ASPEKTY TOPOLOGICZNE ALGEBR BOOLE'A

Aleksander Błaszczyk

Skrypt przeznaczony dla studentów IV i V roku studiów matematycznych

280

Uniwersytet Śląski Katowice 1982

RECENZENT
BOGDAN WĘGLORZ

Redaktor
WIESŁAWA PISKOR

Redaktor techniczny
LECH DOBRZAŃSKI

Korektor
BOŻENA GŁADYSIEWICZ

Wydawca

UNIWERSYTET ŚLĄSKI
UL. BANKOWA 14, 40-007 KATOWICE

Nakład: 300+38 egz. Ark. druk. 8,5. Ark. wyd. 8,0. Oddano do drukarni w listopadzie 1981 r. Podpisano do druku i druk ukończono w marcu 1982 r. Papier kl. V. offset
Zam. 1785/81 Cena zł 21,—

Drukarnia Uniwersytetu Śląskiego
ul. 3 Maja 12, 40-096 Katowice

Spis treści

Przedmowa

Skrypt powstał na podstawie wykładu monograficznego dla studentów starszych lat matematyki w Uniwersytecie Śląskim w semestrze letnim roku akademickiego 1978/1979. Celem skryptu jest przedstawienie dwóch zagadnień. Pierwsze dotyczy zbiorów niezależnych w algebrach Boole'a, a drugie-algebr Boole'a sztywnych, tzn. takich, które nie mają nietrywialnych automorfizmów. Każde z tych zagadnień przetłumaczone na język topologii ogólnej stanowi ważny problem topologiczny, co potwierdza tezę, że dużą część topologii ogólnej można zaklasyfikować do teorii algebr Boole'a. Z drugiej strony język topologii okazuje się często bardzo dogodny dla formułowania zagadnień teorii algebr Boole'a. Świadczą o tym choćby kwestie związane z badaniem ultrafiltrów, które jednak zostały pominięte w skrypcie; jest im poświęcona monografia W.W. C o m f o r t a i S. N e g r e p o n t i s a (1974). Nie starczyło także miejsca na scharakteryzowanie wielu innych działów teorii algebr Boole'a. Na przykład, zostały całkowicie pominięte związki z teorią modeli booleowskich, których wykład Czytelnik znajdzie w książce W. G u z i c k i e g o i P. Z b i e r s k i e g o (1978). Zastosowanie algebr Boole'a w logice algebraicznej omówiono w skrypcie W.A. P o g o r z e l s k i e g o i T. P r u c n a l a (1974).

Dwa pierwsze rozdziały skryptu zawierają wybór pojęć i twierdzeń z zakresu podstawowego wykładu teorii algebr Boole'a. Kryterium wyboru była przydatność dla dalszych, mniej elementarnych części wykładu. Miejsca centralne zajmują tu: twierdzenie Stone'a o reprezentacji i twierdzenie MacNeille'a o uzupełnianiu algebr Boole'a. Przedstawiony tu zarys teorii jest niekompletny. Można go jednak łatwo pogłębić, korzystając z innych dostępnych opracowań - wspomnijmy tylko prace: R. Sikorskiego (1964), D.A. Władimirowa (1969), T. Traczyka (1970) i P. Halmosa (1974). Do zrozumienia tej części skryptu wystarczy znajomość elementarnych faktów teorii mnogości i topologii. Wszystkie potrzebne definicje i twierdzenia z zakresu topologii znajdzie Czytelnik w książce J. Mioduszewskiego (1971) lub R. Engelkinga (1975).

W rozdziałach IV i V używane są pojęcia spoza elementarnej teorii mnogości. Wypełnieniu tej luki służy rozdział III, w którym przytoczone są niektóre twierdzenia teorii mnogości, mniej dostępne w literaturze podręcznikowej, np. o zbiorach stacjonarnych.

Skrypt powstał z inicjatywy Profesora Jerzego Mioduszewskiego, którego życzliwość, zainteresowanie i cenne uwagi bardzo mi pomogły w pracy nad skryptem. Składam za to Panu Profesorowi serdeczne podziękowanie.

I. Algebry Boole'a a przestrzenie topologiczne

§ 1. Algebry Boole'a i ciała zbiorów

Zbiór B wraz z dwoma działaniami dwuargumentowymi $\vee$ i $\wedge$ (suma i iloczyn), działaniem jednoargumentowym (dopełnienie) oraz elementami wyróżnionymi 0_B i 1_B nazywamy a l g e b r ą B o o l e'a, jeśli dla każdych $u, w, z \in B$ spełnione są następujące postulaty:

(1) $u \vee w = w \vee u$, $u \wedge w = w \wedge u$,

(2) $u \vee (w \vee z) = (u \vee w) \vee z$, $u \wedge (w \wedge z) = (u \wedge w) \wedge z$,

(3) $u \wedge (w \vee z) = (u \wedge w) \vee (u \wedge z)$, $u \vee (w \wedge z) = (u \vee w) \wedge (u \vee z)$,

(4) $u \vee u = u$, $u \wedge u = u$,

(5) $u \wedge (u \vee w) = u$, $u \vee (u \wedge w) = u$,

(6) $u \vee 0_B = u$, $u \wedge 1_B = u$,

(7) $u \vee 1_B = 1_B$, $u \wedge 0_B = 0_B$,

(8) $u \vee (-u) = 1_B$, $u \wedge (-u) = 0_B$,

(9) $-(-u) = u$,

(10) $-(u \vee w) = (-u) \wedge (-w)$, $-(u \wedge w) = (-u) \vee (-w)$,

(11) $0_B \neq 1_B$.

Przedstawione tu aksjomaty teorii algebr Boole'a nie tworzą układu niezależnego. Na przykład: aksjomat (5) wynika z układu aksjomatów (3), (4), (6) i (7). Badanie tego typu związków jednak pominiemy.

Z (11) wynika, że każda algebra Boole'a B ma przynajmniej dwa elementy: 0_B i 1_B. Istnieje algebra Boole'a, która - oprócz tych dwóch - nie ma innych elementów. Istotnie, niech $B = \{0,1\}$, przy czym działania są określone następująco:

(12) $u \vee w = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = w = 0$,

(13) $u \wedge w = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = w = 1$,

(14) $-0 = 1$ oraz $-1 = 0$.

Zbiór B z tak określonymi działaniami nazywamy a l g e b r ą B o o l e'a z e r o - j e d y n k o w ą lub d w u e l e m e n t o w ą.

Niech B i C będą algebrami Boole'a. Jeśli $C \subset B$, $0_C = 0_B$, $1_C = 1_B$ oraz działania w B zacieśnione do zbioru C pokrywają się z działaniami w algebrze Boole'a C, to C nazywamy p o d a l g e b r ą a l g e b r y B. Łatwo sprawdzić, że jeśli B jest algebrą Boole'a oraz C jest podzbiorem zbioru B, to C jest podalgebrą z działaniami indukowanymi z algebry B, jeśli 1_B, $0_B \in C$ oraz zbiór C jest domknięty ze względu na działania algebry B. W szczególności, jeśli przyjmiemy $C = \{0_B, 1_B\}$, to zbiór C z działaniami indukowanymi z algebry B jest algebrą Boole'a. Łatwo sprawdzić, że tak określona algebra ma własności (12) - (14). Można więc przyjąć, że każda algebra Boole'a zawiera jako podalgebrę algebrę trywialną.

Niech A będzie podzbiorem algebry Boole'a B. Nietrudno sprawdzić, że $\bar{A} = \bigcap \{C : C$ jest podalgebrą algebry Boole'a B zawierającą zbiór $A\}$ jest podalgebrą algebry Boole'a B, taką, że $A \subset \bar{A}$. Algebra $\bar{A}$ jest najmniejszą algebrą Boole'a zawierającą A; będziemy ją nazywali p o d a l g e b r ą g e n e r o w a n ą p r z e z z b i ó r A. Czytelnik bez trudu sprawdzi, że $\bar{A}$ jest zbiorem wszystkich elementów postaci $b_1 \vee \ldots \vee b_n$, gdzie dla każdego $i \leq n$, $b_i \in \{a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \wedge -a_{k+1} \wedge \ldots \wedge -a_{k+m}$: $a_j \in A$ dla $j \leq k+m$, gdzie k,m są dowolnymi liczbami naturalnymi$\}$. Stąd wynika, że jeśli A jest zbiorem nieskończonym, to $\bar{A}$ ma tę samą moc co A.

Ważnych przykładów algebr Boole'a dostarczają ciała zbiorów. Przypomnijmy to pojęcie. Niech X będzie zbiorem niepustym oraz niech $P(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X. Rodzinę $B \subset P(X)$ nazywamy c i a ł e m z b i o r ó w, gdy

(15) $\emptyset, X \in B$,

(16) jeśli $U, W \in B$, to $U \cup W$, $U \cap W$, $U - W \in B$.

TWIERDZENIE 1. Jeśli X jest zbiorem niepustym, to każde ciało zbiorów $B \subset P(X)$ jest algebrą Boole'a. Zerem algebry B jest $\emptyset$, a jedynką X. Działania są określone następującymi wzorami: $u \vee w = u \cup w$, $u \wedge w = u \cap w$, $-u = X-u$, dla $u, w \in B$.

Twierdzenie to, jakkolwiek ważne, jest zupełnie oczywiste. Aksjomaty (1) - (11) wyrażają w tym przypadku ogólnie znane własności działań mnogościowych.

Zauważmy, że dla każdego zbioru niepustego X, $P(X)$ jest algebrą Boole'a (gdyż jest ciałem zbiorów), a każde ciało zbiorów $B \subset P(X)$ jest podalgebrą algebry $P(X)$. Algebra $P(X)$ odgrywa ważną rolę w naszych dalszych rozważaniach.

Zanotujmy jeszcze dwa przykłady:

PRZYKŁAD 1. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Rodzina $B = \{u \subset X:$ u lub $X-u$ jest zbiorem skończonym$\}$ jest ciałem zbiorów. Łatwo zauważyć, że $B \neq P(X)$.

PRZYKŁAD 2. Niech $L \subset P([0,1])$ będzie rodziną wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesque'a, zawartych w odcinku $[0,1]$. L jest ciałem zbiorów różnym od $P([0,1])$, bo istnieją zbiory niemierzalne (np. zbiór Vitaliego; patrz R. S i k o r s k i (1958), s. 243). O niektórych własnościach algebry L będzie mowa w dalszych paragrafach.

§ 2. Przestrzenie topologiczne zwarte zero-wymiarowe. Algebry zbiorów domknięto-otwartych

Niech X będzie (niepustą) przestrzenią topologiczną. Podzbiory zbioru X, które są zarazem domknięte i otwarte (w sensie ustalonej w X topologii), będziemy nazywali d o m k n i ę t o - o t w a r t y m i. Rodzina $CO(X) = \{u \subset X$: u jest zbiorem domknięto-otwartym$\}$ jest, jak łatwo sprawdzić, ciałem zbiorów, a więc algebrą Boole'a. Algebrę $CO(X)$ będziemy nazywali a l g e b r ą z b i o r ó w d o m k n i ę t o - o t w a r t y c h. Algebra ta odgrywa ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Jeśli X jest przestrzenią spójną, np. gdy X jest przestrzenią liczb rzeczywistych lub odcinkiem, to $CO(X) = \{\emptyset, X\}$. Bardziej interesuje nas przypadek, gdy $CO(X)$ jest zbiorem nieskończonym. Ma to miejsce na przykład wtedy, gdy X jest przestrzenią zero-wymiarową nieskończoną; p r z e s t r z e ń z e r o - w y m i a r o w a to taka przestrzeń Hausdorffa, która ma bazę złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych (por. R. E n g e l k i n g (1975), s. 435). Przestrzenie dyskretne oraz zbiór Cantora są przykładami przestrzeni zero-wymiarowych.

W a g ą p r z e s t r z e n i t o p o l o g i c z n e j X nazywamy liczbę kardynalną $w(X)$, najmniejszą spośród liczb kardynalnych τ takich, że istnieje w przestrzeni X baza mocy τ (na określenie wagi używa się też terminu "ciężar"; patrz R. E n g e l k i n g (1975)).

LEMAT 1. Jeśli X jest przestrzenią zero-wymiarową, zwartą i nieskończoną, to $|w(X)| = |CO(X)|$, gdzie $|A|$ oznacza moc zbioru A.

Dowód. Skoro $CO(X)$ jest bazą przestrzeni X, to $w(X) \leq |CO(X)|$. Dla dowodu nierówności przeciwnej ustalmy bazę R taką, że $|R| = w(X)$. Dla każdego $u \in CO(X)$ istnieje $R' \subset R$ takie, że $u = \bigcup R'$. Skoro u jest podprzestrzenią zwartą, to istnieje zbiór skończony $R_u \subset R$ taki, że $u = \bigcup R_u$. Zatem

$$|CO(X)| \leq |\{R' : R' \subset R \text{ oraz } |R'| < \omega\}| \leq \omega \cdot |R| = |R| = w(X),$$

gdzie ω oznacza najmniejszą liczbę kardynalną nieskończoną.

Niech τ będzie liczbą kardynalną nieskończoną. K o s t k ą C a n t o r a wagi τ będziemy nazywali iloczyn kartezjański τ egzemplarzy przestrzeni dyskretnej dwupunktowej; na oznaczenie tej przestrzeni będziemy używali symboli D^{τ}. Zatem D^{τ} jest zbiorem wszystkich funkcji określonych na zbiorze τ (liczbę kardynalną τ utożsamiamy ze zbiorem wszystkich liczb porządkowych mocy mniejszej niż τ ; patrz np. T. J e c h (1973), a także rozdział III, § 1) i przyjmujących wartości w zbiorze $D = \{-1, 1\}$. Dla każdego $\alpha \in \tau$ mamy kanoniczne rzutowanie $p_{\alpha} : D^{\tau} \longrightarrow D$ określone wzorem: $p_{\alpha}(x) = x(\alpha)$. Topologia w D^{τ} jest najmniejszą topologią, przy której rzutowania są ciągłe, tzn. bazę topologii w D^{τ} stanowią zbiory postaci:

$$(1) \quad p_{\alpha_1}^{-1}(i_1) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(i_n),$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \tau$ oraz $i_1, \ldots, i_n \in \{-1, 1\}$.

Przestrzeń D^{τ} jest zwarta, bo jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni zwartych. Zbiory postaci (1) są domknięto-otwarte, więc jest to także przestrzeń zero-wymiarowa. Na mocy lematu 1 $w(D^{\tau}) = \tau$.

Każda przestrzeń zwarta zero-wymiarowa wagi nie większej niż τ jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem kostki D^{τ}. Przestrzeń D^{ω} jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora.

Jeśli liczbę kardynalną τ występującą w definicji przestrzeni D^{τ} zastąpimy zbiorem równolicznym z τ, to otrzymamy w rezultacie przestrzeń homeomorficzną z D^{τ}. Wynika stąd w szczególności, że iloczyn kartezjański $D^{\tau} \times D^{\tau}$ jest (gdy $\tau \geqslant \omega$) przestrzenią homeomorficzną z D^{τ}, bo suma dwóch zbiorów mocy τ ma moc τ. Wiele faktów dotyczących kostek Cantora (także wyliczone powyżej) można znaleźć w książkach R. E n g e l k i n g a (1975) oraz J. M i o d u s z e w s k i e g o (1971).

Zwróćmy uwagę na inną jeszcze klasę przestrzeni zwartych zero-wymiarowych. Są to rozszerzenia Čecha-Stone'a przestrzeni dyskretnych i przestrzeni metrycznych ośrodkowych zero-wymiarowych. R o z s z e r z e n i e m Č e c h a - S t o n e ' a przestrzeni X będziemy nazywali przestrzeń zwartą (Hausdorffa) βX taką, że:

(2) X jest podzbiorem gęstym przestrzeni βX,

(3) dla każdego odwzorowania ciągłego $f: X \to Y$, gdzie Y jest przestrzenią zwartą, istnieje odwzorowanie ciągłe $\bar{f}: \beta X \to Y$ takie, że $\bar{f}|X = f$.

Warunki (2) i (3) określają przestrzeń βX z dokładnością do homeomorfizmu. Przestrzeń X ma rozszerzenie βX, wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie regularna (R. E n g e l k i n g, 1975, s. 218), tzn. gdy jest przestrzenią Hausdorffa i ma tę własność, że dla każdego punktu $x \in X$ i każdego otoczenia otwartego U punktu x istnieje funkcja ciągła $f: X \to [0,1]$ taka, że $f(x) = 0$ oraz $f(y) = 1$ dla $y \notin U$. Przestrzenie metryczne i przestrzenie zero-wymiarowe są całkowicie regularne.

Niech A będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Domknięcie zbioru A w przestrzeni X będziemy oznaczali symbolem $cl_X A$. W przypadku gdy przestrzeń X będzie ustalona, a z kontekstu będzie wynikało, że mowa o domknięciu w przestrzeni X, symbol $cl_X A$ będziemy skracali do clA.

LEMAT 2. Jeśli U jest podzbiorem domknięto-otwartym w przestrzeni całkowicie regularnej X, to $cl_{\beta X} U$ jest zbiorem domknięto-otwartym w βX.

Dowód. Niech $f: X \to \{0,1\}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(x) = 1$ dla $x \in U$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \notin U$. Na mocy (3) istnieje funkcja ciągła $\bar{f}: \beta X \to \{0,1\}$ taka, że $\bar{f}|X = f$. Z ciągłości $\bar{f}$ wynika, że $\bar{f}(cl_{\beta X} U) \subset \{1\}$ oraz $\bar{f}(cl_{\beta X}(X-U)) \subset \{0\}$. Zatem $cl_{\beta X} U \cap cl_{\beta X}(X-U) = \emptyset$. Na mocy (2), $cl_{\beta X} U \cup cl_{\beta X}(X-U) = \beta X$. Zatem $cl_{\beta X} U = \beta X - cl_{\beta X}(X-U)$; co kończy dowód.

LEMAT 3. Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa. Jeśli dla każdych dwóch zbiorów A, B rozłącznych i domkniętych w X istnieje zbiór domknięto-otwarty $U \subset X$ taki, że $A \subset U$ oraz $B \cap U = \emptyset$, to X jest przestrzenią całkowicie regularną oraz βX jest przestrzenią zero-wymiarową.

Dowód. Skoro punkty w przestrzeni X są zbiorami domkniętymi (bo X jest przestrzenią Hausdorffa), to z założeń lematu wynika, że X jest przestrzenią zero-wymiarową. Zatem X jest przestrzenią całkowicie regularną i ma rozszerzenie Čecha-Stone'a βX.

Ustalmy teraz zbiór otwarty $U \subset \beta X$ oraz punkt $x \in U$. Przestrzenie zwarte (Hausdorffa) są całkowicie regularne (R. E n g e l k i n g, 1975, s. 167). Zatem istnieje funkcja ciągła $g: \beta X \to [0,1]$ taka, że $g(x) = 0$ oraz $g(\beta X - U) = \{1\}$. Niech $A = X \cap g^{-1}([0,\frac{1}{3}])$ oraz $B = X \cap g^{-1}([\frac{2}{3},1])$. Zbiory A i B są rozłączne i domknięte w X. Istnieje więc zbiór domknięto-otwarty $W \subset X$ taki, że $A \subset W$ oraz $B \cap W = \emptyset$. Z lematu 2 wynika, że zbiór $\mathrm{cl}W$ (domknięcie W w przestrzeni βX) jest domknięto-otwarty. Wystarczy zatem pokazać, że $x \in \mathrm{cl}W$ oraz $\mathrm{cl}W \subset U$.

Skoro $A \subset W$, to $X \cap g^{-1}([0,\frac{1}{3}]) \subset W$. Tym bardziej $X \cap g^{-1}([0,\frac{1}{3}]) \subset \mathrm{cl}W$. Ponieważ $\mathrm{cl}W$ jest zbiorem domknięto-otwartym i $g^{-1}([0,\frac{1}{3}))$ jest zbiorem otwartym, a X jest zbiorem gęstym w βX, więc $g^{-1}([0,\frac{1}{3})) \subset \mathrm{cl}W$. Zatem $x \in \mathrm{cl}W$, bo $g(x) = 0$.

