KILKA SŁÓW O ALGEBRZE RÓŻNICZKOWEJ

PAWEŁ GŁADKI

1. Podstawowe wiadomości o pierścieniach różniczkowalnych

1.1. **Różniczkowania.**

Definicja 1.11. Różniczkowaniem *w pierścieniu A nazywamy odwzorowanie* $': A \to A$ *spełniające warunki:*

(1) $(a+b)' = a' + b', \quad a, b \in A,$
(2) $(ab)' = a'b + ab', \quad a, b \in A.$

Ponadto oznaczamy: $(a')' = a''$, $((a')')' = a'''$, $\dots$, $((a')\dots)' = a^{(n)}$.

Uwaga 1.1.1. *Dla dowolnego pierścienia A i różniczkowania $': A \to A$ zachodzą związki:*

(1) *(wzór Leibniza)* $(ab)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad a, b \in A,$
(2) $(a^n)' = na^{n-1}a', \quad a \in A,$
(3) $1' = 0$, *o ile A jest pierścieniem z jedynką,*
(4) $(a^{-1})' = -a^{-1}a'a^{-1}, \quad a \in A$, *o ile a jest odwracalny.*

Dowód. Ćw. □

Twierdzenie 1.1.1. *Niech A będzie pierścieniem całkowitym, $': A \to A$ różniczkowaniem. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedłużenie różniczkowania $'$ na ciało ułamków (A) pierścienia A.*

Dowód. Por. [1] str. 7. □

1.2. **Pierścienie różniczkowalne.**

Definicja 1.21. Pierścieniem różniczkowalnym *nazywamy pierścień przemienny z jedynką, w którym określono pewne różniczkowanie.*

`Przykłady:`

(1) Niech A będzie dowolnym pierścieniem przemiennym z jedynką, a różniczkowanie niech będzie określone wzorem:
$$a' = 0, \quad a \in A.$$
Jest to pierścień różniczkowalny.
(2) Niech $D^\infty(\mathbb{C})$ będzie pierścieniem funkcji zespolonych nieskończenie wiele razy różniczkowalnych, a różniczkowanie będzie określone w zwykły sposób. Jest to pierścień różniczkowalny.
(3) Niech $I(\mathbb{C})$ będzie pierścieniem funkcji zespolonych całkowitych, a różniczkowanie będzie określone w zwykły sposób. Jest to pierścień różniczkowalny. Jest to też pierścień całkowity.

(4) Niech $M(\mathbb{C})$ będzie pierścieniem funkcji zespolonych meromorficznych, a różniczkowanie będzie określone w zwykły sposób. Jest to pierścień różniczkowalny. Jest to ciało ułamków pierścienia $I(\mathbb{C})$.
(5) Niech $A(\mathbb{C})$ będzie pierścieniem funkcji zespolonych analitycznych, a różniczkowanie będzie określone w zwykły sposób. Jest to pierścień różniczkowalny.
(6) Niech A będzie pierścieniem różniczkowalnym. Różniczkowanie z tego pierścienia rozszerzamy na pierścień $A[X]$ definiując X' jako dowolny element, a $(X^n)' = nX^{n-1}X'$. Jest to pierścień różniczkowalny. Wobec twierdzenia 1.1.1 również $A(X)$ jest pierścieniem różniczkowalnym.
(7) Niech A będzie pierścieniem różniczkowalnym. W pierścieniu $A[\{X_i\}_{i\in I}]$ wielomianów nieskończenie wielu zmiennych definiujemy:
$$X_i' = X_{i+1}$$
i oznaczamy:
$$X_0 = X, \qquad X_n = X^{(n)}.$$
Otrzymany pierścień różniczkowalny oznaczamy $A\{X\}$ i nazywamy **pierścieniem różniczkowalnych wielomianów zmiennej** X, a opisany wyżej proces **dołączeniem zmiennej różniczkowalnej**. Jeżeli A jest ciałem, to $A\{X\}$ jest pierścieniem całkowitym i jako taki ma ciało ułamków, które oznaczamy $A < X >$ i nazywamy **ciałem różniczkowalnych funkcji wymiernych zmiennej** X**.** Analogicznie definiujemy pierścienie różniczkowalnych wielomianów wielu zmiennych $A\{X_1,\dots,X_n\}$ i ciała różniczkowalnych funkcji wymiernych wielu zmiennych $A < X_1,\dots,X_n >$.

Uwaga 1.2.1. *Niech A będzie pierścieniem różniczkowalnym.*
(1) *Zbiór:*
$$C = \{a \in A : a' = 0\}$$
jest podpierścieniem pierścienia A.
(2) *Jeżeli A jest ciałem, to zbiór:*
$$C = \{a \in A : a' = 0\}$$
jest podciałem ciała A.

