mu(t) = h_{T_j(t)}(Y_1^j, \ldots, Y_{T_j(t)}^j)$$

$$U_j(t) = g_{t, T_j(t)}(Y_1^j, \ldots, Y_{T_j(t)}^j)$$

Strategia inwestowania na giełdzie papierów wartościowych jest następująca:

1. Przez pierwsze N ruchów gracz S testuje $m \leqslant N$ razy każdą ze spółek w pewnym ustalonym porządku (czyli m z N stanów posiada akcje każdej z nich).

2. W chwili $(t+1)$ gracz S musi podjąć decyzję, którymi spośród N spółek będzie grał. Przez $m-$liderów w chwili $t+1$ rozumiemy te spółki, które w chwili t miały najwyższe wartości statystyki $\mu_k(t)$, $k \in \{1, \ldots, N\}$, gdzie $\mu_k(t) = h_i(Y_1^k, \ldots, T_{T_j(t)}^k)$.

Niech $j \in \{1, \ldots, N\}$ będzie spółką, którą gracz S bada w chwili $t+1$ taką, że $j = (t+1) mod N$. Oblicza statystykę $U_j(t)$:

$$U_j(t) = g_{t, T_j(t)}(Y_1^j, \ldots, Y_{T_j(t)}^j)$$

po czym podejmuje jedną z następujących decyzji:

a) jeżeli spółka $j-$ta jest jednym spośród $m-$liderów, to w stanie $t+1$ gracz S gra w dalszym ciągu $m-$liderami (nie zmienia stanu swego posiadania);

b) jeżeli spółka $j-$ta nie była jedną z $m-$liderów, czyli jedną z tych, które posiadał gracz S przed podjęciem decyzji, oraz $U_j(t) < \mu_k(t)$ dla każdej $k-$tej spółki, która jest $m-$liderem, to gracz S ponownie gra $m-$liderami (nie zmienia stanu swego posiadania);

c) jeżeli spółka $j-$ta nie była jednym spośród $m-$liderów oraz $U_j(t) \geqslant \mu_{j_t}(t)$, gdzie j_t jest najgorszym spośród $m-$liderów, to gracz S gra ponownie $m-1$ najlepszymi spośród m-liderów, a akcje spółki j_t-tej wymienia na $j-$tą.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie **3.1** (Anantharam, Varayia, Warland) *Reguła alokacji ϕ jest asymptotycznie efektywna.*

4 Przykład

Załóżmy, że ciąg wypłat Y_i^j, $j \in \{1, \ldots, N\}$, $i \in \mathbb{N}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych postaci takiej, jak na giełdzie nowojorskiej. Wówczas można przyjąć, że zmienne te mają rozkłady normalne. Przyjmiemy również, że wypłaty mają jednakowe wariancje σ^2 i że nie jest znana średnia $EY_i^j = \theta^j$. Wówczas $\mu(\theta) = \theta$, a gęstość wyraża się wzorem:

$$f(y, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

Funkcja Kulbacka-Leiblera wynosi:

$$I(\theta, \lambda) = \frac{(\lambda - \theta)^2}{2\sigma^2}$$

i spełnia ona warunki **A1 - A3**.
Niech a_{ti}, $t \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, t\}$ będzie funkcją niemalejącą dla $t \geqslant i$ oraz istnieje $\epsilon_t \to 0$ takie, że:

$$|a_{ti} - \frac{\log t}{i}| \leqslant \epsilon \frac{\sqrt{\log t}}{\sqrt{i}}$$

dla każdego $i \leqslant t$. Dla $j \in \{1, \ldots, N\}$ definiujemy:

$$\overline{Y}_i^j = (Y_1^j + \ldots + Y_i^j)/i$$

$$h_i(Y_1^j, \ldots, Y_i^j) = \overline{Y}_i^j$$

oraz

$$g_{ti}(Y_1^j, \ldots, Y_i^j) = \overline{Y}_i^j + \sigma(2a_{ti})^{\frac{1}{2}}$$

dla $t \geqslant i$. Statystyki powyższe spełniają żądane warunki.

Bibliografia

[1] E. Drabik, *Elementy teorii gier dla ekonomistów*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 1998

[2] E. Drabik, *O metodzie inwestowania na giełdzie papierów wartościowych opartej na pewnym modelu sterowania adaptacyjnego*, Wydawnictwo Filii Uniwersytetu Warszawskiego w Białymstoku, Białystok 1995

[3] V. Anantharam, P. Varayia, J. Warland, *Asymptotically Efficient Allocation Rules for the Multiarmed Bandit Problem with Multiple Plays - PART 1:I.I.D. Rewards.*, IEEE Trans. Automatic Contr., Vol. AC-32, No. 11, 969-977, 1987

[4] T.L. Lai, H. Robbins, *Asymptotically efficient adaptative allocation rules*, Adv. Appl. Math., Vol. 6., 4-22, 1985