

PROPOZYCJE TEMATÓW PRAC MAGISTERSKICH

PAWEŁ GŁADKI

1. WIELOWYMIAROWY PROBLEM MOMENTU

Jednowymiarowy problem momentu jest starym zagadnieniem, którego korzeni szukać należy w oryginalnych pracach Stieltjesa: dla danego ciągu liczb rzeczywistych $(s_k)_{k \geq 0}$ pytamy się, czy istnieje miara Radona μ na $\mathbb{R}$ taka, że

$$s_k = \int x^k d\mu$$

dla wszystkich $k \geq 0$. Ten pozornie analityczny problem jest w istocie klasycznym zagadnieniem algebry związanym z istnieniem wielomianów spełniających określone warunki dodatniości. W ostatnich latach zainteresowano się tzw. wielowymiarowym problemem momentu. Celem pracy byłoby przestudiowanie artykułu [?] i przedstawienie zawartych tam rezultatów, w szczególności zrozumienie i zreferowanie zagadnienia wielowymiarowego problemu momentu. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności.

LITERATURA

- [1] M. Ghasemi, S. Kuhlmann, M. Marshall, *Moment problem in infinitely many variables*, preprint.

2. SUMY KWADRATÓW W NIERZECZYWISTYCH PIERŚCIENIACH PRZEMIENNYCH

Niech R będzie pierścieniem przemiennym, w którym $1 \neq 0$. Pierścień ten nazwiemy nierzeczywistym, jeśli -1 jest sumą kwadratów w R . Jednym z problemów algebry rzeczywistej jest studiowanie niezmienników takich pierścieni, w tym:

- poziomu $s(R)$ pierścienia R , czyli najmniejszej liczby n takiej, że -1 jest sumą n kwadratów w R ;
- podpoziomu $\underline{s}(R)$, czyli najmniejszej liczby n takiej, że 0 można przedstawić jako sumę $0 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$, gdzie x_i generują R jako ideał;
- liczby Pitagorasa $p(R)$ pierścienia R , czyli najmniejszej liczby n takiej, że każda suma kwadratów w R może być zapisana jako suma nie więcej niż n kwadratów.

W przeglądowym artykule [?] podane są liczbe twierdzenia opisujące zachowanie powyższych niezmienników, jak również studiowane są możliwe wartości, jakie niezmienniki mogą przyjmować. Celem pracy byłoby zapoznanie się z zawartością pracy Hoffmanna. Z uwagi na często obliczeniowy charakter prowadzonych rozważań, możliwe byłoby rozszerzenie pracy o nowe, dotychczas niepublikowane rezultaty, skupiające się na podaniu nowych wartości niezmienników. Temat jest adresowany do studentów wszystkich specjalności.

LITERATURA

- [1] D. Hoffmann, *Sums of squares invariants of rings*, preprint.

3. WIELOMIANY DODATNIE NA PASKACH I PÓŁ-PASKACH.

W klasycznej pracy z 1888 roku Hilbert [?] pokazał, że istnieją rzeczywiste wielomiany o dwóch zmiennych dodatnie w każdym punkcie płaszczyzny, które nie są sumami kwadratów. Najbardziej znany przykład takiego wielomianu to wielomian Motzkina:

$$M(x, y) = 1 - 3x^2y^2 + x^4y^2 + x^2y^4.$$

Do dziś w znacznej mierze otwarte pozostaje pytanie, czy takie samo twierdzenie zachodzi dla wielomianów dodatnich na pewnych podzbiorach płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. O ile przypadek podzbiorów zwartych i semialgebraicznych jest kompletnie opisany przez eleganckie i zarazem głębokie twierdzenie Putinara, o tyle przypadek zbiorów niezwartych jest o wiele bardziej skomplikowany. Wychodząc od zagadnień związanych z problemem momentu, Powers i Scheiderer w pracy [?] postawili pytanie o postać wielomianów dodatnich na nieskończonym pasku $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Pytanie pozostawało otwarte przez nieomal 10 lat, a zostało rozstrzygnięte przez Marshalla, który w artykule [?] wskazał, że każdy taki wielomian jest postaci

$$f(x, y) = \sigma(x, y) + \tau(x, y)x(1 - x),$$

gdzie σ i τ są sumami kwadratów w $\mathbb{R}[x, y]$.