Dowód. Ćw. □

Definicja 1.22. *Niech A, B będą pierścieniami różniczkowalnymi.*
(1) *Podpierścień*
$$C = \{a \in A : a' = 0\}$$
nazywamy **pierścieniem stałych** *pierścienia A.*
(2) *Ideał $I \lhd A$ nazywamy* **ideałem różniczkowalnym***, jeżeli*
$$\bigwedge_{a\in A} a \in I \Rightarrow a' \in I.$$
(3) *Homomorfizm $\phi\colon A \to B$ nazywamy* **homomorfizmem różniczkowalnym***, jeżeli*
$$\bigwedge_{a\in A} \phi(a') = (\phi(a))'.$$

Uwaga 1.2.2. *Niech A będzie pierścieniem różniczkowalnym, $I \lhd A$ ideałem różniczkowym. Wówczas pierścień ilorazowy A/I jest dobrze określonym pierścieniem różniczkowalnym, gdzie:*

$$(a+I)' = a' + I.$$

Dowód. Ćw. □

Twierdzenie 1.2.1. *Niech A, B będą pierścieniami różniczkowalnymi, $\phi\colon A \to B$ homomorfizmem różniczkowalnym. Wówczas $\ker\phi$ jest ideałem różniczkowalnym, A/I pierścieniem różniczkowalnym oraz $A/I \cong Im\phi$.*

Dowód. Ćw. □

1.3. **Ideały radykalne.**

Uwaga 1.3.1. *Niech A będzie pierścieniem, $I \lhd A$ ideałem. Zbiór*

$$\{a \in A\colon \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a^n \in I\}$$

jest ideałem pierścienia A.

Dowód. Ćw. □

Definicja 1.31. *Niech A będzie pierścieniem, $I \lhd A$ ideałem.*

(1) *Ideał*

$$\{a \in A\colon \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a^n \in I\}$$

nazywamy **radykałem** *ideału I i oznaczamy $\mathsf{rad}\, I$.*

(2) *Ideał I nazywamy* **ideałem radykalnym**, *jeżeli $I = \mathsf{rad}\, I$.*

Uwaga 1.3.2. *Przekrój radykalnych ideałów różniczkowalnych jest radykalnym ideałem różniczkowalnym.*

Dowód. Ćw.
W s k a z ó w k a : Udowodnić, że jeżeli I jest radykalnym ideałem różniczkowalnym oraz $a, b \in I$, to $ab' \in I$ oraz $a'b \in I$. Wykorzystując ten fakt pokazać, że jeśli I jest radykalnym ideałem różniczkowalnym i $S \subset A$, to zbiór

$$\{x \in A\colon xS \subset I\}$$

jest radykalnym ideałem różniczkowalnym. □

Definicja 1.32. *Niech A będzie pierścieniem różniczkowalnym, niech $S \subset A$. Najmniejszy radykalny ideał różniczkowy zawierający zbiór S nazywamy radykalnym ideałem różniczkowalnym* **generowanym** *przez zbiór S i oznaczamy $\{S\}$.*

Uwaga 1.3.3. *Niech A będzie pierścieniem różniczkowalnym, niech $S, T \subset A$. Wówczas $\{S\}\{T\} \subset \{ST\}$.*

Dowód. Ćw. □

1.4. **Algebry Ritta.**

Definicja 1.41. Algebrą Ritta *nazywamy pierścień różniczkowalny zawierający ciało liczb wymiernych.*

Twierdzenie 1.4.1. *Niech A będzie algebrą Ritta, I ideałem różniczkowalnym. Wówczas* $\operatorname{rad} I$ *jest radykalnym ideałem różniczkowalnym.*

Dowód. Ćw.
W s k a z ó w k a : Udowodnić najpierw, że jeżeli $a \in A$ i $a^n \in I$, to $(a')^{2n-1} \in I$. □

Powyższe twierdzenie nie jest na ogół prawdziwe w dowolnym pierścieniu różniczkowalnym - stosowny przykład por. [1].

2. Twierdzenie o bazie i jego zastosowania

2.1. **Twierdzenie o bazie.**

Twierdzenie Hilberta o bazie orzeka, że jeśli pierścień R jest noetherowski, to również pierścień $R[X]$ taki jest; innymi słowy, jeżeli w R spełniony jest warunek wstępującego łańcucha ideałów, to jest on spełniony również w pierścieniu $R[X]$ powstałym przez dodanie do pierścienia R elementu algebraicznie niezależnego. Różniczkowym analogonem tego twierdzenia jest następujące:

Twierdzenie 2.1.1 (Ritta - Rodenbacha o bazie)**.** *Niech R będzie algebrą Ritta, w której każdy wstępujący łańcuch radykalnych ideałów różniczkowalnych jest skończony. Wówczas w algebrze Ritta $R\{X\}$ różniczkowalnych wielomianów zmiennej X każdy wstępujący łańcuch radykalnych ideałów różniczkowalnych jest skończony.*