Skoro $B \cap W = \emptyset$, więc $X \cap g^{-1}([\frac{2}{3},1]) \cap W = \emptyset$. Tym bardziej $X \cap g^{-1}((\frac{2}{3},1]) \cap W = \emptyset$. Ponieważ zbiór X jest gęsty w βX, a $g^{-1}((\frac{2}{3},1]) \cap W$ jest zbiorem otwartym, więc $g^{-1}((\frac{2}{3},1]) \cap W = \emptyset$. Z otwartości zbioru $g^{-1}((\frac{2}{3},1])$ wynika, że $g^{-1}((\frac{2}{3},1]) \cap \mathrm{cl}W = \emptyset$. Zatem $\mathrm{cl}W \subset U$, bo dla $y \notin U$, $g(y) = 1$.

TWIERDZENIE 1. Jeśli X jest przestrzenią dyskretną, to βX jest przestrzenią zero-wymiarową.

Dowód. W przestrzeni dyskretnej każdy podzbiór jest domknięto-otwarty. Zatem twierdzenie wynika z lematu 3.

TWIERDZENIE 2. Jeśli X jest przestrzenią zero-wymiarową i ma bazę przeliczalną, to przestrzeń βX jest zero-wymiarowa.

Dowód. Przestrzenie zero-wymiarowe są całkowice regularne, zatem istnieje rozszerzenie Čecha-Stone'a βX. Na mocy lematu 3 wystarczy pokazać, że jeśli zbiory A i B są domknięte i rozłączne w X, to istnieje zbiór domknięto-otwarty $U \subset X$ taki, że $A \subset U$ oraz $B \cap U = \emptyset$.

Niech R będzie ustaloną bazą przestrzeni X składającą się ze zbiorów domknięto-otwartych. Dla każdego $x \in X$ obierzmy otoczenie $W_x \in R$ punktu x tak, aby spełnione były warunki:

(4) jeśli $x \in A$, to $W_x \cap B = \emptyset$,

(5) jeśli $x \in B$, to $W_x \cap A = \emptyset$,

(6) jeśli $x \in X - (A \cup B)$, to $W_x \subset X - (A \cup B)$.

Jest to możliwe, bo zbiory A i B są domknięte i rozłączne. Zauważmy, że $\bigcup \{W_x : x \in X\} = X$.

Ponieważ X ma bazę przeliczalną, więc istnieje rodzina $\{W_n : n<\omega\} \subset \{W_x : x \in X\}$ taka, że $\bigcup \{W_n : n<\omega\} = X$.

Rozważmy ciąg zbiorów domknięto-otwartych $\{V_n : n<\omega\}$, gdzie $V_1 = W_1$ oraz $V_{n+1} = W_{n+1} - (W_1 \cup \ldots \cup W_n)$. Zbiory V_n są parami rozłączne oraz spełniają warunki:

(7) $V_n \subset W_n$, dla $n<\omega$;

(8) $\bigcup \{V_n : n<\omega\} = X$.

Niech $U = \bigcup \{V_n : n<\omega$ oraz $V_n \cap A \neq \emptyset\}$. Z (8) oraz stąd, że zbiory V_n są domknięto-otwarte i rozłączne wynika, że zbiór U jest domknięto-otwarty. Natomiast z warunków (4) - (8) wynika, że $A \subset U$ oraz $B \cap U = \emptyset$.

Udowodnione wyżej twierdzenie nie jest prawdziwe dla wszystkich przestrzeni zero-wymiarowych, założenie istnienia bazy przeliczalnej można jednak zastąpić znacznie słabszym założeniem, że przestrzeń jest mocno zero-wymiarowa; patrz R. E n g e l k i n g (1975), s. 438. W rozdziale V, § 1 zastosujemy przytoczoną tu słabszą wersję twierdzenia.

§ 3. Algebry zbiorów regularnie otwartych

W poprzednim paragrafie rozważaliśmy algebry Boole'a, które były zarazem ciałami zbiorów. Obecnie poznamy algebry Boole'a, których elementami są podzbiory przestrzeni topologicznych i które na ogół nie są ciałami podzbiorów tych przestrzeni.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Operację wnętrza w przestrzeni X będziemy oznaczali symbolem "int". Zbiór $U \subset X$ jest regularnie otwarty, jeśli $\mathrm{int}(\mathrm{cl}U) = U$. Zauważmy, że $\emptyset$ oraz X są zbiorami regularnie otwartymi. Zbiory regularnie otwarte są otwarte. Pokażemy, że część wspólna dwóch zbiorów regularnie otwartych jest zbiorem regularnie otwartym. Nietrudno zauważyć, że rodzina zbiorów regularnie otwartych nie tworzy na ogół ciała zbiorów. Przykładem może być zbiór $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, który jest sumą dwóch zbiorów regularnie otwartych w topologii zbioru liczb rzeczywistych.

LEMAT 1. Jeśli $U \subset X$ jest zbiorem otwartym, to $\mathrm{cl}U = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}U))$.

Dowód. Inkluzja $\mathrm{cl}U \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}U))$ jest oczywista, bo $U = \mathrm{int}U \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}U)$. Z drugiej strony, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}U) \subset \mathrm{cl}U$. Zatem $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}U)) \subset \mathrm{cl}U$, co kończy dowód.

Bezpośrednio stąd wynika

LEMAT 2. Jeśli U jest zbiorem otwartym, to $\mathrm{int}(\mathrm{cl}U) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}U)))$.

LEMAT 3. Jeśli $U, V \subset X$ są zbiorami otwartymi, to $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cap V)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}U) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}V)$.

Dowód. Skoro $U \cap V \subset U$, to $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cap V)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}U)$. Podobnie $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cap V)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}V)$. Zatem $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cap V)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(V))$.

Dla dowodu inkluzji przeciwnej zauważmy wpierw, że jeśli $G, H \subset X$ są zbiorami otwartymi, to

(1) $G \cap \mathrm{cl}H \subset \mathrm{cl}(G \cap H)$.

Istotnie, jeśli $x \notin \mathrm{cl}(G \cap H)$, to istnieje zbiór otwarty $W \subset X$ taki, że $x \in W$ oraz $W \cap G \cap H = \emptyset$. Jeśli $x \in G$, to $W \cap G$ jest otoczeniem otwartym punktu x rozłącznym z H. Zatem $x \notin G$ lub $x \notin \mathrm{cl}H$, co dowodzi warunku (1).

Jeśli w (1) podstawimy $G = U$ oraz $H = V$, to otrzymamy inkluzję:

$$U \cap clV \subset cl(U \cap V),$$

czyli $X-cl(U \cap V) \subset (X-U) \cup (X-clV)$. Zatem $cl(X-cl(U \cap V)) \subset cl(X-U) \cup cl(X-clV)$. Przechodząc do dopełnień, otrzymujemy $(X-cl(X-U)) \cap (X-cl(X-clV)) \subseteq X-cl(X-cl(U \cap V))$. Skoro $X-cl(X-A) = intA$, dla każdego $A \in X$, to

(2) $U \cap int(clV) \subset int(cl(U \cap V))$,

bo U jest zbiorem otwartym.

Jeśli w warunku (2) podstawimy $int(clU)$ w miejsce U, to otrzymamy:

(3) $int(clU) \cap int(clV) \subset int(cl\,(int(clU) \cap V))$.

Jeśli w (2) zamienimy rolami U z V, to otrzymamy inkluzję $int(clU) \cap V \subset int(cl(U \cap V))$. Zatem wobec (3) oraz lematu (2) mamy:

$$int(clU) \cap int(clV) \subset int(cl(U \cap V)),$$

co kończy dowód lematu.

Bezpośrednim wnioskiem z lematu 3 jest

LEMAT 4. Część wspólna dwóch zbiorów regularnie otwartych jest zbiorem regularnie otwartym.

TWIERDZENIE 1. Jeśli X jest przestrzenią topologiczną niepustą, to rodzina $RO(X)$ złożona ze wszystkich zbiorów regularnie otwartych w przestrzeni X wraz z działaniami określonymi wzorami:

(4) $U \vee V = int(cl(U \cup V))$,

(5) $U \wedge V = U \cap V$,

(6) $-U = X - clU$, dla $U, V \in RO(X)$,

jest algebrą Boole'a, przy czym zerem tej algebry jest $\emptyset$, a jedynką X.

Dowód. Sprawdzimy niektóre spośród warunków występujących w definicji algebry Boole'a (patrz § 1).

1. $U \vee (V \vee W) = (U \vee V) \vee W$. Istotnie, na mocy lematu 1 mamy
$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup \mathrm{int}(\mathrm{cl}(V \cup W)))) = \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}U \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(V \cup W)))) =$
$= \mathrm{int}(\mathrm{cl}U \cup \mathrm{cl}(V \cup W)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup V \cup W))$.

Analogicznie otrzymujemy:

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup V)) \cup W)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup V \cup W)),$$

co dowodzi łączności działania " $\vee$ ".

2. $U \wedge (V \vee W) = (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$. Na mocy lematu 3 mamy
$U \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(V \cup W)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}U) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(V \cup W)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cap (V \cup W))) =$
$= \mathrm{int}(\mathrm{cl}((U \cap V) \cup (U \cap W)))$.

3. $U \vee (V \wedge W) = (U \vee V) \wedge (U \vee W)$. Na mocy lematu 3
$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup (V \cap W))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}((U \cup V) \cap (U \cup W))) =$
$= \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup V)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup W))$.

4. $-(-U) = U$. Istotnie, skoro U jest zbiorem regularnie otwartym, to $X - \mathrm{cl}(X - \mathrm{cl}U) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}U) = U$.

5. $-(U \vee V) = (-U) \wedge (-V)$. Na mocy lematu 2
$X - \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup V))) = X - \mathrm{cl}(U \cup V) = (X - \mathrm{cl}U) \cap (X - \mathrm{cl}V)$.

6. $-(U \wedge V) = (-U) \vee (-V)$. Istotnie, skoro dla każdego $A \subset X$, $\mathrm{int}(X - A) = X - \mathrm{cl}A$ oraz $X - \mathrm{int}A = \mathrm{cl}(X - A)$, to
$X - \mathrm{cl}(U \cap V) = \mathrm{int}(X - (U \cap V)) = \mathrm{int}((X - U) \cup (X - V)) =$
$= \mathrm{int}((X - \mathrm{int}(\mathrm{cl}U)) \cup (X - \mathrm{int}(\mathrm{cl}V))) =$
$= \mathrm{int}(\mathrm{cl}(X - \mathrm{cl}U) \cup \mathrm{cl}(X - \mathrm{cl}V)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}((X - \mathrm{cl}U) \cup (X - \mathrm{cl}V)))$.

Pozostałe aksjomaty algebr Boole'a spełnione są w sposób oczywisty.

Algebrę $RO(X)$ będziemy nazywali *algebrą Boole'a zbiorów regularnie otwartych* przestrzeni X.

§ 4. Algebry Boole'a zupełne

Zauważmy, że w każdej algebrze Boole'a działania wyznaczają relację porządku. Przyjmujemy następującą definicję:

(1) $u \leqslant w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \wedge (-w) = 0$,

gdzie u, w są elementami ustalonej algebry Boole'a B (zamiast $u \wedge \wedge (-w)$ będziemy też pisać $u-w$).

LEMAT 1. Niech B będzie algebrą Boole'a, a "$\leqslant$" relacją określoną warunkiem (1). Jeśli $u, w \in B$, to

(a) $u \leqslant w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \wedge w = u$,

(b) $u \leqslant w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \vee w = w$.

Dowód. Pokażemy, że jeśli $u \leqslant w$, to $u \wedge w = u$. Istotnie, skoro $u \wedge (-w) = 0$ oraz $-0 = 1$, to $(-u) \vee w = 1$. Zatem

$$u = u \wedge 1 = u \wedge ((-u) \vee w) = (u \wedge (-u)) \vee (u \wedge w) = 0 \vee (u \wedge w) = u \wedge w.$$

Sprawdzimy teraz, że $u \wedge w = u$ implikuje $u \vee w = w$. Istotnie, skoro $w = w \vee (w \wedge u)$ oraz $w \wedge u = u$, to $w = u \vee w$.

Sprawdzimy, że $u \vee w = w$ implikuje $u \leqslant w$. Skoro $u \vee w = w$, to $(-w) \wedge (u \vee w) = (-w) \wedge w = 0$. Zatem

$$u \wedge (-w) = ((-w) \wedge u) \vee ((-w) \wedge w) = (-w) \wedge (u \vee w) = 0.$$

Udowodnione wyżej implikacje dowodzą jednocześnie równoważności (a) i równoważności (b).

TWIERDZENIE 1. Dla każdej algebry Boole'a B relacja "$\leqslant$" określona warunkiem (1) jest częściowym porządkiem w zbiorze B.

Dowód. Skoro $u \wedge (-u) = 0$, więc $u \leqslant u$ dla każdego $u \in B$.

Jeśli $u \leqslant w$ oraz $w < u$, to, na mocy lematu 1 (a), $u \wedge w = u$ oraz $w \wedge u = w$. Zatem $u = w$.

Jeśli $u \leqslant w$ oraz $w \leqslant z$, to, na mocy lematu 1, $u \wedge w = u$ oraz $w \vee z = z$. Zatem

$$u \wedge (-z) = (u \wedge w) \wedge ((-w) \wedge (-z)) = 0,$$

co oznacza, że $u \leq z$.

Pozostawiamy bez dowodu następujący łatwy lemat.

LEMAT 2. Jeśli B jest algebrą Boole'a oraz $u, w, u', w' \in B$, to

(a) jeśli $u \leq w$ oraz $u' \leq w'$, to $u \wedge u' \leq w \wedge w'$ oraz $u \vee u' \leq w \vee w'$,

(b) jeśli $u \leq w$, to $-w \leq -u$,

(c) $u \leq u \vee w$ oraz $u \wedge w \leq u$,

(d) $0 \leq u$ oraz $u \leq 1$.

Niech B będzie ustaloną algebrą Boole'a. Jeśli $A \subset B$ oraz $u \in B$, to mówimy, że u jest *k r e s e m g ó r n y m* zbioru A ($u = \sup A$), gdy spełnione są warunki:

(2) dla każdego $a \in A$, $a \leq u$,

(3) jeśli $w \in B$ oraz $a \leq w$, dla każdego $a \in A$, to $u \leq w$.

Łatwo sprawdzić, że każdy zbiór $A \subset B$ może mieć co najwyżej jeden kres górny. Jasno też widać, że $\sup\{\emptyset\} = 0$.

Analogicznie określamy kres dolny: $u \in B$ jest *k r e s e m d o l n y m* zbioru $A \subset B$ ($u = \inf A$), gdy spełnione są warunki:

(4) dla każdego $a \in A$, $u \leq a$,

(5) jeśli $w \in B$ oraz $w \leq a$, dla każdego $a \in A$, to $w \leq u$.

LEMAT 3. W każdej algebrze Boole'a B zbiory skończone mają kresy. Dokładniej, jeśli $u_1, \ldots, u_n \in B$, to $\sup\{u_1, \ldots, u_n\} = u_1 \vee \ldots \vee u_n$ oraz $\inf\{u_1, \ldots, u_n\} = u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$.

Dowód. Na mocy lematu 2(c) dla każdego $i \leq n$ $u_i \leq u_1 \vee \ldots \vee u_n$. Z drugiej strony, jeśli dla każdego $i \leq n$, $u_i \leq w$, to, na mocy lematu 2(a), $u_1 \vee \ldots \vee u_n \leq w$. Zatem warunki (2) i (3) są spełnione, czyli $u_1 \vee \ldots \vee u_n$ jest kresem górnym zbioru $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Podobnie sprawdza się, że $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ jest kresem dolnym zbioru $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

LEMAT 4. Jeśli B jest algebrą Boole'a, $A \subset B$ oraz $u = \sup A$, to $-u = \inf\{-a : a \in A\}$. Jeśli $w = \inf A$, to $-w = \sup\{-a : a \in A\}$.

Dowód lematu pomijamy, bo wynika łatwo z definicji kresów i lematu 2(b).

A l g e b r a B o o l e'a jest z u p e ł n a, jeśli każdy jej podzbiór ma kres górny. Z lematu 4 wynika, że w algebrze Boole'a zupełnej każdy podzbiór ma także kres dolny, oraz że w definicji zupełności słowa "kres górny" można zastąpić słowami "kres dolny". Dla każdego zbioru X algebra Boole'a P(X) (tzn. ciało wszystkich podzbiorów zbioru X) jest algebrą Boole'a zupełną. Istnieją także algebry Boole'a, które nie są zupełne.

PRZYKŁAD. Niech B będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych, które są skończone lub ich dopełnienia są skończone; zbiór liczb naturalnych będziemy odtąd oznaczali symbolem $\mathbb{N}$. B jest algebrą Boole'a; patrz przykład 1, § 1. Dla każdego $n \geq 1$ niech u_n będzie zbiorem tych liczb nieparzystych, które są mniejsze lub równe n. Zbiory u_n są skończone, więc $A = \{u_n : n < \omega\} \subset B$. Pokażemy, że zbiór A nie ma kresu górnego w algebrze B.

Załóżmy, że $w \in B$ jest ograniczeniem górnym zbioru B (tzn. spełnia (2)). Łatwo widać, że zbiór w musi być nieskończony. Zatem $\mathbb{N} - w$ jest zbiorem skończonym. Obierzmy w zbiorze w liczbę parzystą k. Wówczas $w - \{k\}$ jest także ograniczeniem górnym zbioru A oraz $w - \{k\}$ jest mniejsze od w, co przeczy warunkowi (3). Zatem zbiór A nie ma kresu górnego, czyli B nie jest algebrą zupełną.

Zauważmy jeszcze, że w rozpatrywanej algebrze każdy zbiór ma albo kres górny, albo kres dolny. Nietrudno sprawdzić, że jeśli do A należy pewien zbiór skończony, to $\bigcap\{u : u \in A\} = \inf A$, a jeśli wszystkie elementy zbioru A są nieskończone, to $\bigcup\{u : u \in A\} = \sup(A)$.

TWIERDZENIE 2. Dla każdej niepustej przestrzeni topologicznej X algebra Boole'a RO(X) jest zupełna.

Dowód. Skoro w algebrze RO(X) działanie "$\wedge$" pokrywa się z iloczynem mnogościowym zbiorów (patrz § 3, twierdzenie 1), więc, na mocy lematu 1(a), mamy

(6) $u \leq w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \subset w$.

Niech $A \subset RO(X)$. Pokażemy, że zbiór $w = int(cl \bigcup\{u: u \in A\})$ jest kresem górnym zbioru A.

Istotnie, jeśli $u \in A$, to $u \subset \bigcup\{a: a \in A\}$, czyli $u \subset w$. Zatem na mocy (6) $u \leq w$.

Przypuśćmy, że $w' \in RO(X)$ oraz dla każdego $u \in A$, $u \leq w'$. Zatem $w = int(cl \bigcup\{u: u \in A\}) \subset w'$, bo w' jest zbiorem regularnie otwartym. To kończy dowód.

§ 5. Przestrzenie ekstremalnie niespójne

W poprzednim paragrafie wykazaliśmy, że algebra Boole'a $RO(X)$ jest zupełna dla każdej przestrzeni topologicznej X. Nasuwa się pytanie, czy algebra $CO(X)$ (zbiorów domknięto-otwartych w przestrzeni X) jest także zupełna. Odpowiedź jest pozytywna w przypadku, gdy X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną.

Przestrzeń topologiczna jest e k s t r e m a l n i e n i e s p ó j n a, jeśli każdy jej podzbiór otwarty ma domknięcie otwarte.

LEMAT 1. Przestrzeń topologiczna X jest ekstremalnie niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch zbiorów otwartych rozłącznych $U, V \subset X$, $clU \cap clV = \emptyset$.

Dowód. Załóżmy, że dla każdych dwóch zbiorów otwartych rozłącznych $U, V \subset X$, $clU \cap clV = \emptyset$. Niech $W \subset X$ będzie zbiorem otwartym. Skoro $W \cap (X - clW) = \emptyset$, więc $clW \cap cl(X - clW) = \emptyset$. Zatem $clW \subset X - cl(X - clW) = int(clW)$, czyli clW jest zbiorem otwartym w X.

Implikacja przeciwna wynika stąd, że jeśli $U, A \subset X$ oraz U jest zbiorem otwartym i $U \cap A = \emptyset$, to $U \cap clA = \emptyset$.

TWIERDZENIE 1. Przestrzeń X jest ekstremalnie niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy $CO(X) = RO(X)$.

Dowód 1. Niech X będzie przestrzenią ekstremalnie niespójną. Inkluzja $CO(X) \subset RO(X)$ jest oczywista (w istocie $CO(X)$ jest podalgebrą algebry $RO(X)$ dla każdej przestrzeni X). Jeśli $U \subset X$ jest zbiorem regularnie otwartym, to $U = \mathrm{int}(\mathrm{cl}U)$. Zbiór $\mathrm{cl}U$ jest otwarty, więc $U = \mathrm{cl}U$. Zatem każdy zbiór regularnie otwarty w X jest domknięto-otwarty.