Rozwijając idee ze swojej rozprawy doktorskiej pisanej pod opieką prof. Vicki Powers z University of Atlanta, prof. Ha Nguyen z Wesleyan College w pracy [?] uogólniła metodę Marshalla i otrzymała szereg nowych, interesujących charakterystyki wielomianów dodatnich na nieskończonych paskach i pół-paskach. Celem pracy będzie szczegółowe przestudiowanie rezultatów pracy [?] i ich zreferowanie. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności.

LITERATURA

- [1] D. Hilbert, *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*, Math. Ann. 32, 342–350 (1888).
- [2] M. Marshall, *Polynomials non-negative on a strip*, Proceedings AMS 138 (2010), 1559–1567.
- [3] H. Nguyen, V. Powers, *Polynomials non-negative on strips and half-strips*, preprint, 2011.
- [4] V. Powers, C. Scheiderer, *The moment problem for non-compact semialgebraic sets*, Adv. Geom. 1, 71–88 (2001).

4. HERMITOWSKIE ODPOWIEDNIKI 17-TEGO PROBLEMU HILBERTA.

17-ty problem Hilberta, rozwiązany w 1927 roku przez Artina, pyta czy rzeczywisty wielomian dodatni daje się przedstawić jako suma kwadratów. Naturalne jest zapytać, czy problem ten można uogólnić na liczby zespolone – jest to, wbrew pozorom, zadanie nietrywialne, albowiem ciało liczb zespolonych nie jest, jak wiadomo, uporządkowane, trzeba więc dobrze zastanowić się, co to znaczy, że wielomian zespolony jest dodatni. Najprościej jest ograniczyć klasę rozważanych wielomianów do tzw. wielomianów zespolonych hermitowsko symetrycznych. Niech bowiem g będzie wielomianem rzeczywistym o $2n$ zmiennych, powiedzmy (x, y) , gdzie x i y oznaczają uporządkowane n -ki. Przyporządkowanie $x = \frac{z+\bar{w}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{w}}{2i}$ określa wielomian zespolony f o $2n$ zmiennych dany wzorem

$$f(z, \bar{w}) = g\left(\frac{z + \bar{w}}{2}, \frac{z - \bar{w}}{2i}\right).$$

Jak nietrudno sprawdzić, wielomian f spełnia następujący warunek symetrii, który nazwiemy **symetrycznością hermitowską w n zmiennych**:

$$f(z, \bar{w}) = \overline{f(w, \bar{z})}.$$

Okazuje się, że dla wielomianu zespolonego f o $2n$ zmiennych następujące warunki są równoważne:

- (1) f jest wielomianem symetrycznym hermitowsko w n zmiennych,

(2) funkcja $z \mapsto f(z, \bar{z})$ przyjmuje wartości rzeczywiste.

Wielomian hermitowsko symetryczny nazwiemy dodatnim, jeśli funkcja $z \mapsto f(z, \bar{z})$ jest dodatnia oraz kwadratem hermitowskim, jeśli $f(z, \bar{z}) = |p(z)|^2$ dla pewnego wielomianu zespolonego p o n zmiennych.