Dowód. Por. [1] str. 59 - 63. □

Wniosek 2.1.1. *Niech R będzie algebrą Ritta, w której każdy wstępujący łańcuch radykalnych ideałów różniczkowalnych jest skończony. Wówczas w algebrze Ritta $R\{X_1, \dots, X_n\}$ różniczkowalnych wielomianów zmiennych $X_1, \dots, X_n$ każdy wstępujący łańcuch radykalnych ideałów różniczkowalnych jest skończony.*

2.2. **Układy równań różniczkowych.**

Definicja 2.21. Algebraicznym równaniem różniczkowym *nad ciałem różniczkowalnym F nazywamy równanie powstałe przez przyrównanie do zera różniczkowalnego wielomianu o współczynnikach z ciała F.*

Twierdzenie 2.2.1. *Dla dowolnego nieskończonego układu algebraicznych równań różniczkowych nad ciałem różniczkowalnym F charakterystyki 0 o skończonej liczbie zmiennych różniczkowalnych istnieje skończony podukład, którego rozwiązania pokrywają się z rozwiązaniami wyjściowego układu.*

Dowód. Ćw. □

2.3. **Twierdzenie o rozkładzie.**

Twierdzenie 2.3.1. *Niech R będzie pierścieniem różniczkowalnym, w którym każdy wstępujący łańcuch radykalnych ideałów różniczkowalnych jest skończony. Wówczas każdy radykalny ideał różniczkowalny można przedstawić jako przekrój skończonej liczby ideałów pierwszych i różniczkowalnych.*

W szczególności, jeżeli F jest ciałem różniczkowalnym charakterystyki 0, to w pierścieniu $F\{X_1, \dots, X_n\}$ różniczkowalnych wielomianów zmiennych $X_1, \dots, X_n$

każdy radykalny ideał różniczkowalny można przedstawić jako przekrój skończonej liczby ideałów pierwszych i różniczkowalnych.

Dowód. Por. [1] str. 64. □

Twierdzenie 2.3.2. *Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Jeżeli ideał I ma dwa nieskracalne (tj. takie, z których nie można usunąć żadnego czynnika) przedstawienia w postaci przekroju ideałów pierwszych:*

$$I = P_1 \cap \ldots \cap P_r = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$$

to $r = s$ i - po ewentualnej zmianie numeracji - $P_i = Q_i$.

Dowód. Fakt ogólny. □

2.4. **Zastosowanie do równań o jednej niewiadomej.**

Twierdzenie 2.4.1. *Niech F będzie ciałem różniczkowalnym charakterystyki 0, niech A będzie wielomianem różniczkowalnym jednej zmiennej X stopnia n, niech $S = \frac{\partial A}{\partial Y^{(n)}}$. Wówczas zbiór*

$$J = \{B \in F\{X\} : BS \in \{A\}\}$$

jest ideałem pierwszym i różniczkowalnym. Ponadto, jeżeli $\{A, S\} = P_1 \cap \ldots \cap P_r$ jest nieskracalnym przedstawieniem ideału $\{A, S\}$ w postaci przekroju ideałów pierwszych i różniczkowalnych, to w nieskracalnym przedstawieniu ideału $\{A\}$ w postaci przekroju ideałów pierwszych i różniczkowalnych występuje ideał J i niektórw z ideałów $P_1, \ldots, P_r$.

Dowód. Por. [1] str. 65 - 67. □

`Przykłady:`

(1) Niech $F = \mathbb{C}$, $A = (X')^2 - 4X$. Wówczas $S = 2X'$. Zauważmy, że $\{A, S\}$ jest maksymalny (ćw.), a zatem pierwszy. Niech $J = \{B \in \mathbb{C}\{X\} : BS \in \{A\}\}$. Zauważmy, że $X' \notin J$; istotnie, przypuśćmy, że $X' \in J$. Wówczas, skoro $X' \in \{A, S\}$, to $X' \in \{A\}$. Wobec tego $A|X'$ (ćw.), co doprowadza nas do sprzeczności. Dalej, zauważmy, że skoro $A' = 2X'(X'' - 2) \in \{A\}$ oraz J jest pierwszy, to $X'' - 2 \in J$. Ponadto $K = \{(X')^2 - 4X, X'' - 2\} \subset J$ jest ideałem pierwszym (ćw.). Oczywiście $\{A\} = J \cap \{A, S\} \cap K$. Stąd i z poprzedniego twierdzenia wynika, że $\{A\} = \{A, S\} \cap K$ jest nieskracalnym przedstawieniem ideału $\{A\}$ w postaci przekroju ideałów pierwszych i maksymalnych.

Rozwiążmy teraz równanie $(X')^2 - 4X = 0$. Jeżeli t jest rozwiązaniem, to $2t' = 0$ lub $t'' - 2 = 0$. Zatem $t' = 0$ lub $t'' = 2$, skąd - co łatwo sprawdzić - $t = 0$ lub $t = (y + c)^2$.

Bibliografia

[1] Irving Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1957.