2. Załóżmy, że $RO(X) = CO(X)$. Niech $U, V \subset X$ będą zbiorami otwartymi rozłącznymi. Skoro $U \cap V = \emptyset$, to $U \cap \mathrm{cl}V = \emptyset$. Tym bardziej $U \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}V) = \emptyset$. Podobnie, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}U) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}V) = \emptyset$. Zbiór $\mathrm{int}(\mathrm{cl}U)$ jest regularnie otwarty, a więc jest domknięto-otwarty. Zatem, na mocy lematu 1 z § 3, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}U) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}U)) = \mathrm{cl}U$. Analogicznie, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}V) = \mathrm{cl}V$. Zatem $\mathrm{cl}U \cap \mathrm{cl}V = \emptyset$, co kończy dowód.

Skoro algebra Boole'a $RO(X)$ jest zupełna (patrz twierdzenie 2, § 4), to bezpośrednim wnioskiem z poprzedniego twierdzenia jest

TWIERDZENIE 2. Jeśli X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną, to algebra Boole'a $CO(X)$ jest zupełna.

Jeśli przestrzeń X jest spójna, to algebra $CO(X)$ jest dwuelementowa, a więc także zupełna. Twierdzenia 2 nie można więc odwrócić. W zakresie przestrzeni zero-wymiarowych twierdzenie odwrotne jest jednak prawdziwe.

TWIERDZENIE 3. Jeśli X jest przestrzenią zero-wymiarową, to algebra Boole'a $CO(X)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną.

Dowód. Załóżmy, że algebra $CO(X)$ jest zupełna. Niech $U, V \subset X$ będą zbiorami otwartymi rozłącznymi oraz niech

$$P = \{W \in CO(X) : W \subset U\} \quad \text{i} \quad Q = \{W \in CO\,X : W \subset V\}.$$

Ponieważ X jest przestrzenią zero-wymiarową, to $\bigcup P = U$ oraz $\bigcup Q = V$. Niech $H \in CO(X)$ będzie kresem górnym zbioru P w algebrze $CO(X)$. Wówczas $\mathrm{cl}U = \mathrm{cl}(\bigcup P) \subset H$. Skoro $U \cap V = \emptyset$, więc $H \cap \mathrm{cl}(\bigcup Q) = \emptyset$. Zatem $\mathrm{cl}U \cap \mathrm{cl}V = \emptyset$.

Implikacja przeciwna wynika z twierdzenia 2.

Powyższe twierdzenie jest, jak się zdaje, wystarczającą motywacją do rozważania przestrzeni ekstremalnie niespójnych. Zauważmy wpierw, że przestrzenie dyskretne są ekstremalnie niespójne. W zakresie metrycznym są to jedyne takie przestrzenie. Wynika to stąd, że w przestrzeni ekstremalnie niespójnej Hausdorffa nie ma nietrywialnych ciągów zbieżnych. Istotnie, przypuśćmy, że X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną Hausdorffa oraz $x \in X$ jest granicą ciągu $\{x_n : n < \omega\} \subset X - \{x\}$. Skoro X jest przestrzenią Hausdorffa, a x jest jedynym punktem skupienia zbioru $\{x_n : n < \omega\}$, istnieje ciąg $\{U_n : n < \omega\}$ zbiorów otwartych rozłącznych i takich, że $x_n \in U_n \subset X - \{x\}$, dla $n < \omega$. Łatwo sprawdzić, że zbiory $W_1 = \bigcup\{U_{2n} : n < \omega\}$ oraz $W_2 = \bigcup\{U_{2n+1} : n < \omega\}$ są otwarte i rozłączne oraz $x \in \mathrm{cl}W_1 \cap \mathrm{cl}W_2$, co przeczy ekstremalnej niespójności.

LEMAT 2. Rozszerzenie Čecha-Stone'a przestrzeni całkowicie regularnej ekstremalnie niespójnej jest przestrzenią ekstremalnie niespójną.

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli zbiory $H, G \subset X$ są domknięto-otwarte w X i rozłączne, to ich domknięcia w przestrzeni βX są także rozłączne. Wynika to stąd, że domknięcia w βX zbiorów H i G są zbiorami domknięto-otwartymi (patrz lemat 2, § 2) oraz X jest zbiorem gęstym w βX.

Jeśli zbiory $U, V \subset \beta X$ są rozłączne i otwarte w βX, to zbiory $U \cap X$ i $V \cap X$ są rozłączne i otwarte w X. Zatem zbiory $\mathrm{cl}_X(U \cap X)$ i $\mathrm{cl}_X(V \cap X)$ są domknięto-otwarte i rozłączne, bo X jest ekstremalnie niespójna. Jak wynika z uwagi poczynionej na początku dowodu, $\mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_X(U \cap X)) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_X(V \cap X)) = \emptyset$. Ponieważ zbiór X jest gęsty w βX, to $\mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_X(U \cap X)) = \mathrm{cl}_{\beta X}(U)$ oraz $\mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_X(V \cap X)) = \mathrm{cl}_{\beta X}(V)$. Zatem $\mathrm{cl}_{\beta X}(U) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(V) = \emptyset$, co kończy dowód (patrz lemat 1).

Z lematu 2 wynika w szczególności, że przestrzeń βN - rozszerzenie Čecha-Stone'a zbioru liczb naturalnych - jest przestrzenią ekstremalnie niespójną zwartą.

Łatwo sprawdzić, że podprzestrzenie otwarte i podprzestrzenie gęste przestrzeni ekstremalnie niespójnych są ekstremalnie niespójne. Także suma topologiczna (suma rozłączna) przestrzeni ekstremalnie niespójnych jest ekstremalnie niespójna.

Iloczyn kartezjański nie zachowuje ekstremalnej niespójności. Okazuje się, że jeśli przestrzeń $X \times Y$ jest ekstremalnie niespójna, a przestrzenie X oraz Y są zwarte (Hausdorffa), to przynajmniej jedna spośród nich jest skończona (więc dyskretna).

Przypuśćmy, że tak nie jest. Ponieważ X jest przestrzenią Hausdorffa nieskończoną, to istnieje ciąg $\{U_n ; n<\omega\}$ zbiorów otwartych (niepustych) w X i rozłącznych. Podobnie w przestrzeni Y istnieje ciąg $\{V_n : n<\omega\}$ zbiorów (niepustych) otwartych rozłącznych. Niech $G = \bigcup\{U_n \times V_k : n,k<\omega$ oraz $n<k\}$ oraz $H = \bigcup\{U_n \times V_k : n,k<\omega$ oraz $k<n\}$. Zbiory G i H są otwarte i rozłączne w $X \times Y$. Skoro przestrzenie X oraz Y są zwarte, więc istnieje $x \in cl_X(\bigcup\{U_n : n<\omega\})$ oraz $y \in cl_Y(\bigcup\{V_n : n<\omega\})$. Łatwo sprawdzić, że punkt (x,y) leży w domknięciu zarówno zbioru G, jak i H, co przeczy ekstremalnej niespójności przestrzeni $X \times Y$.

Z tego, co wykazaliśmy, wynika w szczególności, że przestrzeń $\beta N \times \beta N$ nie jest ekstremalnie niespójna.

II. Przestrzenie Stone'a

§ 1. Homomorfizmy

H o m o m o r f i z m e m algebry Boole'a B w algebrę Boole'a C nazywamy każde odwzorowanie $h:B \longrightarrow C$ zachowujące działania, tzn. takie, że dla każdych $u,w \in B$ spełnione są warunki:

(1) $h(u \vee w) = h(u) \vee h(w)$,

(2) $h(u \wedge w) = h(u) \wedge h(w)$,

(3) $h(-u) = -h(u)$,

przy czym działania $\vee$, $\wedge$, występujące po lewej stronie równości (1) - (3), są działaniami w algebrze B, a te same znaki występujące po prawej stronie oznaczają działania w algebrze C.

Jeśli homomorfizm h jest odwzorowaniem różnowartościowym, to nazywamy go m o n o m o r f i z m e m, a jeśli jest "na" (tzn. $h(B) = C$), to nazywamy go e p i m o r f i z m e m. Homomorfizm, który jest zarazem monomorfizmem i epimorfizmem nazywa się i z o m o r f i z m e m.

Z warunków (1) - (3) wynika, że $h(0_B) = 0_C$ oraz $h(1_B) = 1_C$. Zatem zbiór $h(B)$ - obraz zbioru B przez odwzorowanie h - jest podalgebrą algebry C, przy czym działania w $h(B)$ są indukowane z algebry C (patrz rozdział I, § 1). Jeśli h jest monomorfizmem, to algebra $h(B)$ jest izomorficzna z B.

Zauważmy, że homomorfizmy zachowują porządek, tzn. jeśli $u \leq w$, to $h(u) \leq h(w)$. Istotnie, jeśli $u \leq w$, to $u \vee w = w$. Zatem, na mocy (1), $h(u) \vee h(w) = h(w)$, czyli $h(u) \leq h(w)$.

LEMAT 1. Odwzorowanie $h: B \longrightarrow C$ jest izomorfizmem algebr Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy $h(B) = C$ i dla każdych $u, w \in B$ spełniony jest warunek:

(4) $u \leqslant w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(u) \leqslant h(w)$.

Dowód. Izomorfizmy, jak wynika z poczynionej uwagi, spełniają (4). Załóżmy więc, że $h(B) = C$ i h spełnia warunek (4).

Odwzorowanie h jest różnowartościowe, bo jeśli $h(u) = h(w)$, to - na mocy (4) - $u = w$.

Pokażemy, że h spełnia warunek (1). Istotnie, skoro $u \leqslant u \vee w$, więc $h(u) \leqslant h(u \vee w)$. Analogicznie $h(w) \leqslant h(u \vee w)$. Zatem $h(u) \vee h(w) \leqslant$ $\leqslant h(u \vee w)$. Dla dowodu nierówności przeciwnej obierzmy $z \in B$ takie, że $h(z) = h(u) \vee h(w)$ (odwzorowanie h jest "na"). Ponieważ $h(u) \leqslant h(z)$, to $u \leqslant z$. Analogicznie $w \leqslant z$. Zatem $u \vee w \leqslant z$, czyli $h(u \vee w) \leqslant h(z) =$ $= h(u) \vee h(w)$.

Analogicznie do poprzedniego sprawdza się, że h spełnia (2). Sprawdźmy zatem warunek (3). Zauważmy najpierw, że $h(0_B) = 0_C$. Istotnie, skoro $h(B) = C$, więc istnieje $u \in B$ takie, że $h(u) = 0_C$. Ponieważ $h(0_B) \geqslant 0_C$, to na mocy (4) $u \leqslant 0_B$. Zatem $u = 0_B$. Podobnie sprawdza się, że $h(1_B) = 1_C$. Skoro $h(0) = 0$, więc dla każdego $u \in B$ $h(u) \wedge h(-u) = 0$. Ponieważ $h(1) = 1$, to $h(u) \vee h(-u) = 1$. Zatem $h(-u) =$ $= -h(u)$, co kończy dowód.

A t o m e m algebry Boole'a B nazywamy każdy element minimalny (w sensie relacji "$\leqslant$") w zbiorze $B - \{0_B\}$. Mówimy, że algebra B jest atomowa, gdy dla każdego $u \in B - \{0_B\}$ istnieje atom x taki, że $x \leqslant u$. Algebry Boole'a skończone są atomowe.

TWIERDZENIE 1. Jeśli algebra Boole'a B jest zupełna i atomowa, to jest ona izomorficzna z ciałem zbiorów $P(A)$, gdzie A jest zbiorem wszystkich atomów algebry Boole'a B.

Dowód. Dla każdego $u \in B$ rozważmy zbiór $A_u = \{a \in A : a \leqslant u\}$. Homomorfizm $h : B \longrightarrow P(A)$ określamy wzorem:

(5) $h(u) = A_u$.

Łatwo sprawdzić, że $h(0) = \emptyset$, oraz jeśli $A' \subset A$ i $A' \neq \emptyset$, to $h(\sup(A')) = A'$. Zatem h jest "na". Na mocy lematu 1 wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie h spełnia warunek (4).

Jeśli $u \leq w$, to $A_u \subset A_w$, czyli $h(u) \leq h(w)$. Pokażemy, że jeśli $A_u \subset A_w$, to $u \leq w$. Przypuśćmy, że $u - w \neq 0$. Wówczas istnieje $a \in A$ takie, że $a \leq u - w$ (B jest algebrą atomową). Zatem $a \leq u$ oraz $a \wedge w = 0$, czyli $a \in A_u - A_w$, sprzeczność.

Jak już wspomnieliśmy, każda algebra Boole'a skończona jest atomowa. Jest ona także zupełna. Stąd wynika (twierdzenie 1), że każda algebra Boole'a skończona jest izomorficzna z ciałem wszystkich podzbiorów zbioru atomów tej algebry. W szczególności, liczba elementów algebry skończonej jest równa 2^n, gdzie n jest liczbą atomów tej algebry.

TWIERDZENIE 2. Dla każdej przestrzeni całkowicie regularnej X algebry Boole'a $CO(X)$ oraz $CO(\beta X)$ są izomorficzne.

Dowód. Rozważmy odwzorowanie $h : CO(\beta X) \to CO(X)$ określone wzorem:

(6) $h(U) = X \cap U$,

gdzie $U \in CO(\beta X)$.

Skoro dla każdego zbioru domknięto-otwartego $W \subset X$ zbiór $cl_{\beta X}(W)$ jest domknięto-otwarty w βX (patrz rozdział I, § 2, lemat 2), to odwzorowanie h jest "na". Na mocy lematu 1 wystarczy sprawdzić, że h spełnia warunek (4).

Jeśli $U \subset W$, to $U \cap X \subset W \cap X$. Załóżmy więc, że $U, W \in CO(\beta X)$ oraz $U \cap X \subset W \cap X$. Skoro U jest zbiorem otwartym w βX, a zbiór X jest gęsty w βX, to $cl_{\beta X} U = cl_{\beta X}(U \cap X)$. Analogicznie $cl_{\beta X} W = cl_{\beta X}(W \cap X)$. Mamy zatem:

$$U = cl_{\beta X}(U) = cl_{\beta X}(U \cap X) \subset cl_{\beta X}(W \cap X) = cl_{\beta X}(W) = W,$$

co kończy dowód.

TWIERDZENIE 3. Algebra Boole'a $CO(\beta \mathbb{N})$ jest izomorficzna z algebrą $P(\mathbb{N})$.

Dowód pomijamy, bo wynika w sposób oczywisty z poprzedniego twierdzenia. Zbiór $\mathbb{N}$, jak łatwo zauważyć, można tu zastąpić dowolną przestrzenią dyskretną.

§ 2. Ideały i algebry ilorazowe

I d e a ł e m w algebrze Boole'a B nazywamy każdy zbiór $I \subset B$ spełniający warunki:

(1) jeśli $u, w \in I$, to $u \vee w \in I$,

(2) jeśli $u \in I$, $w \in B$ oraz $w \leq u$, to $w \in I$,

(3) $0_B \in I$ oraz $1_B \notin I$.

Przykładem ideału w algebrze $P(X)$, gdzie X jest zbiorem nieskończonym, jest rodzina wszystkich podzbiorów skończonych zbioru X. Przykładem ideału w algebrze zbiorów mierzalnych w sensie Lebesque'a jest rodzina zbiorów miary zero. Łatwo sprawdzić, że jeśli $h : B \longrightarrow C$ jest homomorfizmem algebr Boole'a, to zbiór $\ker(h) = \{u \in B : h(u) = 0_C\}$ jest ideałem w algebrze B. Zbiór $\ker(h)$ nazywamy j ą d r e m h o m o m o r f i z m u h. Homomorfizm h jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(h) = \{0\}$. Okazuje się, że każdy ideał jest jądrem pewnego homomorfizmu.

Z każdym ideałem można związać pewną relację równoważności. Jeśli I jest ustalonym ideałem w algebrze Boole'a B, to r e l a c j ą d z i e l e n i a a l g e b r y B p r z e z i d e a ł I nazywamy relację $\varrho \in B \times B$ określoną wzorem:

(4) $u \varrho w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(u-w) \vee (w-u) \in I$,

tzn. elementy u i w są równoważne, gdy różnią się o pewien element z ideału I.

Sprawdźmy, że wzór (4) określa relację równoważności. Symetria i zwrotność relacji ϱ są oczywiste. Dla sprawdzenia przechodniości załóżmy, że $u \varrho w$ oraz $w \varrho z$. Wówczas $(u-w) \vee (w-u) \in I$ oraz $(w-z) \vee (z-w) \in I$. Skoro $u-z \leq (u-w) \vee (w-z)$ oraz $z-u \leq (z-w) \vee (w-u)$, to $(u-z) \vee (z-u) \leq (u-w) \vee (w-z) \vee (z-w) \vee (w-u) \in I$, czyli $u \varrho z$.

Relacja ϱ jest zgodna z działaniami, tzn. spełnia następujące warunki:

(5) jeśli $u \varrho u'$ oraz $w \varrho w'$, to $u \vee w \varrho u' \vee w'$,

(6) jeśli $u \varrho u'$ oraz $w \varrho w'$, to $u \wedge w \varrho u' \wedge w'$,

(7) jeśli $u \varrho w$, to $-u \varrho -w$.

Warunek (5) wynika stąd, że $(u \vee w) - (u' \vee w') = (u \vee w) \wedge (-u') \wedge (-w') = (u \wedge (-u')) \wedge (-w')) \vee (w \wedge (-u') \wedge (-w')) \leq (u-u') \vee (w-w')$, oraz - analogicznie - $(u' \vee w') - (u \vee w) \leq (u'-u) \vee (w'-w)$. Podobnie sprawdza się wzory (6) i (7).

Dla $u \in B$ niech $[u]$ oznacza klasę abstrakcji elementu u względem relacji ϱ określonej wzorem (4), tzn. $[u] = \{w \in B : u \varrho w\}$. Zbiór wszystkich klas abstrakcji oznaczamy symbolem $B|I$. Działania boole'owskie w zbiorze $B|I$ określamy następującymi wzorami:

(8) $[u] \vee [w] = [u \vee w]$,

(9) $[u] \wedge [w] = [u \wedge w]$,

(10) $-[u] = [-u]$.

Bezpośrednio z własności (5) - (7) wynika, że takie określenie działań jest poprawne, tzn. nie zależy od wyboru reprezentanta w klasie abstrakcji. Z samych zaś określeń (8) - (10) wynika, że zbiór $B|I$ wraz z tymi działaniami jest algebrą Boole'a. Algebrę $B|I$ nazywamy *algebrą ilorazową* algebry B przez ideał I.

Z każdą algebrą ilorazową jest związany epimorfizm $q_I : B \longrightarrow B|I$ określony wzorem:

(11) $q_I(u) = [u]$.

To, że q_I jest istotnie epimorfizmem, wynika bezpośrednio ze wzorów (8) - (10). Homomorfizm ten będziemy nazywali *projekcją* algebry B na algebrę $B|I$ w y z n a c z o n ą p r z e z i d e a ł I.

Z określenia (4) wynika, że $[u] = [0]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in I$. A więc jądrem projekcji q_I jest ideał I.

TWIERDZENIE 1. Dla każdego epimorfizmu $h: B \longrightarrow C$ istnieje izomorfizm $f: B|\ker(h) \longrightarrow C$ taki, że $h = f \circ q_{\ker(h)}$, tzn. następujący diagram jest zgodny:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q_{\ker h}"'] & C \\ B|\ker(h) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Dowód. Odwzorowanie $f: B|\ker(h) \longrightarrow C$ określamy wzorem:

(12) $f([u]) = h(u)$.

Określenie to jest poprawne, bo jeśli $[u] = [w]$, to $h((u-w) \vee (w-u)) = 0$, czyli $h(u) = h(w)$. Z warunku (12) wynika, że $f \circ q_{\ker(h)} = h$.

Odwzorowanie f jest homomorfizmem: mamy bowiem

$$f([u] \vee [w]) = f([u \vee w]) = h(u \vee w) = h(u) \vee h(w) = f([u]) \vee f([w]).$$

Analogicznie sprawdza się, że $f([u] \wedge [w]) = f([u]) \wedge f([w])$ oraz $f(-[u]) = -f([u])$.

Stąd, że h jest epimorfizmem, oraz z warunku (12) wynika, że f jest także epimorfizmem.