W 1968 roku Quillen [?] udowodnił, że każdy wielomian dodatni na sferze euklidesowej w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ odpowiada sumie hermitowskich kwadratów na tej sferze. Ten klasyczny rezultat został ostatnio wzmocniony przez prof. Clausa Scheiderera z Uniwersytetu w Konstancji i prof. Mihaila Putinara z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Santa Barbara we wspólnej pracy [?]. Autorzy scharakteryzowali wszystkie rzeczywiste zbiory algebraiczne X w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ na których każdy wielomian dodatni jest sumą kwadratów hermitowskich. Skonstruowali też przykład obszaru pseudowypukłego o gładkich brzegu algebraicznym, dla którego istnieje wielomian dodatni stopnia 2, który nie jest sumą kwadratów hermitowskich, dając w ten sposób negatywną odpowiedź na problem postawiony w 2006 roku przez prof. Johna D'Angelo na konferencji "Complexity of mappings in CR geometry" w Palo Alto (por. [?] oraz [?]).

Celem pracy będzie szczegółowe przestudiowanie rezultatów Putinara i Scheiderera [?] i ich zreferowanie. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności.

LITERATURA

- [1] J. D'Angelo, *Complex variables analogues of Hilbert's seventeenth problem*, Int. J. Math. 16(2005), 609-627.
- [2] J. D'Angelo, *Hermitian analogues of Hilbert's 17-th problem*, arXiv:1012.2479v1
- [3] D. G. Quillen, *On the representation of hermitian forms as sums of squares*, Invent. math. 5(1968), 237-242.
- [4] M. Putinar, C. Scheiderer, *Sums of hermitian squares on pseudoconvex boundaries*, Math. Res. Lett., w druku.

5. WIELOMIANY DODATNIO OKREŚLONE NA RZECZYWISTYCH KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH.

Od czasów Hilberta wiadomo, że nie każdy rzeczywisty wielomian o n zmiennych, który jest dodatnio określony, daje się przedstawić jako suma kwadratów wielomianów rzeczywistych, poza przypadkiem, gdy $n = 1$. Fakt ten można uogólnić na wielomiany zdefiniowane na rzeczywistych rozmaitościach algebraicznych V . Scheiderer w pracy [?] pokazał, że istnieją wielomiany dodatnio określone, które nie są sumami kwadratów, jeżeli wymiar V równy jest co najmniej 3, co pozostawia przypadek wymiaru co najwyżej 2 w pewnym stopniu otwarty. Jeśli $V = C$ jest rozmaitością jednowymiarową, czyli jeśli C jest krzywą rzeczywistą i jeśli C jest nierozkładalna, Scheiderer w pracy [?] udowodnił, iż wielomian dodatnio określony jest sumą kwadratów wtedy i tylko wtedy, gdy C jest krzywą wymierną, dla której istnieje funkcja $f \in \mathbb{R}[C]$ różna od stałej taka, że $|f| \leq n$ na C dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}[C]$ oznacza tu pierścień funkcji wymiernych na krzywej C .

Rezultat Scheiderera został ostatnio istotnie polepszony w pracy Daniela Plaumanna [?] pracującego na uniwersytetach w Konstancji i Berkeley. Udało się mianowicie pokazać, że jeśli C' oznacza sumę mnogościową wszystkich nierozkładalnych składowych krzywej C , dla których **nie** istnieje funkcja $f \in \mathbb{R}[C]$ różna od stałej taka, że $|f| \leq n$ na C dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to wówczas dodatnio określone funkcją wymierną na krzywej C jest sumą kwadratów wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1) wszystkie rzeczywiste sygnatury krzywej C są zwykłymi punktami o krotności wyższej od 1 o niezależnych stycznych,
- (2) wszystkie punkty przecięcia na krzywej C są rzeczywiste,
- (3) wszystkie składowe nierozkładalne w C' są nieosobliwe i wymierne,
- (4) w konfiguracji krzywych w C' nie pojawiają się pętle.

Celem pracy będzie szczegółowe przestudiowanie artykułu [?] i zreferowanie jej głównego twierdzenia. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności.

LITERATURA

- [1] D. Plaumann, *Sums of squares on reducible real curves*, Math. Z. 265 (2010), no. 4, 777–797.
- [2] C. Scheiderer, *Sums of squares of regular functions on real algebraic varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 3, 1039–1069.
- [3] C. Scheiderer, *Sums of squares on real algebraic curves*, Math. Z. 245 (2003), no. 4, 725–760.