Pozostaje sprawdzić, że f jest różnowartościowe. Jeśli $f([u]) = f([w])$, to $h(u) = h(w)$, czyli $h(u-w) = h(w-u) = 0$. Zatem $(u-w) \vee (w-u) \in \ker(h)$, czyli $[u] = [w]$, co kończy dowód.

W § 1 (patrz twierdzenie 3) pokazaliśmy, że algebra $CO(\beta N)$ jest izomorficzna z $P(N)$. Obecnie pokażemy następujące

TWIERDZENIE 2. Algebra Boole'a $CO(\beta IN - IN)$ jest izomorficzna z algebrą ilorazową $P(IN)|Fin$, gdzie Fin oznacza ideał wszystkich podzbiorów skończonych zbioru IN.

Dowód. Rozważmy odwzorowanie $h: P(IN) \to CO(\beta IN - IN)$ określone wzorem:

(13) $h(U) = (\beta IN - IN) \cap cl(U)$,

gdzie $U \subset IN$ oraz $cl(U)$ jest domknięciem zbioru U w przestrzeni βIN. Zbiór $cl(U)$ jest domknięto-otwarty w przestrzeni βIN(patrz rozdział I, § 2, lemat 2). Zatem odwzorowanie h jest poprawnie określone.

Sprawdźmy, że h jest homomorfizmem. Z własności operacji domknięcia wynika, że

(14) $h(U \cup V) = h(U) \cup h(V)$.

Zauważmy, że jeśli $U \subset IN$, to

(15) $cl(IN - U) = \beta IN - cl(U)$.

Istotnie, skoro $cl(IN) = \beta IN$, to $cl(U) \cup cl(IN - U) = \beta IN$. Skoro przestrzeń βIN jest ekstremalnie niespójna, to $cl(U) \cap cl(IN - U) = \emptyset$, co dowodzi warunku (15). Zatem pokazaliśmy, że

(16) $h(-U) = -h(U)$.

Z praw de Morgana oraz warunków (14) i (16) wynika, że $h(U \cap V) = h(U) \cap h(V)$, co dowodzi, że h jest homomorfizmem.

Jeśli $W \subset \beta IN - IN$ jest zbiorem domknięto-otwartym, to istnieje zbiór otwarty $U \subset \beta IN$ taki, że $W = U \cap (\beta IN - IN)$. Łatwo sprawdzić, że $cl(U \cap IN) \cap (\beta IN - IN) = W$. Zatem h jest epimorfizmem.

Jądrem homomorfizmu h jest ideał Fin. Istotnie, jeśli $h(U) = \emptyset$, to $cl(U)$ jest podzbiorem zwartym zbioru IN. Zatem U musi być zbiorem skończonym.

Z twierdzenia 1 wynika teraz, że algebry $P(IN)|Fin$ oraz $CO(\beta IN - IN)$ są izomorficzne. To kończy dowód.

W tym miejscu wypada stwierdzić, że przestrzeń $\beta IN - IN$ nie jest ekstremalnie niespójna, tzn. algebra Boole'a $P(IN) \mid Fin$ nie jest zupełna. Aby to wykazać, rozważmy ciąg $\{u_n : n<\omega\} \subset P(IN)$ składający się ze zbiorów nieskończonych rozłącznych. Załóżmy, że $[w] \in P(IN) \mid Fin$ oraz $[u_n] \leqslant [w]$ dla każdego $n<\omega$. Wówczas każdy ze zbiorów $u_n \cap w$ jest niepusty. Niech $x_n \in u_n \cap w$ oraz $w' = w - \{x_n : n<\omega\}$. Łatwo sprawdzić, że $[u_n] \leqslant [w']$ dla każdego $n<\omega$ oraz $[w'] < [w]$. Zatem nie istnieje kres górny zbioru $\{[u_n] : n<\omega\}$, czyli $P(IN) \mid Fin$ nie jest algebrą zupełną.

§ 3. Filtry i ultrafiltry. Twierdzenie Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a

F i l t r e m w algebrze Boole'a B nazywamy każdy zbiór $F \subset B$ spełniający warunki:

(1) jeśli $u, w \in F$, to $u \wedge w \in F$,

(2) jeśli $u \in F$, $w \in B$ i $u \leqslant w$, to $w \in F$,

(3) $1 \in F$ oraz $0 \notin F$.

Zatem filtr jest pojęciem dwoistym do ideału; łatwo sprawdzić, że zbiór $F \subset B$ jest filtrem wtedy i tylko wtedy, gdy $\{-u : u \in F\}$ jest ideałem. W szczególności, jeśli X jest zbiorem nieskończonym, to zbiór tych $U \subset X$, takich że $X-U$ jest zbiorem skończonym, jest filtrem w algebrze Boole'a $P(X)$. Podobnie rodzina wszystkich zbiorów miary 1 jest filtrem w algebrze zbiorów mierzalnych w sensie Lebesque'a.

Zbiór $A \subset B$ jest s c e n t r o w a n y w algebrze Boole'a B, jeśli dla każdego zbioru skończonego $\{u_1, \dots, u_n\} \subset A$, $u_1 \wedge \dots \wedge u_n \neq 0$. Filtry są, jak widać, zbiorami scentrowanymi.

LEMAT 1. Każdy zbiór scentrowany w algebrze Boole'a jest zawarty w pewnym filtrze tej algebry.

Dowód. Niech zbiór $A \subset B$ będzie scentrowany w algebrze Boole'a B. Zbiór $F = \{w \in B:$ istnieją $u_1, \ldots, u_n \in A$ takie, że $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n \leq$ $\leq w\}$ jest filtrem. Łatwe sprawdzenie pomijamy.

Wśród filtrów ważną rolę odgrywają filtry maksymalne, czyli ultrafiltry. Filtr $F \subset B$ nazywamy u l t r a f i l t r e m, jeśli nie istnieje filtr $F' \subset B$ taki, że $F \subset F'$ i $F \neq F'$.

TWIERDZENIE 1. Każdy zbiór scentrowany w algebrze Boole'a (w szczególności każdy filtr) jest zawarty w pewnym ultrafiltrze tej algebry.

Dowód. Niech B będzie algebrą Boole'a i niech $A \subset B$ będzie zbiorem scentrowanym. Na mocy lematu 1 istnieje filtr $F \subset B$ taki, że $A \subset F$. Niech S będzie zbiorem wszystkich filtrów algebry B zawierającym F. Zbiór S jest częściowo uporządkowany przez relację zawierania. Łatwo sprawdzić, że jeśli L jest podzbiorem liniowo uporządkowanym zbioru S, to $\bigcup\{F': F' \in L\} \in S$. Zatem, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna, w S istnieje element maksymalny. Element ten jest utrafiltrem.

TWIERDZENIE 2. Filtr F jest ultrafiltrem w algebrze Boole'a B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $u \in B$, albo $u \in F$, albo $-u \in F$.

Dowód. Przypuśćmy, że $F \subset B$ jest ultrafiltrem, oraz dla pewnego $u \in B$, $u \notin F$ i $-u \notin F$. Rozważmy zbiór

$$G = \{w \in B: \text{istnieje } z \in F \text{ takie, że } u \wedge z \leq w\}.$$

Zauważmy, że $F \subset G$. Skoro $-u \notin F$, więc $0 \notin G$. Jeśli $w_1, w_2 \in G$, to $w_1 \wedge$ $\wedge w_2 \in G$. Jeśli $w_1 \leq w_2$ i $w_1 \in G$, to $w_2 \in G$. Zatem G jest filtrem i $F \neq G$, bo $u \in G - F$, sprzeczność.

Załóżmy, że dla każdego $u \in B$, $u \in F$ lub $-u \in F$. Przypuśćmy, że istnieje filtr $G \subset B$ taki, że $F \subset G$ i $F \neq G$. Niech $u \in G - F$. Skoro $u \notin F$, więc $-u \in F$. Zatem $u, -u \in G$, sprzeczność.

Twierdzenie o reprezentacji algebr Boole'a, udowodnione przez M.H. S t o n e ' a (1936), jest jednym z podstawowych twierdzeń tej teorii. Mówi ono, że każda algebra Boole'a jest izomorficzna z ciałem zbiorów domknięto-otwartych pewnej przestrzeni zwartej zero-wymiarowej. Twierdzenie Stone'a pozwala zatem przekładać twierdzenia teorii algebr Boole'a na język topologii. Mimo że samo przekładanie nie jest na ogół zbyt odkrywcze, to jednak pomaga nieraz dostrzec nowe związki pomiędzy twierdzeniami i dodatkowe motywacje. Jest to także pewna forma "geometryzacji" algebr Boole'a.

TWIERDZENIE 3 (Twierdzenie Stone'a o reprezentacji). Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z ciałem wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych pewnej przestrzeni topologicznej zwartej zero-wymiarowej.

Dowód. Niech B będzie algebrą Boole'a, a S zbiorem wszystkich ultrafiltrów w B. Dla każdego $u \in B$, niech

(4) $s(u) = \{p \in S: u \in p\}$.

Niech T będzie topologią w zbiorze S generowaną przez rodzinę $\{s(u): u \in B\}$, tzn. niech T będzie najmniejszą topologią na S, w której zbiory postaci $s(u)$ są otwarte.

Pokażemy, że zbiór S z topologią T jest przestrzenią zwartą (Hausdorffa) zero-wymiarową, a rodzina $\{s(u): u \in B\}$ jest bazą topologii T.

Zanotujmy dwie oczywiste własności:

(5) $s(0) = \emptyset$, $s(1) = S$,

(6) $s(u \wedge w) = s(u) \cap s(w)$.

Jeśli $p \in S$, to (na mocy twierdzenia 2) dla każdego $u \in B$, albo $u \in p$ albo $-u \in p$. Zatem

(7) $s(-u) = S - s(u)$.

Zauważmy, że dla $u, w \in B$

(8) $s(u \vee w) = s(u) \cup s(w)$,

Wynika to stąd, że jeśli $p \in S$ oraz $u \vee w \in p$, to $u \in p$ lub $w \in p$. Istotnie, w przeciwnym wypadku (na mocy twierdzenia 2) $-u, -w \in p$. Zatem $-u \wedge (-w) \in p$, co jest niemożliwe.

Z własności (5) i (6) wynika, że $\{s(u): u\in B\}$ jest bazą w przestrzeni S. Na mocy (7) baza ta składa się ze zbiorów domknięto-otwartych.

Sprawdźmy, że S jest przestrzenią Hausdorffa. Jeśli $p, q \in S$ oraz $p \neq q$, to $p-q \neq \emptyset$ lub $q-p \neq \emptyset$. Załóżmy, że $u \in p-q$. Wówczas $p \in s(u)$ oraz $q \notin s(u)$. Zbiór $s(u)$ jest domknięto-otwarty, więc punkty p i q mają otoczenia otwarte rozłączne.

Przestrzeń S jest zwarta. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieje rodzina $R \subset \{s(u): u\in B\}$ taka, że $\bigcup R = S$, oraz dla każdej podrodziny skończonej $R' \subset R$, $\bigcup R' \neq S$. Rozważmy zbiór $A = \{u \in B: s(-u) \in R\}$. Zbiór A jest scentrowany, bo jeśli $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n = 0$, to na mocy (8) $s(-u_1) \cup \ldots \cup s(-u_n) = s(1) = S$. Na mocy twierdzenia 1 istnieje ultrafiltr $p \in S$ taki, że $A \subset p$. Wówczas $p \notin s(u)$, dla $s(u) \in R$; sprzeczność.

Pokazaliśmy więc, że S jest przestrzenią zwartą zero-wymiarową. Pozostaje sprawdzić, że algebra B jest izomorficzna z ciałem $CO(S)$. Z własności (6) - (8) wynika, że odwzorowanie $s: B \longrightarrow CO(S)$ określone wzorem (4), które każdemu $u \in B$ przyporządkowuje zbiór $s(u) \in CO(S)$, jest homomorfizmem.

Jeśli $H \subset S$ jest zbiorem domknięto-otwartym, to istnieją $u_1, \ldots, u_n \in B$ takie, że $H = s(u_1) \cup \ldots \cup s(u_n)$, bo H jest podprzestrzenią zwartą i otwartą. Zatem s jest epimorfizmem.

Aby zakończyć dowód, pozostaje sprawdzić, że s jest monomorfizmem. Jeśli $s(u) = s(w)$, to $s(u-w) = s(w-u) = \emptyset$. Na mocy twierdzenia 1, jeśli $s(v) = \emptyset$, to $v = 0$. Wobec tego, $u-w = w-u = 0$. Zatem $u = w$, co kończy dowód.

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Każde odwzorowanie ciągłe $f: X \longrightarrow Y$ wyznacza homomorfizm $f^*: CO(Y) \longrightarrow CO(X)$ określony wzorem:

(9) $f^*(U) = f^{-1}(U)$

(gdzie $f^{-1}(U)$ oznacza przeciwobraz zbioru U przez odwzorowanie f, tzn. $f^{-1}(U) = \{x \in X: f(x) \in U\}$). Nietrudno sprawdzić, że f^* jest istotnie homomorfizmem. Będziemy go nazywali h o m o m o r f i z m e m i n d u k o w a n y m p r z e z o d w z o r o w a n i e c i ą g ł e.

LEMAT 2. Jeśli X i Y są przestrzeniami zwartymi zero-wymiarowymi, to dla każdego homomorfizmu $h: CO(Y) \longrightarrow CO(X)$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $f: X \longrightarrow Y$ taka, że $f^* = h$.

Dowód. Zauważmy wpierw, że dla każdego $x \in X$, $F_x = \{U \in CO(X): x \in U\}$ jest ultrafiltrem w $CO(X)$, bowiem

(10) dla każdego $U \in CO(X)$, $U \in F_x$ lub $-U \in F_x$.

Skoro h jest homomorfizmem, więc

(11) $h^{-1}(F_x) = \{V \in CO(Y): h(V) \in F_x\}$

jest filtrem w $CO(Y)$. Z (10) wynika, że dla każdego $V \in CO(Y)$, $V \in h^{-1}(F_x)$ lub $-V \in h^{-1}(F_x)$. Zatem $h^{-1}(F_x)$ jest ultrafiltrem.

Niech $F \in CO(Y)$ będzie ultrafiltrem. Pokażemy, że

(12) jeśli $y \in \bigcap\{V: V \in F\}$ i $y \in U \in CO(Y)$, to $U \in F$.

Istotnie, zbiór $F \cup \{U\}$ jest scentrowany. Na mocy twierdzenia 1 istnieje ultrafiltr F' taki, że $F \cup \{U\} \subset F'$. Jednak F jest ultrafiltrem, więc $U \in F$.

Ponieważ Y jest przestrzenią zwartą, to $\bigcap\{V: V \in h^{-1}(F_x)\} \neq \emptyset$. Wykazaliśmy, że $h^{-1}(F_x)$ jest ultrafiltrem. Na mocy warunku (12), $\bigcap\{V: V \in h^{-1}(F_x)\}$ jest zbiorem jednopunktowym (bo Y jest przestrzenią Hausdorffa). Określmy funkcję $f: X \longrightarrow Y$ następującym wzorem:

(13) $f(x) = y$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\{y\} = \bigcap\{V: V \in h^{-1}(F_x)\}.$$

Jak wynika z wcześniejszych uwag, definicja jest poprawna.

Aby wykazać ciągłość funkcji f, wystarczy pokazać, że

(14) $f^{-1}(U) = h(U)$, dla każdego $U \in CO(Y)$.

W tym celu wykażemy dwie inkluzje: $f^{-1}(U) \subset h(U)$ i $h(U) \subset f^{-1}(U)$. Jeśli $x \in f^{-1}(U)$, to $f(x) \in U$. Zatem, na mocy warunków (13) i (12), $U \in h^{-1}(F_x)$. Z warunku (11) $h(U) \in F_x$, czyli $x \in h(U)$. Z drugiej strony, jeśli $x \in h(U)$, to $h(U) \in F_x$, czyli $U \in h^{-1}(F_x)$. Zatem, na mocy warunku (13), $f(x) \in U$, czyli $x \in f^{-1}(U)$.

Ze wzoru (14) wynika również, że $f^* = h$.

Funkcja f jest wyznaczona jednoznacznie przez homomorfizm h. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieją funkcje ciągłe $f, g : X \longrightarrow Y$ takie, że $f^* = h = g^*$ i $f \neq g$. Istnieje zatem punkt $x \in X$ taki, że $f(x) \neq g(x)$. Niech $U \in CO(Y)$ spełnia $f(x) \in U$ i $g(x) \notin U$. Wówczas $x \in f^{-1}(U) = f^*(U)$ i $x \notin g^{-1}(U) = g^*(U)$; sprzeczność, bo $f^* = g^*$. Dowód jest zakończony.

TWIERDZENIE 4. Jeśli X, Y są przestrzeniami zwartymi zero-wymiarowymi, to dla każdego homomorfizmu $h: CO(Y) \longrightarrow CO(X)$ istnieje (dokładnie jedna) funkcja ciągła $T(h): X \longrightarrow Y$ taka, że $(T(h))^* = h$ (patrz określenie (9)) oraz spełnione są następujące własności:

(15) jeśli $e: CO(X) \longrightarrow CO(X)$ jest identycznością, to $T(e): X \longrightarrow X$ jest identycznością,

(16) jeśli $g: CO(Z) \longrightarrow CO(Y)$, gdzie Z jest przestrzenią zwartą zero-wymiarową, oraz $h: CO(Y) \longrightarrow CO(X)$, to $T(h \circ g) = T(g) \circ T(h)$.

Dowód. Istnienie i jednoznaczność funkcji $T(h)$ wynika z lematu 2. Pozostaje sprawdzić warunki (15) i (16).

Własność (15) wynika z jednoznaczności i stąd, że jeśli $i: X \longrightarrow X$ jest funkcją identycznościową, to $(i)^*$ jest homomorfizmem identycznościowym; patrz (14).

Własność (16) wynika także z jednoznaczności oraz stąd, że jeśli $f: X \longrightarrow Y$ oraz $k: Y \longrightarrow Z$, to $(k \circ f)^* = f^* \circ k^*$.

Wniosek 1. Jeśli przestrzenie X i Y są zwarte zero-wymiarowe, a algebry $CO(X)$ i $CO(Y)$ są izomorficzne, to przestrzenie X i Y są homeomorficzne.

Dowód. Niech $h: CO(X) \to CO(Y)$ będzie izomorfizmem. Na mocy twierdzenia 4 $T(h^{-1}) \circ T(h)$ oraz $T(h) \circ T(h^{-1})$ są odwzorowaniami identycznościowymi. Zatem $T(h): Y \to X$ jest homeomorfizmem.

Twierdzenie Stone'a mówi, że dla każdej algebry Boole'a B istnieje pewna przestrzeń zwarta zero-wymiarowa taka, że jej algebra zbiorów domknięto-otwartych jest izomorficzna z B. Z udowodnionego wniosku wynika, że przestrzeń ta jest wyznaczona z dokładnością do homeomorfizmu. Będziemy ją nazywać p r z e s t r z e n i ą S t o n e'a a l g e b r y B o o l e'a B i oznaczać symbolem $S(B)$. Izomorfizm $s_B: B \to CO(S(B))$ opisany w twierdzeniu Stone'a będziemy nazywali i z o m o r f i z m e m S t o n e'a.

Następne twierdzenie wynika wprost z twierdzenia 4.

TWIERDZENIE 5. Dla każdego homomorfizmu algebr Boole'a $h: B \to C$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $s(h): S(C) \to S(B)$ taka, że diagram

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s_B"'] & C \arrow[d, "s_C"] \\ CO(S(B)) \arrow[r, "(s(h))^*"'] & CO(S(C)) \end{tikzcd}$$

jest przemienny, tzn. $s_C \circ h = (s(h))^* \circ s_B$. Ponadto, jeśli $g: C \to D$, to $s(g \circ h) = s(h) \circ s(g)$ oraz, jeśli e jest identycznością na B, to $s(e)$ jest identycznością na $S(B)$.

Niech $\mathbb{N}$ oznacza (jak zwykle) zbiór liczb naturalnych. Rozważmy przestrzeń Stone'a algebry $P(\mathbb{N})$. Na mocy twierdzenia Stone'a $P(\mathbb{N})$ jest izomorficzne z $CO(S(P(\mathbb{N})))$. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia 3 z § 1, algebra $P(\mathbb{N})$ jest izomorficzna z $CO(\beta\mathbb{N})$, gdzie $\beta\mathbb{N}$ jest rozszerzeniem Čecha-Stone'a przestrzeni $\mathbb{N}$. Zatem, na mocy wniosku 1, przestrzeń $S(P(\mathbb{N}))$ jest izomorficzna z $\beta\mathbb{N}$.