6. DODATNIOŚĆ, SUMY KWADRATÓW I “POSITIVSTELLENSÄTZE” W $\ast$ -ALGEBRACH

Słynny 17-ty problem Hilberta, postawiony w 1900 roku, pyta, czy prawda jest, że jeżeli wielomian $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ przyjmuje nieujemne wartości, to jest sumą kwadratów funkcji wymiernych. Pozytywna odpowiedź na powyższe pytanie została udzielona w 1927 roku przez Artina, który tym samym stworzył podwaliny nowej dziedziny algebry – rzeczywistej geometrii algebraicznej. Rezultat Artina doczekał się wielu uogólnień.

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką, w którym 2 jest elementem odwracalnym. Podzbiór $M \subset A$ nazywamy **modułem kwadratowym** jeżeli $M + M \subset M$, $a^2M \subset M$ dla wszelkich $a \in A$, oraz $1 \in M$. Z kolei **preporządkiem** nazywamy podzbiór $T \subset A$ taki, że $T + T \subset T$, $TT \subset T$ oraz $a^2 \in T$ dla wszelkich $a \in A$. Oczywiście każdy preporządek jest modułem kwadratowym. **Porządkiem** nazwiemy podzbiór $P \subset A$ taki, że $P + P \subset P$, $PP \subset P$, $P \cup -P = A$, oraz $P \cap -P$ jest ideałem pierwszym w A – widzimy, że każdy porządek jest też preporządkiem.

Rozważmy sytuację, gdy $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Niech S będzie skończonym podzbiorem $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ i zdefiniujmy **zbiór semialgebraiczny** wyznaczony przez S :

$$K_S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \dots, x_n) \geq 0, g \in S\}$$

oraz preporządek wyznaczony przez S :

$$T_S = \{\sigma_1 g_1 + \dots + \sigma_m g_m : \sigma_1, \dots, \sigma_m \in \Sigma \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2, g_1, \dots, g_m \in S, m \in \mathbb{N}\},$$

gdzie $\Sigma \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$ oznacza zbiór wszystkich sum kwadratów pierścienia $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$. Następujące twierdzenie, pochodzące od Stengle’a, jest przykładem rezultatu o umownej nazwie “positivstellensatz”: niech $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$. Wówczas:

- (1) $f > 0$ na zbiorze $K_S \Leftrightarrow$ istnieją $p, q \in T_S$ takie, że $pf = 1 + q$;
- (2) $f \geq 0$ na zbiorze $K_S \Leftrightarrow$ istnieją $m \in \mathbb{N}$ oraz $p, q \in T_S$ takie, że $pf = f^{2m} + q$;
- (3) $f = 0$ na zbiorze $K_S \Leftrightarrow$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $-f^{2m} \in T_S$.

Zauważmy, że w szczególnym przypadku, gdy $S = \emptyset$, część (2) twierdzenia jest równoważnym sformułowaniem 17-tego problemu Hilberta.

Pojęcia takie jak dodatniość, moduły kwadratowe, zbiory semialgebraiczne, porządki oraz klasyczne twierdzenia takie, jak “positivstellensatz” weszły już na stałe do kanonu rzeczywistej geometrii algebraicznej i zdążyły doczekać się szeregu uogólnień. Działem rzeczywistej geometrii algebraicznej, który szczególnie żywiołowo rozwija się od ostatnich 2-3 lat jest tzw. nieprzemienna geometria rzeczywista, w której prowadzone są próby wprowadzenia uogólnień klasycznych rezultatów geometrii rzeczywistej na przypadek, gdzie A jest pierścieniem nieprzemiennym. Sytuacja, w której A jest $\ast$ -algebrą jest szczególnie ważna i była ostatnio badana m.in. przez profesora Konrada Schmüdgena z Lipska.