Jeśli prześledzimy jeszcze raz dowód twierdzenia Stone'a, to zobaczymy, że - wobec poczynionej uwagi - przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ można definiować następująco:

$$\beta\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{p \subset P(\mathbb{N}) : p \text{ jest ultrafiltrem i } \bigcap \{u : u \in p\} = \emptyset\},$$

przy czym topologia w $\beta\mathbb{N}$ jest generowana przez zbiory postaci $u \cup \{p \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N} : u \in p\}$, gdzie $u \subset \mathbb{N}$.

§ 4. Przestrzenie Gleasona. Projektywność przestrzeni zwartych ekstremalnie niespójnych

Niech X będzie przestrzenią zwartą. Przestrzeń Stone'a algebry Boole'a zbiorów regularnie otwartych w X będziemy nazywali p r z e s t r z e n i ą G l e a s o n a nad przestrzenią X i oznaczali symbolem $G(X)$, tzn. $G(X) = S(RO(X))$. Algebra Boole'a $RO(X)$ jest zupełna (patrz twierdzenie 1, rozdział I, § 3). Zatem, na mocy twierdzenia Stone'a i twierdzenia 3 (rozdział I, § 5), przestrzeń $G(X)$ jest zwarta i ekstremalnie niespójna. Elementami przestrzeni $G(X)$ są ultrafiltry algebry Boole'a $RO(X)$, a topologia jest generowana przez zbiory postaci $s(U) = \{p \in G(X) : U \in p\}$, gdzie $U \in RO(X)$; patrz dowód twierdzenia Stone'a.

LEMAT 1. Jeśli $p \in G(X)$, $x \in \bigcap\{clU : U \in p\}$ i $x \in W \in RO(X)$, to $W \in p$.

Dowód. Dla każdego $U \in p$, $W \cap U \neq \emptyset$. Zatem zbiór $p \cup \{W\}$ jest scentrowany, czyli jest zawarty w pewnym ultrafiltrze algebry $RO(X)$. Skoro p jest ultrafiltrem, to $W \in p$.

Z lematu 1 i ze zwartości przestrzeni X wynika, że zbiór $\bigcap\{clU : U \in p\}$ jest jednopunktowy, dla każdego $p \in G(X)$. Istotnie, przypuśćmy, że $x, y \in \bigcap\{clU : U \in p\}$ oraz $x \neq y$. Wówczas istniałyby zbiory regularnie otwarte W_x, W_y takie, że $W_x \cap W_y = \emptyset$, $x \in W_x$ oraz $y \in W_y$. Na mocy lematu 1, $W_x, W_y \in p$, sprzeczność.

Wobec tej uwagi, dla każdej przestrzeni zwartej X można określić odwzorowanie $G_X : G(X) \longrightarrow X$ takie, że

(1) $G_X(p) = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x\} = \bigcap\{clU: U \in p\}$.

Będziemy je nazywali odwzorowaniem Gleasona przestrzeni $G(X)$ na przestrzeń X.

Dla każdego punktu $x \in X$ filtr otoczeń regularnie otwartych punktu x można powiększyć do ultrafiltru. Zatem odwzorowanie G_X jest "na".

Odwzorowanie G_X jest ciągłe. Istotnie, niech $p \in G(X)$ oraz niech $U \subset X$ będzie otoczeniem otwartym punktu $G_X(p)$. Obierzmy zbiór $V \in RO(X)$ taki, że $G_X(p) \in V \subset clV \subset U$. Na mocy lematu 1 $V \in p$. Zatem $p \in s(V)$. Na mocy (1), jeśli $q \in s(V)$, to $G_X(q) \in clV$. Zatem $G_X(s(V)) \subset U$; co dowodzi ciągłości funkcji G_X.

Odwzorowanie ciągłe $f: X \longrightarrow Y$ nazywamy nieprzywiedlnym, jeśli $f(X) = Y$ oraz nie istnieje zbiór domknięty $F \subset X$ taki, że $f(F) = Y$ i $F \neq X$.

TWIERDZENIE 1. Dla każdej przestrzeni zwartej X odwzorowanie Gleasona G_X jest nieprzywiedlne.

Dowód. Jak już pokazaliśmy, GX jest odwzorowaniem ciągłym "na". Niech $F \subset G(X)$ będzie zbiorem domkniętym takim, że $F \neq G(X)$. Wówczas istnieje zbiór niepusty $U \in RO(X)$ taki, że $s(U) \cap F = \emptyset$.

Zauważmy, że $G_X^{-1}(U) \subset s(U)$. Istotnie, jeśli $G_X(p) \in U$, to na mocy lematu 1 i warunku (1), $U \in p$, czyli $p \in s(U)$.

Stąd $G_X^{-1}(U) \cap F = \emptyset$, bo $s(U) \cap F = \emptyset$. Zatem $U \cap G_X(F) = \emptyset$, czyli $G_X(F) \neq X$.

Dalsze lematy będą dotyczyły odwzorowań nieprzywiedlnych.

LEMAT 2. Jeśli $f: X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem ciągłym, $f(X) = Y$ i przestrzeń X jest zwarta, to istnieje zbiór zwarty $Z \subset X$ taki, że $f(Z) = Y$, a odwzorowanie $f|Z$ jest nieprzywiedlne ($f|Z$ oznacza zacieśnienie odwzorowania f do zbioru Z).

Dowód. W zbiorze R wszystkich podzbiorów domkniętych przestrzeni X rozważmy porządek określony wzorem:

(2) $A \leqslant B$ jeśli $B \subset A$ oraz $f(A) = f(B) = Y$.

Jeśli $L \subset R$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym przez relację "$\leq$", to $\bigcap\{A: A \in L\}$ jest kresem górnym zbioru L. Istotnie, $f(\bigcap\{A: A \in L\}) = Y$, bo dla każdego $y \in Y$ zbiór $\{A \cap f^{-1}(y): A \in L\}$ jest scentrowany, a przestrzeń X jest zwarta. Zatem, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna, w R istnieje element maksymalny Z. Z maksymalności zbioru Z wynika, że $f(Z) = Y$ oraz $f|Z$ jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym.

LEMAT 3. Jeśli odwzorowanie $f:X \to Y$ jest nieprzywiedlne, $f(X) = Y$, przestrzeń X jest zwarta, a Y ekstremalnie niespójna, to f jest homeomorfizmem.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że odwzorowanie f jest różnowartościowe. W tym celu wykażemy, że jeśli $x \in X$, a U jest otoczeniem otwartym punktu x, to

(3) $f(x) \in \mathrm{cl}(Y - f(X - U))$.

Niech $V = Y - f(X - U)$. Skoro

$$f(\mathrm{cl}f^{-1}(V) \cup (X - U)) = f(\mathrm{cl}f^{-1}(V)) \cup f(X-U) = \mathrm{cl}V \cup f(X - U) = \mathrm{cl}(Y - f(X - U)) \cup f(X - U) = Y,$$

to $\mathrm{cl}f^{-1}(V) \cup (X - U) = X$, bo odwzorowanie f jest nieprzywiedlne. Zatem $U \subset \mathrm{cl}f^{-1}(V)$, czyli

$$f(x) \in f(U) \subset f(\mathrm{cl}f^{-1}(V)) = \mathrm{cl}V = \mathrm{cl}(Y - f(X - U)),$$

co dowodzi warunku (3).

Obierzmy dwa różne punkty $x, y \in X$. Przestrzeń X jest Hausdorffa, więc istnieją zbiory rozłączne $U_x, U_y \in X$ takie, że $x \in U_x$ i $y \in U_y$. Niech $V_x = Y - f(X - U_x)$ oraz $V_y = Y - f(X - U_y)$. Skoro $U_x \cap U_y = \emptyset$, to także $V_x \cap V_y = \emptyset$. Zatem $\mathrm{cl}V_x \cap \mathrm{cl}V_y = \emptyset$, bo przestrzeń Y jest ekstremalnie niespójna. Z drugiej strony, na mocy (3), $f(x) \in \mathrm{cl}V_x$ oraz $f(y) \in \mathrm{cl}V_y$. Zatem $f(x) \neq f(y)$; co kończy dowód.

Mówimy, że przestrzeń zwarta P jest projektywna, jeśli dla każdych dwóch przestrzeni zwartych X i Y oraz odwzorowań ciągłych $f:$

$:X \to Y$ i $g: P \to Y$, przy czym $f(X) = Y$, istnieje odwzorowanie ciągłe $h: P \to X$ takie, że $f \circ h = g$, tzn. następujący diagram jest zgodny:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Y & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

TWIERDZENIE 2. (A.M. G l e a s o n, 1958). Przestrzeń zwarta jest projektywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ekstremalnie niespójna.

Dowód. Wykażemy, że przestrzenie zwarte ekstremalnie niespójne są projektywne. Ustalmy w tym celu przestrzenie zwarte P, X, Y oraz odwzorowania ciągłe $f: X \to Y$ i $g: P \to Y$, przy czym $f(X) = Y$, a P jest przestrzenią ekstremalnie niespójną. Rozważmy zbiór $T = \{(x,p) \in X \times P: f(x) = g(p)\}$. Zauważmy, że T jest podzbiorem domkniętym przestrzeni $X \times P$. Istotnie, jeśli $(x,p) \notin T$, to $f(x) \neq g(p)$. Istnieją zatem zbiory otwarte rozłączne $U, V \subset Y$ takie, że $f(x) \in U$ oraz $g(p) \in V$. Łatwo sprawdzić, że zbiór $W = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$ jest otoczeniem otwartym punktu (x,p) rozłącznym z T; co dowodzi domkniętości zbioru T.

Skoro $X \times P$ jest przestrzenią zwartą, a T jest zbiorem domkniętym, to T jest zbiorem zwartym. Niech odwzorowanie $i: T \to X$ będzie określone wzorem $i(x,p) = x$, a odwzorowanie $j: T \to P$ wzorem $j(x,p) = p$. Mamy wówczas następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & P \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad (4)$$

Diagram (4) jest zgodny, tzn. $g \circ j = f \circ i$, co wynika wprost z definicji zbioru T. Skoro f jest odwzorowaniem "na", to j jest także "na". Istotnie, dla każdego $p \in P$ wystarczy obrać $x \in X$ takie, że $f(x) = g(p)$. Wówczas $(x,p) \in T$ oraz $j(x,p) = p$.

Na mocy lematu 3 istnieje zbiór zwarty $Z \subset T$ taki, że $j|Z$ jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym oraz $j(Z) = P$. Na mocy lematu 4 $j|Z$ jest homeomorfizmem.

Niech $h = i \circ (j|Z)^{-1}$. Ze zgodności diagramu (4) wynika, że $f \circ h = g$.

Pokażemy teraz, że jeśli przestrzeń zwarta P jest projektywna, to jest ekstremalnie niespójna. Niech $e: P \longrightarrow P$ będzie identycznością (tzn. $e(p) = p$, dla $p \in P$) oraz niech $G_P: G(P) \longrightarrow P$ będzie odwzorowaniem Gleasona. Z projektywności P wynika, że istnieje odwzorowanie ciągłe $h: P \longrightarrow G(P)$ takie, że $G_P \circ h = e$. Odwzorowanie h jest różnowartościowe i "na", bo G_P jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym. Na mocy zwartości P, h jest homeomorfizmem. Przestrzeń P jest więc ekstremalnie niespójna; co kończy dowód.

Projektywność jest ważną własnością przestrzeni ekstremalnie niespójnych zwartych. Jednym z jej zastosowań jest następująca charakteryzacja odwzorowań Gleasona.

TWIERDZENIE 3. Jeśli odwzorowanie $f: Y \longrightarrow X$ jest nieprzywiedlne, $f(Y) = X$, przestrzenie X i Y są zwarte, a przestrzeń Y jest ekstremalnie niespójna, to istnieje homeomorfizm $h: Y \longrightarrow G(X)$ taki, że $f = G_X \circ h$.

Dowód. Z twierdzenia 2 wynika, że istnieje odwzorowanie ciągłe $h: Y \longrightarrow G(X)$ takie, że $f = G_X \circ h$. Z nieprzywiedlności odwzorowania G_X (patrz twierdzenie 1) i stąd, że $f(Y) = X$, wynika, że $h(Y) = G(X)$. Z nieprzywiedlności odwzorowania f wynika nieprzywiedlność odwzorowania h. Zatem, na mocy lematu 3, h jest homeomorfizmem.

TWIERDZENIE 4. Jeśli przestrzenie X i Y są zwarte oraz X ma odwzorowanie nieprzywiedlne na przestrzeń Y, to przestrzenie Gleasona $G(X)$ i $G(Y)$ są homeomorficzne.

Dowód wynika z twierdzenia 3 i stąd, że złożenie dwu odwzorowań nieprzywiedlnych jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym.

§ 5. Uzupełnienia algebr Boole'a

Podzbiór A algebry Boole'a B jest g ę s t y w B, jeśli dla każdego $u \in B - \{0_B\}$ istnieje $w \in A - \{0_B\}$ takie, że $w \leq u$. Homomorfizm $h : B \longrightarrow C$ będziemy nazywali z a n u r z e n i e m g ę s t y m algebry Boole'a B w algebrę Boole'a C, jeśli h jest monomorfizmem oraz zbiór $h(B)$ jest gęsty w C. Zanurzenie gęste algebry Boole'a w algebrę Boole'a zupełną nazywamy jej u z u p e ł n i e n i e m. Algebra Boole'a może mieć (z dokładnością do izomorfizmu) tylko jedno uzupełnienie. Istotnie, przypuśćmy, że $e_1 : B \longrightarrow B_1$ oraz $e_2 : B \longrightarrow B_2$ są uzupełnieniami algebry Boole'a B. Określmy odwzorowanie $h : B_1 \longrightarrow B_2$ następującym wzorem:

$$h(u) = \sup\{e_2(w) : \ w \in B \ \text{oraz} \ e_1(w) \leq u\},$$

gdzie supremum jest rozumiane w sensie porządku algebry B_2. Nietrudno sprawdzić, że h jest izomorfizmem oraz $h \circ e_1 = e_2$.

Uzupełnienie algebry Boole'a B będziemy oznaczali symbolem $e_B : B \longrightarrow B^c$, lub krótko B^c. Kwestię istnienia uzupełnienia rozstrzyga następujące twierdzenie MacNeille'a:

TWIERDZENIE 1 (H.M. M a c N e i l l e, 1937). Każda algebra Boole'a ma uzupełnienie.

Dowód. Niech B będzie algebrą Boole'a, a $S(B)$ jest przestrzenią Stone'a. Algebra $RO(S(B))$, zbiorów r.o. przestrzeni $S(B)$, jest zupełna (twierdzenie 2, rozdział I, § 4), a zbiór $CO(S(B))$ jest gęsty w $RO(S(B))$, bo przestrzeń $S(B)$ jest zero-wymiarowa. Zatem izomorfizm Stone'a $s : B \longrightarrow CO(S(B))$ wyznacza zanurzenie gęste algebry B w algebrę Boole'a zupełną $RO(S(B))$. Wystarczy przyjąć $B^c = RO(S(B))$.

Mówimy, że homomorfizm $h:B \longrightarrow C$ z a c h o w u j e k r e s y, jeśli spełnia następujący warunek: dla każdego zbioru $A \subset B$, jeśli u jest kresem górnym zbioru A w algebrze B, to $h(u)$ jest kresem górnym zbioru $h(A)$ w algebrze C. Łatwo widać, że izomorfizmy zachowują kresy. Nietrudno jednak podać przykłady homomorfizmów, które nie mają tej własności. Takim homomorfizmem jest naturalna projekcja $q: : P(\mathbb{N}) \longrightarrow P(\mathbb{N}) | Fin$, patrz rozdział II, § 1.

TWIERDZENIE 2. Uzupełnienia algebr Boole'a zachowują kresy.

Dowód. Niech B będzie algebrą Boole'a, $e:B \longrightarrow B^c$ uzupełnieniem algebry B, oraz niech $u \in B$ będzie kresem górnym zbioru $A \subset B$. Na mocy zupełności algebry B^c, zbiór $\{e(w) : w \in A\}$ ma kres górny $z \in B^c$. Skoro $w \leq u$, dla każdego $w \in A$, to $z \leq e(u)$. Przypuśćmy, że $e(u) - z \neq 0$. Skoro zbiór $e(B)$ jest gęsty w B^c, to istnieje $x \in B - \{0\}$ takie, że $e(x) \leq e(u) - z$. Dla każdego $w \in A$, $e(w) \wedge e(x) = 0$, bo $e(x) \wedge z = 0$ oraz $z = \sup\{e(w): w \in A\}$. Ponieważ e jest monomorfizmem, to $w \wedge \wedge x = 0$, dla każdego $w \in A$. Zatem $u \wedge x = 0$; sprzeczność, bo $e(x) \neq 0$ oraz $e(x) \leq e(u)$.

Mówimy, że algebra Boole'a B jest i n i e k t y w n a, jeśli dla każdych dwóch algebr Boole'a C i C' oraz homomorfizmu $g:C \longrightarrow B$ i monomorfizmu $f:C \longrightarrow C'$ istnieje homomorfizm $h:C' \longrightarrow B$ taki, że $h \circ f = g$, tzn. następujący diagram jest zgodny:

(1)
$$\begin{tikzcd} B & \\ C \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & C' \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd} .$$

Pojęcie iniektywności jest dwoiste do pojęcia projektywności w tym sensie, że algebra Boole'a B jest iniektywna wtedy i tylko wtedy, gdy jej przestrzeń Stone'a $S(B)$ jest projektywna. Wynika to z następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 3 (R. S i k o r s k i, 1948). Algebra Boole'a jest iniektywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna.

Dowód. Załóżmy, że algebra Boole'a B jest iniektywna. Niech $i: B \longrightarrow B$ będzie homomorfizmem identycznościowym (tzn. $i(u) = u$, dla $u \in B$) oraz niech $e: B \longrightarrow B^c$ będzie uzupełnieniem algebry B. Na mocy iniektywności algebry Boole'a B istnieje homomorfizm $h: B^c \longrightarrow B$ taki, że $h \circ e = i$. Łatwo zauważyć, że h musi być "na". Aby dowieść, że h jest izomorfizmem, wystarczy sprawdzić, że $\ker(h) = \{0\}$. Przypuśćmy, że $h(u) = 0$ oraz $u \neq 0$. Wówczas istnieje $w \in B - \{0\}$ takie, że $e(w) \leq u$. Zatem, $0 < w = h(e(w)) \leq h(u) = 0$, sprzeczność.

Załóżmy teraz, że algebra Boole'a B jest zupełna. Niech $g: C \longrightarrow B$ będzie homomorfizmem, a $f: C \longrightarrow C'$ monomorfizmem. Pokażemy, że istnieje homomorfizm $h: C' \longrightarrow B$ taki, że $h \circ f = g$ (patrz diagram (1)). Niech $s(g): S(B) \longrightarrow S(C)$ oraz $s(f): S(C') \longrightarrow S(C)$ będą odwzorowaniami ciągłymi indukowanymi przez homomorfizmy g i f (patrz twierdzenie 5, rozdział II, § 3). Skoro f jest monomorfizmem, to odwzorowanie $s(f)$ jest "na". Istotnie, w przeciwnym razie istniałby zbiór domknięto-otwarty $U \subset S(C)$ taki, że $U \neq \emptyset$ oraz $(s(f))^{-1}(U) = \emptyset$. Zatem $U \in \ker((s(f))^*) - \{0\}$; sprzeczność, bo $S_C \circ f = (s(f))^* \circ S_{C'}$, ($S_C$ i $S_{C'}$ oznaczają odpowiednie izomorfizmy Stone'a).

Skoro algebra Boole'a B jest zupełna, to jej przestrzeń Stone'a $S(B)$ jest ekstremalnie niespójna i zwarta. Zatem, na mocy twierdzenia Gleasona, $S(B)$ jest przestrzenią projektywną, tzn. istnieje odwzorowanie ciągłe $j: S(B) \longrightarrow S(C')$ takie, że $s(g) = s(f) \circ j$. Rozważmy diagram

$$
(2) \qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "S_B"] & CO(S(B)) & \\
 & CO(S(C)) \arrow[u, "(s(g))^*"] \arrow[r, "(s(f))^*"'] & CO(S(C')) \arrow[ul, "j^*"'] \\
C \arrow[uu, "g"] \arrow[ur, "S_C"] \arrow[rr, "f"] & & C' \arrow[u, "S_{C'}"']
\end{tikzcd}
$$

obrazujący następujące równości: $(s(g))^* = j^* \circ (s(f))^*$, $S_B \circ g = (s(g))^* \circ S_C$ oraz $S_{C'} \circ f = (s(f))^* \circ S_{C'}$. Z diagramu (2) łatwo odczytać, że $g = (S_B)^{-1} \circ j^* \circ S_{C'} \circ f$. Jeśli przyjmiemy $(S_B)^{-1} \circ j^* \circ S_{C'} = h$, to $g = h \circ f$, co kończy dowód.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia Sikorskiego jest następujące

TWIERDZENIE 4. Jeśli C jest algebrą Boole'a zupełną, to dla każdego homomorfizmu $g: B \longrightarrow C$ istnieje homomorfizm $h: B^C \longrightarrow C$ taki, że $h \circ e = g$, gdzie $e: B \longrightarrow B^C$ jest uzupełnieniem algebry Boole'a B.

III. Uzupełnienia z teorii zbiorów

§ 1. O liczbach porządkowych i kardynalnych

Celem tego paragrafu jest przegląd tych pojęć i twierdzeń teorii liczb porządkowych i kardynalnych, które będą wykorzystywane w dalszej części skryptu. Dowody twierdzeń, które tu pomijamy, oraz pełny wykład tej teorii Czytelnik znajdzie np. w monografii K. Kuratowskiego i A. Mostowskiego (1978) oraz w książkach T. Jecha (1973) i (1978).

Liczbą porządkową nazywamy każdy zbiór ξ spełniający warunki:

(1) jeśli $\eta \in \sigma$ i $\sigma \in \xi$, to $\eta \in \xi$,

(2) jeśli $\eta, \sigma \in \xi$, to $\eta = \sigma$ lub $\eta \in \sigma$ lub $\sigma \in \eta$,

(3) jeśli $x \subset \xi$ oraz $x \neq \emptyset$, to istnieje element $\eta \in x$ taki, że $\eta \cap x = \emptyset$.

Jak widać z definicji, zbiór pusty jest liczbą porządkową. Jeśli ξ jest liczbą porządkową, to zbiór $\xi \cup \{\xi\}$ jest także liczbą porządkową. Suma zbioru liczb porządkowych jest liczbą porządkową.

Z definicji widać, że każda liczba porządkowa jest zbiorem dobrze uporządkowanym przez relację "$\in$". Własność (1) wyraża przechodniość relacji "$\in$", własność (2) spójność, a własność (3) jest specyficzna dla dobrego porządku. Stąd symbol "$\in$" będzie zastępowany także symbolem "$<$". Dla każdych dwóch różnych liczb porządkowych η i ξ, $\eta < \xi$ lub $\xi < \eta$. W każdym zbiorze liczb porządkowych istnieje liczba najmniejsza.

Jeśli ξ jest liczbą porządkową oraz $\eta \in \xi$, to η jest także liczbą porządkową. Stąd wynika, że każda liczba porządkowa jest równa zbiorowi liczb porządkowych mniejszych od niej.

Nietrudno dowieść, że każdy zbiór dobrze uporządkowany jest izomorficzny z dokładnie jedną liczbą porządkową. Stąd wynika, że przytoczona tu definicja liczby porządkowej jest równoważna bardziej tradycyjnej definicji poprzez typy porządkowe, którą można znaleźć np. w cytowanej już książce K. Kuratowskiego i A. Mostowskiego.

Liczbę porządkową postaci $\xi \cup \{\xi\}$ będziemy nazywali n a s t ę p n i k i e m l i c z b y ξ i oznaczali symbolem $\xi + 1$. Liczbę porządkową, która nie jest następnikiem żadnej liczby porządkowej, nazywamy l i c z b ą p o r z ą d k o w ą g r a n i c z n ą. Najmniejszą liczbę porządkową graniczną niezerową oznaczamy symbolem ω. Typ porządkowy liczby ω jest taki sam jak typ porządkowy zbioru liczb naturalnych.

Jeśli A jest zbiorem liczb porządkowych, to sup(A) oznacza kres górny zbioru A, tzn. sup(A) jest najmniejszą wśród tych liczb porządkowych, które są nie mniejsze od każdej liczby zbioru A. Jeśli ξ jest liczbą porządkową graniczną, to $\xi = \sup\{\eta : \eta$ jest liczbą porządkową i $\eta < \xi\}$.

L i c z b a k a r d y n a l n a to taka liczba porządkowa, która nie jest równoliczna z żadną liczbą porządkową mniejszą od niej. Nietrudno zauważyć, że każda liczba kardynalna nieskończona jest liczbą porządkową graniczną. Dla każdego zbioru A istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna $|A|$ równoliczna ze zbiorem A ; liczbę $|A|$ nazywamy m o c ą z b i o r u A.

Niech $\{\alpha_i : i \in I\}$ będzie zbiorem liczb kardynalnych. I l o c z y n e m l i c z b α_i nazywamy liczbę $|\Pi\{\alpha_i : i \in I\}|$, oznaczając ją symbolem $\Pi\{\alpha_i : i \in I\}$ (w ten sposób iloczyn liczb kardynalnych i iloczyn kartezjański zbiorów oznaczamy tym samym symbolem Π, co jednak nie powinno prowadzić do nieporozumień). Sumą liczb α_i nazywamy liczbę $|\bigcup\{\alpha_i \times \{i\} : i \in I\}|$, oznaczając ją symbolem $\Sigma\{\alpha_i : i \in I\}$. Łatwo sprawdzić, że jeśli $\alpha_i > 1$, to

(4) $\Sigma\{\alpha_i : i \in I\} \le \Pi\{\alpha_i : i \in I\}$.

Iloczyn dwóch liczb kardynalnych α i β oznaczamy symbolem $\alpha\cdot\beta$, a ich sumę symbolem $\alpha+\beta$.

Dla każdej liczby kardynalnej nieskończonej α jest prawdziwy wzór

(5) $\alpha\cdot\alpha=\alpha$.

Stąd wynika, że jeśli α i β są liczbami kardynalnymi nieskończonymi, to

(6) $\alpha\cdot\beta=\alpha+\beta=\max\{\alpha,\beta\}$.

Symbolem ${}^{A}B$ będziemy oznaczali zbiór wszystkich funkcji określonych na zbiorze A i przyjmujących wartości w zbiorze B. Jeśli λ i μ są liczbami kardynalnymi, to liczbę kardynalną $|{}^{\lambda}\mu|$ będziemy oznaczali symbolem μ^{λ} i czytali "μ do potęgi λ". Jeśli α, β i τ są liczbami kardynalnymi, to

(7) $(\alpha^{\beta})^{\tau}=\alpha^{\beta\cdot\tau}$,

(8) jeśli $\alpha<\beta$, to $\alpha^{\tau}\le\beta^{\tau}$,

(9) jeśli $\alpha<\beta$, to $\tau^{\alpha}\le\tau^{\beta}$.

Dla każdej liczby kardynalnej α symbolem α^{+} oznaczamy najmniejszą liczbę kardynalną większą niż α i nazywamy *następnikiem liczby kardynalnej* α. Liczbę kardynalną, która nie jest następnikiem żadnej liczby kardynalnej, nazywamy *liczbą kardynalną graniczną*. Dla każdych dwóch liczb kardynalnych nieskończonych λ i τ jest prawdziwy wzór Hausdorffa:

(10) $(\lambda^{+})^{\tau}=\lambda^{+}\cdot\lambda^{\tau}$.

Dla każdej liczby porządkowej granicznej α, liczbę porządkową

$$\mathrm{cf}(\alpha)=\min\{|A| : A\subset\alpha \text{ i } \sup(A)=\alpha\}$$

będziemy nazywali *kofinalnością liczby* α. Oczywiście $\mathrm{cf}(\alpha)\le\alpha$ oraz $\mathrm{cf}(\alpha)$ jest liczbą kardynalną. Jeśli $\mathrm{cf}(\alpha)=\alpha$, to liczbę kardynalną α nazywamy *regularną*. Liczby kardynalne, które nie są regularne, nazywamy *singularnymi*. Liczby kardynalne postaci α^{+} są regularne, co wynika wprost ze wzoru (5).

Jeśli A jest zbiorem liczb kardynalnych, to $\sup(A)$ jest liczbą kardynalną. Jeśli ponadto elementy zbioru A są liczbami nieskończonymi, to

(11) $\sum\{\alpha : \alpha \in A\} = |A| \cdot \sup(A)$.

Następujące dwa twierdzenia są już bardziej specjalne.

TWIERDZENIE 1. Niech λ i $\varkappa$ będą liczbami kardynalnymi oraz niech $\lambda^{\underline{\varkappa}} = \sum\{\lambda^{\tau} : \tau$ jest liczbą kardynalną i $\tau < \varkappa\}$. Wówczas mamy wzór

(12) $\lambda^{\underline{\varkappa}} = (\lambda^{\underline{\varkappa}})^{\underline{cf(\varkappa)}}$.

Dowód. Wykażemy wpierw, że

(13) $\varkappa \leq \sup\{\lambda^{\tau} : \tau$ jest liczbą kardynalną i $\tau < \varkappa\}$.

Jeśli $\varkappa$ jest liczbą graniczną, to $\varkappa = \sup\{\tau : \tau$ jest liczbą kardynalną i $\tau < \varkappa\}$. Wówczas nierówność (13) wynika stąd, że $\tau \leq \lambda^{\tau}$, dla każdego $\tau < \varkappa$ (zakładamy, że $\lambda \geq 2$). Jeśli $\varkappa = \tau^{+}$, to $\varkappa \leq 2^{\tau} \leq \lambda^{\tau}$. Nierówność (13) jest wtedy oczywista.

Z własności (12) i (13) wynika, że

(14) $\lambda^{\underline{\varkappa}} = \sup\{\lambda^{\tau} : \tau$ jest liczbą kardynalną i $\tau < \varkappa\}$.

Jeśli w równości (14) w miejsce λ postawimy $\lambda^{\underline{\varkappa}}$, a $cf(\varkappa)$ w miejsce $\varkappa$, to otrzymamy:

(15) $(\lambda^{\underline{\varkappa}})^{\underline{cf(\varkappa)}} = \sup\{(\lambda^{\underline{\varkappa}})^{\mu} : \mu$ jest liczbą kardynalną oraz $\mu < cf(\varkappa)\}$.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy zatem sprawdzić, że

(16) $(\lambda^{\underline{\varkappa}})^{\mu} = \lambda^{\underline{\varkappa}}$ dla $\mu < cf(\varkappa)$.

Ustalmy funkcję $f : \mu \to \lambda^{\underline{\varkappa}}$. Na mocy wzoru (14) dla każdego $\xi < \mu$ istnieje liczba kardynalna $\tau_{\xi} < \varkappa$ taka, że $f(\xi) \in \lambda^{\tau_{\xi}}$. Skoro $\mu < cf(\varkappa)$, to $\sigma = \sup\{\tau_{\xi} : \xi < \mu\} < \varkappa$. Zatem istnieje $\sigma < \varkappa$ takie, że $f(\xi) \in \lambda^{\sigma}$ dla każdego $\xi \in \mu$, czyli funkcja f odwzorowuje μ w λ^{σ}. Z warunku (14) otrzymujemy więc równość (16), co kończy dowód.

TWIERDZENIE 2 (B. Balcar, F. Franěk, 198*). Jeśli $\{X_i : i \in I\}$ jest rodziną zbiorów nieskończonych, to istnieje zbiór $S \subset$

$\subset \Pi\{X_i : i \in I\}$ taki, że $|S| = |\Pi\{X_i : i \in I\}|$, oraz dla każdego zbioru skończonego $S' \subset S$ istnieje $i \in I$ takie, że $x(i) \neq y(i)$ dla dowolnych $x, y \in S'$, $x \neq y$.

Dowód. Jeśli zbiór I jest skończony, to istnieje $i \in I$ takie, że $|X_i| = |\Pi\{X_j : j \in I\}|$. Wówczas jako S można przyjąć dowolny podzbiór zbioru $\Pi\{X_j : j \in I\}$ taki, że $x(i) \neq y(i)$ dla $x, y \in S$ takich, że $x \neq y$.

Wobec tego możemy zakładać, że $|I| = \varkappa \geq \omega$. Dowód będzie indukcyjny. Zakładamy zatem, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdego zbioru I' takiego, że $|I'| < \varkappa$. Rozbijamy zbiór I na klasy równoważności względem następującej relacji ϱ :

$$i \varrho j \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } |X_i| = |X_j|.$$

Każdą z klas równoważności uporządkujemy za pomocą relacji dobrego porządku. W zbiorze I wprowadzamy teraz relację "$<$" następująco: $i < j$ jeśli $|X_i| < |X_j|$ lub $|X_i| = |X_j|$ oraz i jest mniejsze od j w sensie porządku w klasie równoważności elementu i. Otrzymany w ten sposób dobry porządek w zbiorze I ma następującą własność:

(17) jeśli $i < j$, to $|X_i| \leq |X_j|$.

Niech α będzie typem porządkowym zbioru I, tzn. α jest izomorficzna ze zbiorem I (w porządku "$<$" określonym wcześniej). Skoro $|I| = \varkappa$, to $\varkappa \leq \alpha < \varkappa^+$. Rozważmy dwa przypadki:

Przypadek 1. Dla każdego $\xi < \alpha$, $|\alpha - \xi| = \varkappa$. Wówczas niech Z oznacza zbiór wszystkich skończonych i niepustych podzbiorów zbioru α. Pokażemy, że istnieje funkcja różnowartościowa $f : Z \longrightarrow \alpha$ taka, że

(18) $f(F) \geq \max(F)$ dla każdego $F \in Z$.

Skoro $|Z| = |\alpha| = \varkappa$, to Z można przedstawić w postaci $Z = \{F_\xi : \xi < \varkappa\}$. Załóżmy, że $f(F_\xi)$ jest już określone dla każdego $\xi < \eta < \varkappa$. Wówczas obierzmy $f(F_\eta)$ tak, aby $f(F_\eta) \notin \{f(F_\xi) : \xi < \eta\}$ oraz $f(F_\eta) \geq \max(F_\eta)$. Wybór taki jest możliwy, bo $|\{f(F_\xi) : \xi < \eta\}| < \varkappa$ oraz $|\alpha - \max(F_\eta)| = \varkappa$.

Na mocy warunków (17) i (18) dla każdego $F \in Z$ i dowolnego $i \in F$, $|X_i| \leq |X_{f(F)}|$, a zatem istnieje funkcja różnowartościowa $g_F : \prod\{X_i : i \in F\} \longrightarrow X_{f(F)}$. Dla każdego $i \in I$ wybieramy $c_i \in X_i$. Funkcję $h : \prod\{\prod\{X_i : i \in F\} : F \in Z\} \longrightarrow \prod\{X_i : i \in \alpha\}$ określamy następującym wzorem:

$$(19)\quad h(x)(i) = \begin{cases} c_i & \text{jeśli nie istnieje } F \in Z \text{ takie, że } i = f(F), \\ g_F(x(F)) & \text{jeśli } i = f(F), \end{cases}$$

gdzie $h(x)(i)$ jest i-tą współrzędną punktu $h(x)$. Definicja ta jest poprawna, bo funkcja f jest różnowartościowa. Łatwo sprawdzić, że skoro funkcje g_F są różnowartościowe, to funkcja h jest także różnowartościowa.

Określmy jeszcze funkcję $k : \prod\{X_i : i \in \alpha\} \longrightarrow \prod\{\prod\{X_i : i \in F\} : F \in Z\}$ wzorem:

$$(20)\quad k(x)(F)(i) = x(i),$$

gdzie $x \in \prod\{X_i : i \in \alpha\}$, $F \in Z$ oraz $i \in F$. Łatwo sprawdzić, że k jest funkcją różnowartościową.

Niech $S = h(k(\prod\{X_i : i \in I\}))$. Skoro funkcje h oraz k są różnowartościowe, to $|S| = |\prod\{X_i : i \in I\}|$. Pokażemy, że zbiór S ma żądaną własność. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą różnymi punktami ze zbioru S. Z różnowartościowości funkcji $h \circ k$ wynika, że istnieje n różnych elementów $y_1, \ldots, y_n$ takich, że $x_p = h(k(y_p))$ dla $p \leq n$. Skoro funkcje $y_1, \ldots, y_n$ są różne między sobą, to istnieje zbiór $F \in Z$ taki, że $y_p|F \neq y_q|F$ dla $p \neq q$. Zatem, na mocy (20), $k(y_p)(F) \neq k(y_q)(F)$ dla $p \neq q$. Skoro g_F jest funkcją różnowartościową oraz $k(y_p)(F) \in \prod\{X_i : i \in F\}$, dla $p \leq n$, to

$$g_F(k(y_p)(F)) \neq g_F(k(y_q)(F)), \quad \text{dla } p \neq q.$$

Niech $i = f(F)$. Na mocy (19) mamy:

$$h(k(y_p))(i) \neq h(k(y_q))(i), \quad \text{dla} \quad p \neq q.$$

Zatem, $x_p(i) \neq x_q(i)$, dla $p \neq q$.

Przypadek 2. Istnieje $\xi < \alpha$ takie, że $|\alpha - \xi| < \varkappa$. Niech $\delta = \min\{\xi < \alpha : |\alpha - \xi| < \varkappa\}$. Wówczas dla każdego $\xi < \delta$, $|\delta - \xi| = \varkappa$. Jeśli $|\Pi\{X_i : i \in \alpha\}| = |\Pi\{X_i : i \in \delta\}|$, to dowód sprowadzamy do przypadku 1. Jeśli $|\Pi\{X_i : i \in \alpha\}| = |\Pi\{X_i : i \in \alpha - \delta\}|$, to stosujemy założenie indukcyjne.

§ 2. O zbiorach stacjonarnych

Niech $\varkappa$ będzie liczbą kardynalną regularną i nieprzeliczalną (tzn. $\varkappa \geqslant \omega$). Zbiór $x \subset \varkappa$ jest domknięty i nieograniczony, jeśli spełnia następujące warunki:

(1) jeśli $y \subset x$ i $|y| < \varkappa$, to $\sup(y) \in x$ (tzn. zbiór x jest domknięty),

(2) $\sup(x) = \varkappa$ (tzn. zbiór x jest nieograniczony).

Na przykład, zbiór liczb porządkowych granicznych mniejszych niż $\varkappa$ jest domknięty i nieograniczony w $\varkappa$.

TWIERDZENIE 1. Niech $\varkappa$ będzie liczbą kardynalną regularną $\varkappa \geqslant \omega_1$ oraz niech $f : \varkappa \longrightarrow \varkappa$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki:

(a) jeśli $\alpha \leqslant \beta < \varkappa$, to $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$,

(b) jeśli $A \subset \alpha$ oraz $\alpha = \sup(A)$, to $f(\alpha) = \sup\{f(\xi) : \xi \in A\}$,

(c) dla każdego $\alpha < \varkappa$ istnieje $\beta < \varkappa$ takie, że $\alpha \leqslant \beta$ oraz $\beta \leqslant f(\beta)$.

Wówczas zbiór $\{\xi < \varkappa : f(\xi) = \xi\}$ jest domknięty i nieograniczony w $\varkappa$.

Dowód. Niech $x = \{\xi < \varkappa : f(\xi) = \xi\}$. Domkniętość zbioru x wynika wprost z warunku (b). Dla dowodu nieograniczoności ustalmy $\alpha < \varkappa$. Na mocy (c) istnieje $\beta < \varkappa$ takie, że $\alpha \leqslant \beta$ oraz $f(\beta) \geqslant \beta$. Rozważmy ciąg $\{\xi_n : n < \omega\}$ określony wzorem:

$$\xi_0 = \beta,$$
$$\xi_{n+1} = f(\xi_n).$$

Niech $\eta = \sup\{\xi_n : n<\omega\}$. Skoro $cf(\varkappa) = \varkappa > \omega$, to $\eta < \varkappa$. Pokażemy, że $f(\eta) = \eta$. Skoro $\xi_0 = \beta \leq f(\beta) = \xi_1$ oraz $f(\xi_n) = \xi_{n+1}$, to na mocy (a) ciąg $\{\xi_n : n<\omega\}$ jest rosnący, tzn. $\xi_n \leq \xi_{n+1}$ dla $n<\omega$. Jeśli ciąg $\{\xi_n : n<\omega\}$ jest od pewnego miejsca stały, to dla pewnego $n<\omega$ $f(\xi_n) = \xi_n$, co kończy dowód. W przeciwnym wypadku, stosując warunek (a), otrzymujemy:

$$f(\eta) = \sup\{f(\xi_n) : n<\omega\} = \sup\{\xi_{n+1} : n<\omega\} = \eta,$$

co także kończy dowód.