Celem pracy będzie szczegółowe przestudiowanie artykułu [?] i zreferowanie jej głównego twierdzenia, jakim jest wersja “positivstellensatz” dla $\ast$ -algebr. W tym celu konieczne będzie też zaznajomienie się z pracą przeglądową [?]. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności.

LITERATURA

- [1] K. Schmüdgen, *Noncommutative real algebraic geometry - some basic concepts and first ideas*; rozdział w: *Emerging applications of algebraic geometry*. M. Putinar i S. Sullivant (redaktorzy), Springer 2009
- [2] K. Schmüdgen, *Algebras of fractions and strict Positivstellensätze for *-Algebras*, preprint, 2009
- [3] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares*, AMS Math. Surveys and Monographs 146 (2008) 187+xii stron

7. WALUACJE NA CENTRALNYCH ALGEBRACH PROSTYCH

Klasyczna teoria waluacji zajmuje się waluacjami ciał, czyli funkcjami $v : k \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, gdzie k jest pewnym ciałem, a Γ uporządkowaną grupą abelową, które spełniają następujące warunki:

- (1) $v(a) = \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = 0$,
- (2) $v(ab) = v(a) + v(b)$,
- (3) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Znanym wszystkim przykładem waluacji jest waluacja p -adyczna ciała $\mathbb{Q}$. Centralnym problemem teorii waluacji jest zagadnienie rozszerzania waluacji, a więc opis waluacji ciała K , które jest rozszerzeniem ciała k , $K \supseteq k$, w oparciu o charakteryzację waluacji ciała k .

Strukturami algebraicznymi ogólniejszymi niż ciała są algebry – przypomnijmy, że jeśli R jest pierścieniem, to R -**algebrą** nazywamy pierścień A taki, że $(A, +)$ jest (lewym) unitarnym R -modułem, oraz $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ dla wszelkich $k \in R$ oraz $a, b \in A$. R -algebra A , która dodatkowo jest pierścieniem z dzieleniem nazywana jest **algebrą z dzieleniem**, zaś jeżeli spełnia warunek $RA \neq 0$ i nie zawiera właściwych podmodułów, to nazywana jest **algebrą prostą**. Na koniec k -algebrę A nazywamy **centralną algebrą prostą** jeśli k jest ciałem, A jest k -algebrą prostą, oraz centrum A równe jest dokładnie ciału k . Odnotujmy tu, że klasyczna teoria algebr zajmuje się specjalnym przypadkiem, w którym pierścień R jest ciałem. W takim właśnie klasycznym ujęciu zbudowało w połowie lat 40-tych XX wieku teorię waluacji dla algebr z dzieleniem: dla danej algebry D można zdefiniować waluację jako rozszerzenia waluacji określonych nad centrum F algebry D (F jest tu ciałem). Klasyczne są tu trzy twierdzenia:

- (1) pochodzące od Schillinga [?], orzekające, że jeśli waluacja v ciała F jest henselowska, to ma dokładnie jedno rozszerzenie do waluacji algebry D ,
- (2) pochodzące od Ershova [?] i Wadswortha [?], podające warunek konieczny i wystarczający na to, aby daną waluację ciała F dało się rozszerzyć na D ,
- (3) pochodzące od Morandiego [?] i podające alternatywny warunek do warunku Ershova-Wadswortha.

W badaniach prowadzonych ostatnio przez profesorów Jeana-Pierre'a Tignola z Louvain-la-Neuve oraz Adriana Wadswortha z San Diego skupiono się na rozszerzeniu teorii waluacji na algebrach z dzieleniem na przypadek centralnych algebr prostych. Celem pracy będzie przestudiowanie najnowszej pracy Tignola i Wadswortha [?] i przedstawienie analogonów twierdzeń (1)-(3) dla centralnych algebr prostych. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności.