Zauważmy, że warunek (c) nie może być pominięty w założeniach twierdzenia 1. Istotnie, każda funkcja stała spełnia warunki (a) i (b), a jej zbiór punktów stałych jest jednoelementowy. Jeśli w warunku (a) nierówności "$\leq$" zastąpić nierównościami "$<$", to warunek (c) można z założeń usunąć.

Jeśli $\varkappa \geq \omega_1$ jest liczbą kardynalną regularną, to zbiór $S \subset \varkappa$ nazywamy s t a c j o n a r n y m, jeśli $S \cap x \neq \emptyset$ dla każdego zbioru x domkniętego i nieograniczonego w $\varkappa$.

Zbiory domknięte i nieograniczone są stacjonarne. Wynika to z następującego lematu:

LEMAT 1. Jeśli zbiory $x, y \subset \varkappa$ są domknięte i nieograniczone, to $x \cap y$ jest zbiorem domkniętym i nieograniczonym.

Dowód. Domkniętość zbioru $x \cap y$ jest oczywista. Dla dowodu nieograniczoności ustalmy $\alpha < \varkappa$. Skoro zbiory x oraz y są nieograniczone, to istnieje ciąg $\{\xi_n : n<\omega\}$ taki, że

(3) $\alpha < \xi_n < \xi_{n+1} < \varkappa$, dla $n<\omega$,

(4) jeśli n jest parzyste, to $\xi_n \in x$, a jeśli n jest nieparzyste, to $\xi_n \in y$.

Niech $\eta = \sup\{\xi_n : n<\omega\}$. Skoro $cf(\varkappa)>\omega$, to $\eta<\varkappa$. Na mocy (3) $\alpha<\eta$. Z (3) i (4) oraz z domkniętości x i y wynika, że $\eta \in x \cap y$.

Z powyższego lematu wynika także, że zbiory niestacjonarne (tzn. takie, które nie są stacjonarne) tworzą ideał w algebrze $P(\varkappa)$. Z kolejnego lematu wyniknie, że jest to ideał $\varkappa$-zupełny, co znaczy, że jeśli $\{A_\xi : \xi<\tau\}$ (gdzie $\tau<\varkappa$) jest rodziną zbiorów niestacjonarnych, to $\bigcup\{A_\xi : \xi<\tau\}$ jest także zbiorem niestacjonarnym.

LEMAT 2. Jeśli $\varkappa > \omega_1$ jest liczbą kardynalną regularną, $\tau<\varkappa$ oraz $\{x_\xi : \xi<\tau\}$ jest rodziną zbiorów domkniętych nieograniczonych w $\varkappa$, to $\bigcap\{x_\xi : \xi<\tau\}$ jest zbiorem domkniętym nieograniczonym w $\varkappa$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na τ. Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla każdego ciągu $\{x_\xi : \xi<\eta\}$, gdzie $\eta<\tau$ (η i τ są liczbami porządkowymi). Wykażemy prawdziwość lematu dla każdego ciągu długości τ.

Jeśli τ jest liczbą kardynalną postaci $\eta+1$, to teza wynika z lematu 1. Jeśli τ jest liczbą porządkową graniczną, to rozważmy zbiory $y_\xi = \bigcap\{x_\sigma : \sigma<\xi\}$, dla $\xi<\tau$. Z założenia indukcyjnego wynika, że zbiory y_ξ są domknięte nieograniczone i $\bigcap\{y_\xi : \xi<\tau\} = \bigcap\{x_\xi : \xi<\tau\}$.

Domkniętość zbioru $\bigcap\{y_\xi : \xi<\tau\}$ jest oczywista. Dla dowodu jego nieograniczoności ustalmy $\alpha<\varkappa$. Metodą indukcji pozaskończonej konstruujemy ciąg $\{\alpha_\xi : \xi<\tau\} \subset \varkappa$ taki, że

(3) $\alpha_0 = \alpha$,

(4) $\sup\{\alpha_\sigma : \sigma<\xi\} < \alpha_\xi$ dla $\xi<\tau$,

(5) $\alpha_\xi \in y$ dla $\xi<\tau$.

Konstrukcja taka jest możliwa, bo $\varkappa$ jest liczbą regularną, a zbiory y_ξ są domknięte i nieograniczone. Niech $\beta = \sup\{\alpha_\xi : \xi<\tau\}$. Skoro $\tau<\varkappa = cf(\varkappa)$, to $\beta<\varkappa$. Z warunków (3) i (4) wynika, że $\alpha<\beta$. Ponieważ $y_\xi \subset y_\eta$, dla $\eta<\xi$, więc na mocy warunków (4) i (5) $\beta \in y_\xi$ dla każdego $\xi<\tau$. Zatem $\beta \in \bigcap\{x_\xi : \xi<\tau\}$, co kończy dowód.

Przedstawimy teraz twierdzenie Ulama-Fodora, które zostało sformułowane w pracy G. Fodora (1966), a którego dowód oparty jest na konstrukcji podanej przez S. Ulama (1930).

TWIERDZENIE 2. Każdy podzbiór stacjonarny zbioru ω_1 można przedstawić w postaci sumy rodziny mocy ω_1 złożonej ze zbiorów stacjonarnych rozłącznych.

Dowód. Niech $S\subset\omega_1$ będzie zbiorem stacjonarnym. Dla każdego $\alpha < \omega_1$ $\alpha\geq\omega$ obierzmy funkcję $f_\alpha : \omega \to \alpha$ różnowartościową i "na"; funkcja taka istnieje, bo $|\alpha| = \omega$. Dla dowolnych $n<\omega$ i $\xi<\omega_1$ rozważmy zbiory:

$$(6) \quad A^n_\xi = S\cap\{\alpha<\omega_1 : f_\alpha(n) = \xi\}.$$

Ustalmy $\xi<\omega_1$ i zauważmy, że

$$\bigcup\{A^n_\xi : n<\omega\} = S\cap\{\alpha<\omega_1 : \alpha>\xi\},$$

co wynika stąd, że f_α przeprowadza zbiór ω na α. Zatem zbiór $\bigcup\{A^n_\xi : n<\omega\}$ jest stacjonarny. Na mocy lematu 2 istnieje $n(\xi)<\omega$ takie, że $A^{n(\xi)}_\xi$ jest zbiorem stacjonarnym. Skoro ω_1 jest liczbą regularną, to istnieje liczba $n_0<\omega$ taka, że zbiór $Z = \{\xi<\omega_1 : n(\xi) = n_0\}$ ma moc ω_1. Z określenia (6) wynika wprost, że jeśli $\xi\neq\eta$, to $A^n_\xi\cap A^n_\eta = \emptyset$. Zatem $\{A^{n_0}_\xi : \xi\in Z\}$ jest rodziną mocy ω_1 rozłącznych zbiorów stacjonarnych zawartych w S, co kończy dowód.

Jeśli $\{x_\alpha : \alpha<\varkappa\}$ jest rodziną zbiorów domkniętych i nieograniczonych w $\varkappa$, gdzie $\varkappa$ jest liczbą kardynalną regularną nieprzeliczalną, to iloczynem przekątniowym zbiorów x_α nazywamy zbiór:

$$(7) \quad \Delta\{x_\alpha : \alpha<\varkappa\} = \{\xi<\varkappa : \xi\in\bigcap\{x_\eta : \eta<\xi\}\}.$$

LEMAT 3. Jeśli $\varkappa>\omega_1$ jest liczbą kardynalną regularną, a $\{x_\alpha : \alpha<\varkappa\}$ jest rodziną zbiorów domkniętych i nieograniczonych w $\varkappa$, to zbiór $\Delta\{x_\alpha : \alpha<\varkappa\}$ jest domknięty i nieograniczony w $\varkappa$.

Dowód. Dla każdego $\xi<\varkappa$ rozważmy zbiory:

$$(8) \quad y_\xi = \bigcap\{x_\eta : \eta<\xi\}\cap\{\eta<\varkappa : \eta\geq\xi\}.$$

Na mocy lematu 2 są one domknięte i nieograniczone. Określmy funkcję $f: \varkappa \to \varkappa$ następującym wzorem:

(9) $f(\xi) = \min(y_\xi)$, dla $\xi < \varkappa$.

Z warunków (7) i (8) wynika, że $\Delta\{x_\alpha : \alpha < \varkappa\} = \{\xi < \varkappa : f(\xi) = \xi\}$. Zatem wystarczy sprawdzić, że funkcja f spełnia warunki (a), (b) i (c) twierdzenia 1.

Warunek (a) wynika stąd, że $\alpha \leq \beta$ implikuje $y_\beta \subset y_\alpha$.

Aby sprawdzić (b), ustalmy zbiór $A \subset \alpha$ taki, że $\alpha = \sup(A)$. Wówczas, na mocy (8), $y_\alpha = \bigcap\{y_\eta : \eta \in A\}$. Skoro $f(\eta) \in y_\eta$ oraz zbiór y_α jest domknięty i nieograniczony, to $\sup\{f(\eta) : \eta \in A\} \in y_\alpha$, czyli $f(\alpha) \leq$ $\leq \sup\{f(\eta) : \eta \in A\}$. Nierówność przeciwna wynika z (a) i stąd, że $\eta < \alpha$ dla każdego $\eta \in A$.

Warunek (c) wynika wprost z określenia funkcji f. Zatem, na mocy twierdzenia 1, zbiór $\{\alpha : f(\alpha) = \alpha\}$ jest domknięty i nieograniczony, co kończy dowód.

Funkcję $f: S \to \varkappa$, gdzie $S \subset \varkappa$, będziemy nazywali regresywną na S, jeśli $f(\xi) < \xi$ dla każdego $\xi \in S$. P. S. A l e k s a n d r o w i P. S. U r y s o h n (1929) udowodnili, że jeśli $f: \omega_1 - \{0\} \to \omega_1$ jest funkcją regresywną, to istnieje liczba $\alpha < \omega_1$ taka, że $|f^{-1}(\{\xi\})| = \omega_1$. Następne twierdzenie jest wzmocnieniem tego faktu.

TWIERDZENIE 3 (G. F o d o r, 1966). Jeśli $\varkappa \geq \omega_1$ jest liczbą kardynalną regularną, $S \subset \varkappa$ jest zbiorem stacjonarnym, a $f: S \to \varkappa$ funkcją regresywną na S, to istnieje zbiór stacjonarny $S' \subset S$ taki, że $f|S'$ jest funkcją stałą.

Dowód. Przypuśćmy, że dla każdego $\xi < \varkappa$ zbiór $Z_\xi = \{\alpha < \varkappa : f(\alpha) = \xi\}$ jest niestacjonarny. Wówczas, dla każdego $\xi < \varkappa$ istnieje zbiór domknięty i nieograniczony x_ξ taki, że $x_\xi \cap Z = \emptyset$. Na mocy lematu 3 zbiór $\Delta\{x_\xi : \xi < \varkappa\}$ jest domknięty i nieograniczony. Zatem istnieje $\eta < \varkappa$ takie, że $\eta \in S \cap \Delta\{x_\xi : \xi < \varkappa\}$. Skoro $f(\eta) < \eta$, to na mocy określenia (7) $\eta \in x_{f(\eta)}$. Ponieważ $x_{f(\eta)} \cap Z_{f(\eta)} = \emptyset$, otrzymujemy sprzeczność.

LEMAT 1. Jeśli $\mathcal{H}$ jest liczbą kardynalną regularną nieprzeliczalną, a R jest rodziną mocy $\mathcal{H}$ zbiorów n-elementowych, $n<\omega$, to istnieje rodzina $R' \subset R$ i zbiór Z takie, że $|R'| = |R|$ oraz dla każdych dwóch różnych elementów $A, B \in R'$, $A \cap B = Z$.

Dowód. Jeśli $n = 1$, to R składa się ze zbiorów co najwyżej jednopunktowych, więc teza lematu jest w tym przypadku oczywista.

Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla każdej rodziny mocy $\mathcal{H}$ zbiorów $(n-1)$-elementowych. Niech R będzie rodziną mocy $\mathcal{H}$ zbiorów n-elementowych i niech $R_1 \subset R$ będzie maksymalną rodziną rozłączną zawartą w R (istnienie rodziny R_1 wynika z lematu Kuratowskiego--Zorna). Jeśli $|R_1| = \mathcal{H}$, to lemat jest już udowodniony. Możemy więc założyć, że $|R_1| = \tau < \mathcal{H}$. Dla każdego $A \in R_1$ niech $R(A) = \{B \in R : A \cap B \neq \emptyset\}$. Z maksymalności rodziny R_1 wynika, że $\bigcup\{R(A) : A \in R_1\} = R$. Skoro $\tau < \mathcal{H} = \mathrm{cf}(\mathcal{H})$, to istnieje $A \in R_1$ takie, że $|R(A)| = \mathcal{H}$. Niech $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Istnieje rodzina $R_2 \subset R(A)$ oraz $a_k \in A$ takie, że $|R_2| = \mathcal{H}$ oraz $a_k \in B$, dla każdego $B \in R_2$.

Rozważmy rodzinę $P = \{B - \{a_k\} : B \in R_2\}$. Ponieważ $|P| = \mathcal{H}$, a elementami rodziny P są zbiory $(n-1)$-elementowe, więc istnieje rodzina $P_1 \subset P$ i zbiór Z takie, że $|P_1| = \mathcal{H}$ oraz $C \cap D = Z$, dla $C, D \in P_1$, $C \neq D$. Niech $R' = \{B \in R_2 : B - \{a_k\} \in P_1\}$ i niech $Z' = Z \cup \{a_k\}$. Łatwo widać, że $R' \subset R$, $|R'| = \mathcal{H}$, oraz dla każdych $B, C \in R'$ jeśli $B \neq C$, to $B \cap C = Z'$.

TWIERDZENIE 1 (E. M a r c z e w s k i - S z p i l r a j n, 1941; N. A. S z a n i n 1946). Jeśli R jest rodziną zbiorów skończonych, a $|R|$ jest liczbą kardynalną regularną nieprzeliczalną, to istnieje rodzina $R' \subset R$ i zbiór Z takie, że $|R'| = |R|$ oraz dla każdych dwóch różnych elementów $A, B \in R'$, $A \cap B = Z$.

Dowód. Dla każdego $n < \omega$, niech $R_n = \{A \in R : |A| = n\}$. Skoro $R = \bigcup\{R_n : n < \omega\}$ oraz $|R|$ jest liczbą regularną nieprzeliczalną, to istnieje $n<\omega$ takie, że $|R_n| = |R|$. Twierdzenie zostało więc sprowadzone do lematu 1.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia Marczewskiego-Szanina jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2. Niech F będzie rodziną funkcji określonych na zbiorach skończonych i przyjmujących wartości w zbiorze $\{-1,1\}$. Jeśli $|F|$ jest liczbą regularną nieprzeliczalną, to istnieje rodzina $F'\subset F$ oraz zbiór Z takie, że $|F'| = |F|$ i spełniony jest warunek:

(1) jeśli $f,g\in F'$ i $f \neq g$, to $\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g) = Z$ oraz $f|Z = g|Z$,

gdzie $\mathrm{dom}(f)$ oznacza dziedzinę funkcji f.

Dowód. Niech $R = \{\mathrm{dom}(f) : f\in F\}$. Skoro F jest rodziną nieskończoną, a dziedziny funkcji ze zbioru F są zbiorami skończonymi, to $|R| = |F|$. Na mocy twierdzenia 1 istnieje zbiór skończony Z i rodzina $R'\subset R$ o tej własności, że $|R'| = |R|$ oraz $A\cap B = Z$ dla $A,B\in R'$, $A\neq B$. Zbiór funkcji określonych na Z i przyjmujących wartości w zbiorze $\{-1,1\}$ jest skończony. Zatem istnieje funkcja $h: Z\to\{-1,1\}$ oraz zbiór funkcji $F'\subset F$ o tej własności, że $|F'| = |F|$, $\{\mathrm{dom}(f) : f\in F'\}\subset R'$ oraz $f|Z = h$, dla każdego $f\in F$.

TWIERDZENIE 3 (E. M a r c z e w s k i - S z p i l r a j n, 1941). Każda rodzina zbiorów otwartych rozłącznych w $D^{\varkappa}$ jest co najwyżej przeliczalna.

Dowód. Przypuśćmy, że P jest rodziną mocy ω_1 zbiorów otwartych rozłącznych (niepustych) w przestrzeni $D^{\varkappa}$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że elementami rodziny P są zbiory bazowe, tzn. zbiory postaci:

$$(2)\quad u = p^{-1}_{\alpha_1}(i_1)\cap\ldots\cap p^{-1}_{\alpha_n}(i_n),$$

gdzie $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset\varkappa$, $i_k\in\{-1,1\}$ dla $k\leqslant n$ oraz $p_{\alpha_k}: D^{\varkappa}\to\{-1,1\}$ są rzutowaniami (patrz rozdział I, § 1). Z każdym zbiorem u postaci (2) związana jest funkcja $f_u: \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\to\{-1,1\}$ określona wzorem:

(3) $f_u(\alpha)_k = i_k$.

Niech $F = \{f_u : u \in P\}$. Ponieważ $|F| = \omega_1$, więc na mocy twierdzenia 2 istnieje zbiór skończony Z, funkcja $h : Z \longrightarrow \{-1,1\}$ oraz zbiór $F' \subset F$ taki, że $|F'| = \omega_1$, oraz jeśli $f_u \neq f_v$, $f_u, f_v \in F'$, to

(4) $\mathrm{dom}(f_u) \cap \mathrm{dom}(f_v) = Z$,

(5) $f_u | Z = h$.

Z warunku (2) łatwo wynika, że jeśli $\mathrm{dom}(f_u) \cap \mathrm{dom}(f_v) = \emptyset$, to $u \cap v \neq \emptyset$. Zatem $Z \neq 0$. Z warunków (2) - (5) wynika, że dla $u, v \in \{w : f_w \in F'\}$, $u \cap v \neq \emptyset$. Otrzymaliśmy w ten sposób sprzeczność, bo zbiór $\{w : f_w \in F'\}$ jest zawarty w zbiorze P i ma moc ω_1.

IV. Zbiory elementów rozłącznych i zbiory niezależne w algebrach Boole'a

§ 1. Saturowalność algebry Boole'a a liczba Suslina przestrzeni topologicznej

Niech B będzie algebrą Boole'a. Mówimy, że elementy zbioru $A \subset B - \{0_B\}$ są rozłączne, jeśli dla każdych dwóch różnych elementów $u, w \in A$, $u \wedge w = 0$. Liczbę kardynalną $sat(B) = \min\{\tau$: dla każdego zbioru $A \subset B$ składającego się z elementów rozłącznych, $|A| < \tau\}$ będziemy nazywali s a t u r o w a l n o ś c i ą algebry Boole'a B. Łatwo zauważyć, że $sat(B) \leq |B|^+$. Z twierdzenia Marczewskiego-Szpilrajna (twierdzenie 3, rozdział III, § 3) wynika, że $sat(CO(D^\tau)) = \omega_1$, dla każdej liczby kardynalnej $\tau \geq \omega$. Łatwo sprawdzić, że jeśli C jest podalgebrą algebry B oraz C jest zbiorem gęstym w B, to $sat(B) = sat(C)$. W szczególności dla każdej algebry Boole'a B $sat(B) = sat(B^c)$.

Podzbiór P algebry Boole'a B będziemy nazywali r o z b i c i e m algebry Boole'a B, jeśli P składa się z elementów rozłącznych oraz kres górny zbioru P istnieje i jest równy 1. Zatem $P \subset B - \{0\}$ jest rozbiciem algebry Boole'a B wtedy i tylko wtedy, gdy:

(1) dla każdych dwóch różnych $u, w \in P$, $u \wedge w = 0$,

(2) dla każdego $z \in B - P$, $z \neq 0$, istnieje $u \in P$ takie, że $z \wedge u \neq 0$.

LEMAT 1. Jeśli D jest podzbiorem gęstym algebry Boole'a B oraz $A \subset D$ składa się z elementów rozłącznych, to istnieje rozbicie P algebry Boole'a B takie, że $A \subset P \subset D$.