LITERATURA

- [1] Yu. L. Ershov, *Henselian valuations of division rings and the group SK_1* , Math. USSR Sbornik 45 (1983), 63-71.
- [2] P. Morandi, *The Henselization of a valued division algebra*, J. Algebra 122 (1989), 232-243.
- [3] O. F. G. Schilling, *The theory of valuations*, AMS, 1950
- [4] J.-P. Tignol, A. Wadsworth, *Valuations on algebras with involution*, preprint, 2009
- [5] A. R. Wadsworth, *Extending valuations to finite-dimensional division algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 98 (1986), 20-22.

8. PIERŚCIENIE WIERNIE KWADRATOWE

Jak wiadomo, przy pewnych ogólnych założeniach formy kwadratowe można diagonalizować – a zatem badając teorię form kwadratowych można ograniczyć się do form diagonalnych $\phi(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$, które będziemy prosto zapisywać jako $\phi = (a_1, \dots, a_n)$. W szczególnym przypadku, w którym rozpatrujemy formy kwadratowe ϕ i ψ nad ciałem liczb rzeczywistych, kryterium Sylwestera orzeka, że $\phi \cong \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ oraz ψ mają takie same wymiary i sygnatury. Rezultat ten jest podstawą do zdefiniowania tzw. zredukowanej teorii form kwadratowych nad ciałami uporządkowanymi, w której kryterium Sylwestera przyjęte jest jako definicja izometrii form kwadratowych.

Dokładniej, **porządkiem** w ciele k nazywamy zbiór P (który możemy utożsamiać ze zbiorem elementów nieujemnych) taki, że $P + P \subset P$, $PP \subset P$, $P \cup -P = k$ oraz $P \cap -P = \{0\}$. **Sygnaturę** $\text{sgn}_P\phi$ formy $\phi = (a_1, \dots, a_n)$ względem porządku P definiujemy jako różnicę między liczbą tych elementów $a_1, \dots, a_n$, które należą do P , a tych, które nie należą – jeżeli oznaczymy przez X_k zbiór wszystkich porządków ciała k , to w zredukowanej teorii form kwadratowych zdefiniujemy dwie formy tego samego wymiaru ϕ i ψ jako **izometryczne**, jeśli $\text{sgn}_P\phi = \text{sgn}_P\psi$ dla wszelkich $P \in X_k$.

Zdefiniujemy grupę $G_k = k^*/(\Sigma k^2)^*$ klas sum kwadratów ciała k . Parę (X_k, G_k) nazywamy **przestrzenią porządków** ciała k . Badanie zredukowanej teorii form kwadratowych równoważne jest badaniu przestrzeni porządków ciała k , w której własności arytmetyczne ciała k tłumaczą się na własności arytmetyczne grupy G_k . Od lat 70-tych XX wieku prowadzone są próby wprowadzenia aksjomatycznej teorii przestrzeni porządków – owocem tych prób jest stworzenie teorii abstrakcyjnych przestrzeni porządków przez profesora Murraya Marshalla oraz teorii zredukowanych grup specjalnych przez profesorów Maxa Dickmanna i Francisco Miraglię. Obydwie te teorie doczekały się licznych rozwinięć i uogólnień, w szczególności uogólnień na teorie form kwadratowych nad pierścieniami, niekoniecznie zaś nad ciałami.

W ostatniej pracy Dickmanna i Miraglii [?] rozważana jest szeroka i bardzo ogólna klasa pierścieni nazwana przez autorów pierścieniami wiernie kwadratowymi. Dla takiej klasy pierścieni zbudowana jest wersja zredukowanej teorii form kwadratowych, a następnie pokazane jest, w jaki sposób teoria ta może zostać zaksjomatyzowana w języku zredukowanych grup specjalnych.

Celem pracy będzie szczegółowe przestudiowanie artykułu [?] i zreferowanie opublikowanych tam rezultatów. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności, choć należy pamiętać, że praca w tematyce form kwadratowych będzie wymagała opanowania dość zaawansowanego aparatu pojęciowego.

LITERATURA

- [1] M. Dickmann, F. Miraglia, *Faithfully quadratic rings*, preprint, 2009
- [2] M. Dickmann, F. Miraglia, *Special groups. Boolean-theoretic methods in the theory of quadratic forms*, Memoir of the Amer. Math. Society 689, American Mathematical Society, Providence, 2000.
- [3] M. Marshall, *Spaces of orderings and abstract real spectra*, Lecture Notes in Mathematics 1636, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [4] K. Szymiczek, *Wykłady z algebry dwuliniowej*, Uniwersytet Śląski, Katowice, 1991

9. GRUPY WITTA GRASSMANNIANÓW

Niech k będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Przestrzeń dwuliniową M nad ciałem k nazywamy **przestrzenią metaboliczną**, jeżeli

$$M \cong P_1 \perp \dots \perp P_k,$$

gdzie $P_1, \dots, P_k$ są płaszczyznami symetrycznymi, a symbol $\perp$ oznacza sumę prostą ortogonalną. Dwie przestrzenie dwuliniowe U i V nazwiemy **podobnymi w sensie Witt**, jeżeli istnieją przestrzenie

metaboliczne M_1 i M_2 takie, że

$$M_1 \perp U \cong M_2 \perp V.$$

Okazuje się, że relacja ta jest relacją równoważnościową – wobec tego możemy rozważać jej klasy równoważności, które nazywać będziemy **klasami podobieństwa** przestrzeni U i oznaczać przez $\langle U \rangle$. Jeżeli A jest macierzą U w pewnej bazie, to będziemy też pisać $\langle A \rangle$, zaś jeśli A jest macierzą diagonalną o wyrazach $a_1, \dots, a_n$, będziemy po prostu pisali $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Jeśli na klasach podobieństwa wprowadzimy operację dodawania wzorem:

$$\langle V \rangle \oplus \langle U \rangle = \langle V \perp U \rangle,$$

to otrzymamy grupę, którą nazywać będziemy **grupą Witt**a ciała k .

Grupa Witt jest pierwszym z przykładów K –funktorów, którymi zajmuje się algebraiczna K –teoria. Takie ogólniejsze spojrzenie na grupy Witt’a pozwala zdefiniować grupy Witt’a pierścieni, rozmaitości algebraicznych, czy, ogólnie, schematów, w szczególności rozmaitości Grassmanna zwanych też grassmannianami. Choć grupy Witt’a schematów zostały zdefiniowane już kilkadziesiąt lat temu, a grassmanniany są klasycznymi obiektami badanymi w geometrii algebraicznej, dopiero w ostatnich latach udało się opracować narzędzia, dzięki którym możliwe stało się obliczenie grup Witt’a grassmannianów: we współczesnym ujęciu obliczanie grupy Witt’a (czyli K –teorii, lub kohomologii, lub grup Chow) rozmaitości komórkowych (których szczególnym przypadkiem są grassmanniany) opiera się na czterech głównych filarach:

- (1) długim dokładnym ciągu lokalizacyjnym dla kohomologii rozpatrywanego schematu,
- (2) twierdzeniu o dévissage’ach,
- (3) niezmienniczości homotopijnej,
- (4) rozszczepianiu długich dokładnych ciągów lokalizacyjnych w pewien specjalny sposób.

Celem pracy będzie przestudiowanie artykułu [?] i przedstawienie obliczenia grup Witt’a rozmaitości Grassmanna. Konieczne będzie też opanowanie i przedstawienie zaawansowanego aparatu pojęciowego potrzebnego do zrozumienia dyskutowanej problematyki. Temat adresowany jest do studentów sekcji teoretycznej.

LITERATURA

- [1] P. Balmer, B. Calmes, *Witt groups of Grassmann varieties*, preprint, 2008
- [2] C. Weibel, *An introduction to algebraic K-theory*, <http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html>