Dowód. Niech Z będzie rodziną wszystkich tych podzbiorów zbioru $D - \{0\}$, które składają się z elementów rozłącznych i zawierają zbiór A. Zbiór Z jest częściowo uporządkowany przez relację zawierania. Łatwo sprawdzić, że jeśli $L \subset Z$ jest podzbiorem liniowo uporządkowanym, to $\bigcup\{E: E \in L\} \in Z$. Zatem, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna, w Z istnieje element maksymalny P. Zgodnie z definicją zbioru Z, $A \subset P \subset D$. Zbiór P składa się z elementów rozłącznych, tzn. P spełnia (1). Dla dowodu, że P jest rozbiciem, wystarczy sprawdzić, że spełnia warunek (2). Przypuśćmy, że istnieje $z \in (B-P) - \{0\}$ takie, że $z \wedge u = 0$ dla każdego $u \in P$. Skoro D jest zbiorem gęstym w B, to istnieje $d \in D - \{0\}$ takie, że $d \leqslant z$. Wówczas $P \cup \{d\} \in Z$; sprzeczność z maksymalnością P.

Z udowodnionego powyżej lematu wynika, że saturowalność algebry Boole'a B jest to najmniejsza liczba kardynalna τ o tej własności, że każde rozbicie algebry Boole'a B ma moc mniejszą niż τ.

Ustalmy w algebrze Boole'a B element niezerowy u. Niech $B \upharpoonright u = \{w \in B: w \leqslant u\}$. Zbiór $B \upharpoonright u$ jest algebrą Boole'a, w której działania $\wedge$ i $\vee$ są takie jak w B, elementem przeciwnym do w jest $u-w$, a jedynką jest u (łatwe sprawdzenie pomijamy). Algebrę Boole'a $B \upharpoonright u$ będziemy nazywali *algebrą częściową* algebry Boole'a B wyznaczoną przez element u.

Mówimy, że algebra Boole'a B jest *jednorodna ze względu na saturowalność*, jeśli $sat(B) = sat(B \upharpoonright u)$ dla każdego $u \in B - \{0\}$.

LEMAT 2. Dla każdej algebry Boole'a B istnieje rozbicie P takie, że dla każdego $u \in P$ algebra Boole'a częściowa $B \upharpoonright u$ jest jednorodna ze względu na saturowalność.

Dowód. Zgodnie z lematem 1, wystarczy wykazać, że zbiór tych elementów $u \in B - \{0\}$, dla których algebra częściowa $B \upharpoonright u$ jest jednorodna ze względu na saturowalność, jest gęsty w B.

Zauważmy, że $sat(B \upharpoonright u) \leqslant sat(B)$ dla każdego $u \in B - \{0\}$. Stąd wynika, że dla każdego $u \in B - \{0\}$ istnieje $0 < w \leqslant u$ takie, że $sat(B \upharpoonright w) =$

$= \mathrm{sat}(B\restriction z)$ dla każdego $z \leq w$, $z \neq 0$. W przeciwnym wypadku istniałby ciąg $\{w_n : n<\omega\} \subset B$ taki, że $\mathrm{sat}(B\restriction w_{n+1}) < \mathrm{sat}(B\restriction w_n)$, co jest niemożliwe, bo w każdym niepustym zbiorze liczb kardynalnych istnieje liczba najmniejsza. Zatem dla każdego $u \in B-\{0\}$ istnieje $w \in B-\{0\}$ takie, że $w \leq u$ i algebra $B\restriction w$ jest jednorodna ze względu na saturowalność, co kończy dowód.

TWIERDZENIE 1 (P. Erdös, A. Tarski, 1943). Jeśli B jest algebrą Boole'a nieskończoną, to sat(B) jest liczbą kardynalną regularną nieprzeliczalną.

Dowód. Niech B będzie algebrą Boole'a nieskończoną. Pokażemy, że $\mathrm{sat}(B) \geq \omega_1$. Zauważmy wpierw, że jeśli $0<u<1$, to $|B\restriction u| \geq \omega$ lub $|B\restriction -u| \geq \omega$. Zatem istnieje ciąg $\{u_n : n<\omega\} \subset B$ taki, że

(3) $|B\restriction u_n| \geq \omega$,

(4) $0 < u_{n+1} < u_n < 1$,

dla każdego $n<\omega$. Konstrukcja ciągu $\{u_n : n<\omega\}$ jest indukcyjna: jeśli element u_n jest już określony, to obierzemy dowolne w takie, że $0<w<u_n$. Jeśli $|B\restriction w| \geq \omega$, to przyjmujemy $u_{n+1} = w$. W przeciwnym razie, na mocy (3), $|B\restriction u_n - w| \geq \omega$, więc możemy przyjąć $u_{n+1} = u_n - w$. Z własności (4) wynika, że $\{u_{n+1} - u_n : n<\omega\}$ składa się z elementów rozłącznych, co dowodzi, że $\mathrm{sat}(B) \geq \omega_1$.

Przypuśćmy, że $\mathrm{sat}(B) = \tau$ jest liczbą singularną. Z lematu 2 wynika, że istnieje rozbicie $P \subset B$ takie, że algebra $B\restriction u$ jest jednorodna ze względu na saturowalność, dla każdego $u \in P$. Sprawdźmy, że

(5) $\sup\{\mathrm{sat}(B\restriction u) : u \in P\} = \tau$.

Ustalmy $\mu < \tau$. Skoro P składa się z elementów rozłącznych, to $|P| < \tau$. Skoro τ jest liczbą singularną, to jest liczbą graniczną. Zatem istnieje liczba kardynalna $\varkappa$ taka, że $\max\{\mu, |P|\} < \varkappa^+ < \tau$. Skoro $\mathrm{sat}(B) > \varkappa^+$, to istnieje zbiór $Q \subset B - \{0\}$ składający się z elementów rozłącznych i taki, że $|Q| = \varkappa^+$. Dla każdego $u \in P$ niech $Q_u = \{w \in Q : u \wedge w \neq 0\}$. Skoro P jest rozbiciem, to $Q = \bigcup\{Q_u : u \in P\}$. Z regularności liczby $\varkappa^+$ i stąd, że $|P|<\varkappa^+$, wynika, że $|Q_u| = \varkappa^+$ dla pewnego $u \in P$. Zatem $sat(B\upharpoonright u) > \varkappa^+ \geq \mu$, co dowodzi warunku (5).

Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Istnieje $u \in P$ takie, że $sat(B\upharpoonright u) = \tau$. Rozważmy ciąg $\{\tau_\xi : \xi < cf(\tau)\}$ taki, że $\tau_\xi < \tau$, dla każdego $\xi < cf(\tau)$ oraz $\sup\{\tau_\xi : \xi < cf(\tau)\} = \tau$. Skoro $cf(\tau) < \tau = sat(B)$, to istnieje zbiór $\{u_\xi : \xi < cf(\tau)\} \subset B\upharpoonright u$ składający się z elementów rozłącznych. Dla każdego $\xi < cf(\tau)$ istnieje zbiór $\{u_\xi^\alpha : \alpha < \tau_\xi\} \subset B\upharpoonright u_\xi$ mocy τ_ξ, składający się z elementów rozłącznych, bo algebra $B\upharpoonright u$ jest jednorodna ze względu na saturowalność oraz $\tau_\xi < sat(B\upharpoonright u)$. Zbiór $\{u_\xi^\alpha : \alpha < \tau_\xi, \xi < cf(\tau)\} \subset B\upharpoonright u$ składa się z elementów rozłącznych i ma moc τ, sprzeczność.

Przypadek 2. Dla każdego $u \in P$, $sat(B\upharpoonright u) < \tau$. Niech $\tau = \sup\{\tau_\xi : \xi < cf(\tau)\}$, gdzie $\tau_\xi < \tau$ dla każdego $\xi < cf(\tau)$. Metodą indukcji pozaskończonej określmy ciąg $\{u_\xi : \xi < cf(\tau)\} \subset P$ oraz ciąg $\{A_\xi : \xi < cf(\tau)\}$ tak, aby

(6) jeśli $\xi \neq \eta$, to $u_\xi \wedge u_\eta = 0$,

(7) dla każdego $\xi < cf(\tau)$, $A_\xi \subset B\upharpoonright u_\xi$ składa się z elementów rozłącznych oraz $|A_\xi| \geq \tau_\xi$.

Załóżmy, że u_ξ oraz A_ξ są już określone dla każdego $\xi < \eta$ tak, że spełnione są warunki (6) i (7). Skoro $sat(B\upharpoonright u_\xi) < \tau$, dla $\xi < \eta$, oraz $\eta < cf(\tau)$, to $\sup\{sat(B\upharpoonright u_\xi) : \xi < \eta\} < \tau$. Zatem, na mocy (5), istnieje $u_\eta \in P$ takie, że $sat(B\upharpoonright u_\eta) > \max\{\tau_\eta, \sup\{sat(B\upharpoonright u_\xi) : \xi < \eta\}\}$. Ponieważ $sat(B\upharpoonright u_\eta) > \tau_\eta$, więc istnieje zbiór $A_\eta \subset B\upharpoonright u_\eta$ składający się z elementów rozłącznych i taki, że $|A_\eta| = \tau_\eta$. Jeśli $\xi < \eta$, to $sat(B\upharpoonright u_\xi) < sat(B\upharpoonright u_\eta)$, czyli $u_\xi \wedge u_\eta = 0$.

Na mocy warunków (6) i (7) zbiór $A = \bigcup\{A_\xi : \xi < cf(\tau)\}$ składa się z elementów rozłącznych oraz $|A| = \sup\{\tau_\xi : \xi < cf(\tau)\} = \tau$, co jest sprzeczne z tym, że $sat(B) = \tau$.

W topologii odpowiednikiem saturowalności jest l i c z b a S u s l i n a (nazywana także c e l u l a r n o ś c i ą). Liczbą Suslina przestrzeni topologicznej X nazywamy liczbę kardynalną $c(X) =$

$= \sup \{|R| : R$ jest rodziną podzbiorów rozłącznych i otwartych w przestrzeni $X\}$. Jeśli zbiory $U, W \subset X$ są otwarte i rozłączne, to zbiory $\mathrm{int}(\mathrm{cl}U)$ oraz $\mathrm{int}(\mathrm{cl}W)$ są regularnie otwarte i także rozłączne (patrz rozdział I, § 3). Zatem, $c(X) = \sup \{|R| : R \subset RO(X)$ i R składa się z elementów rozłącznych$\}$. Stąd wynika łatwo następujący

LEMAT 3. Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

(a) Jeśli $\mathrm{sat}(RO(X)) = \tau^+$, to $c(X) = \tau$.

(b) Jeśli $\mathrm{sat}(RO(X))$ jest liczbą graniczną, to $c(X) = \mathrm{sat}(RO(X))$.

Jednym z pierwszych pytań, jakie się pojawią w związku z definicją liczby Suslina, jest to, czy "sup" można zastąpić przez "max", tzn. czy dla każdej przestrzeni topologicznej X istnieje rodzina R zbiorów rozłącznych i otwartych w X taka, że $|R| = c(X)$. Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest związana z istnieniem liczb słabo nieosiągalnych; liczba kardynalna τ jest słabo nieosiągalna, jeśli jest regularna, graniczna i nieprzeliczalna. Okazuje się, że jeśli teoria mnogości Zermelo-Fraenkla (ZF) jest niesprzeczna, to także teoria ZFC z dołączonym aksjomatem orzekającym, że nie istnieją liczby słabo nieosiągalne, pozostaje niesprzeczna. Zatem liczb słabo nieosiągalnych nie da się skonstruować w zwykłej teorii mnogości (patrz np. T. J e c h, 1973).

Z twierdzenia Erdösa-Tarskiego wynika następujący wniosek dotyczący liczby Suslina (patrz także I. J u h á s z, 1975):

TWIERDZENIE 2. Jeśli X jest przestrzenią topologiczną oraz $c(X)$ nie jest liczbą słabo nieosiągalną, to istnieje rodzina R zbiorów rozłącznych i otwartych w X taka, że $|R| = c(X)$.

Dowód. Załóżmy, że $c(X)$ nie jest liczbą słabo nieosiągalną. Wówczas z lematu 3 i twierdzenia 1 wynika, że $\mathrm{sat}(RO(X)) = (c(X))^+$. Zatem istnieje rodzina R zbiorów regularnie otwartych rozłącznych w X taka, że $|R| = c(X)$; co kończy dowód.

Niech B będzie algebrą Boole'a nieskończoną. Najmniejszą wśród tych liczb kardynalnych, które są mocami podzbiorów gęstych algebry

$\mathcal{B}$, będziemy nazywali **g ę s t o ś c i ą** algebry Boole'a $\mathcal{B}$ i oznaczali symbolem $\pi(\mathcal{B})$ (litera π bierze się stąd, że odpowiednikiem gęstości algebry Boole'a jest w topologii π-waga przestrzeni topologicznej oznaczana symbolem $\pi(X)$). Oczywiście zbiór B jest gęsty w algebrze Boole'a $\mathcal{B}$, zatem $\pi(\mathcal{B}) \leq |B|$. Nierówność ta może być ostra, jest tak np. w przypadku, gdy $\mathcal{B} = P(\mathbb{N})$.

Gęstość i saturowalność dają nam wygodne oszacowanie mocy algebry Boole'a (wykorzystamy je w § 4).

LEMAT 4 (B. A. J e f i m o w, 1970). Dla każdej algebry Boole'a $\mathcal{B}$ zachodzi nierówność:

(8) $|B| \leq \sum\{(\pi(\mathcal{B}))^{\lambda} : \lambda < \mathrm{sat}(\mathcal{B})\}$.

Dowód. Ustalmy zbiór gęsty $A \subset B$ taki, że $|A| = \pi(\mathcal{B})$. Dla każdego $u \in B - \{0\}$ niech A_u będzie zbiorem maksymalnym wśród tych podzbiorów zbioru $A \cap B \restriction u$, które składają się z elementów rozłącznych, istnienie podzbioru maksymalnego wynika z lematu Kuratowskiego-Zorna. Z gęstości zbioru A wynika, że jeśli $u \neq w$, to $A_u \neq A_w$. Oczywiście $|A_u| < \mathrm{sat}(\mathcal{B})$, mamy więc funkcję różnowartościową odwzorowującą zbiór B w zbiór $\{E \subset A : |E| < \mathrm{sat}(\mathcal{B})\}$. Zatem $|B| \leq \sum\{|A|^{\lambda} : \lambda < \mathrm{sat}(\mathcal{B})\}$, co kończy dowód.

Jeśli $\mathrm{sat}(\mathcal{B}) = \varkappa^+$ dla pewnej liczby kardynalnej $\varkappa$, to

$$\sum\{(\pi(\mathcal{B}))^{\lambda} : \lambda < \mathrm{sat}(\mathcal{B})\} \leq (\pi(\mathcal{B}))^{\varkappa} \cdot \mathrm{sat}(\mathcal{B}).$$

Ponieważ $\mathrm{sat}(\mathcal{B}) \leq \pi(\mathcal{B})$, więc w tym przypadku nierówność (8) można zastąpić nierównością prostszą:

(9) $|B| \leq (\pi(\mathcal{B}))^{\varkappa}$, gdzie $\varkappa^+ = \mathrm{sat}(\mathcal{B})$.

§ 2. Saturowalność i zupełność a homomorfizmy

Jeśli $h : B \to C$ jest izomorfizmem algebr Boole'a, to $sat(B) = sat(C)$. Nietrudno także zauważyć, że jeśli h jest monomorfizmem, to $sat(B) \leq sat(C)$.

LEMAT 1. $sat(P(\mathbb{N}) \mid fin) = (2^{\omega})^{+}$.

Dowód. Ponieważ $|P(\mathbb{N}) \mid fin| \leq 2^{\omega}$, więc wystarczy wykazać, że istnieje rodzina $R \subset P(\mathbb{N})$ mocy 2^{ω} taka, że $A \cap B$ jest zbiorem skończonym dla każdych dwóch różnych elementów $A, B \in R$.

Dla każdej liczby niewymiernej x obierzmy ciąg c_x liczb wymiernych, zbieżny do x. Jeśli $x \neq y$, to zbiór $c_x \cap c_y$ jest co najwyżej skończony. Niech f będzie odwzorowaniem różnowartościowym zbioru liczb wymiernych na $\mathbb{N}$. Rodzina $R = \{f(c_x) : x$ jest liczbą niewymierną$\}$ ma żądane własności.

Z lematu 1 wynika, że epimorfizmy mogą powiększać saturowalność. Takim przykładem jest naturalna projekcja $q : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})|Fin$, bo $sat(P(\mathbb{N})) = \omega_1$.

Niech I_0 będzie rodziną wszystkich podzbiorów odcinka $[0,1]$ miary Lebesque'a zero. Przypomnijmy, że I_0 jest ideałem w algebrze L podzbiorów mierzalnych odcinka $[0,1]$. Skoro zbiory jednopunktowe są mierzalne, to $sat(L) = (2^{\omega})^{+}$. Mamy jednak

LEMAT 2. $sat(L|I_0) = \omega_1$

Dowód. Rozważmy zbiór $R \subset L - I_0$ taki, że dla każdych dwóch różnych elementów $A, B \in R$, $A \cap B \in I_0$. Dla dowodu lematu wystarczy sprawdzić, że $|R| \leq \omega$.

Dla każdego $n < \omega$ niech $R_n = \{A \in R : l(A) \geq \frac{1}{n}\}$, gdzie $l(A)$ oznacza miarę Lebesque'a zbioru A. Ponieważ miara l jest ograniczona przez 1, więc każdy ze zbiorów R_n jest skończony. Zatem R jest zbiorem przeliczalnym.

Z lematu 2 wynika, że epimorfizmy mogą pomniejszyć saturowalność. Takim przykładem jest naturalna projekcja $q : L \to L|I_0$.

Jak wskazuje przykład algebry $P(\mathbb{N}|Fin)$, algebry ilorazowe algebr zupełnych nie muszą być zupełne (patrz rozdział II, § 2, twierdzenie 4). Z punktu widzenia ilorazowania lepszym pojęciem jest $\varkappa$-zupełność ($\varkappa$ jest pewną liczbą kardynalną nieskończoną). Algebra Boole'a jest **$\varkappa$-z u p e ł n a**, jeśli każdy jej podzbiór mocy mniejszej niż $\varkappa$ ma kres górny. Analogicznie, ideał I algebry Boole'a B jest **$\varkappa$-z u p e ł n y**, jeśli każdy jego podzbiór mocy mniejszej niż $\varkappa$ ma kres górny należący do I. Wypada nadmienić, że niektórzy autorzy przyjmują nieco inną definicję $\varkappa$-zupełności. Tak więc np. pojęcie $\varkappa$-zupełności zawarte w książce R. S i k o r s k i e g o (1958) odpowiada $\varkappa^+$-zupełności w sensie przyjętej tu definicji.

Oczywiście każda algebra Boole'a i każdy jej ideał są ω-zupełne; ω_1-zupełność nazywamy także σ-zupełnością. Algebry Boole'a zupełne są $\varkappa$-zupełne dla każdej liczby kardynalnej $\varkappa$. Wspomniana wyżej algebra L jest ω_1-zupełna, a jej ideał I_0 jest ω_1-zupełny.

Pozostawmy bez dowodu następujący łatwy lemat.

LEMAT 3. Niech A będzie podzbiorem algebry Boole'a B. Jeśli A ma kres górny, to dla każdego $u \in B$, zbiór $\{u \wedge w : w \in A\}$ ma także kres górny oraz $\sup\{u \wedge w : w \in A\} = u \wedge \sup A$.

TWIERDZENIE 1. Jeśli algebra Boole'a B jest $\varkappa$-zupełna, a ideał $I \subset B$ jest $\varkappa$-zupełny, to algebra $B|I$ jest także $\varkappa$-zupełna.

Dowód. Niech $q : B \to B|I$ będzie naturalną projekcją wyznaczoną przez ideał I (patrz rozdział II, § 2). Dla każdego zbioru $A \subset B|I$ mocy mniejszej niż $\varkappa$ istnieje zbiór $C \subset B$ mocy mniejszej niż $\varkappa$ taki, że $q(C) = A$. Z $\varkappa$-zupełności algebry B wynika, że C ma kres górny c. Dla dowodu twierdzenia wystarczy sprawdzić, że $q(c)$ jest kresem górnym zbioru A. Oczywiście $y \leq q(c)$ dla każdego $y \in A$. Niech $a \in B|I$ będzie takie, że $y \leq a$ dla każdego $y \in A$. Obierzmy $b \in B$ takie, że $q(b) = a$. Wówczas $x - b \in I$ dla każdego $x \in C$, bo $h(x - b) = h(x) - a = 0$. Ponieważ I jest ideałem $\varkappa$-zupełnym, więc $w = \sup \{x - b : x \in C\} \in I$. Z lematu 3 wynika, że $w = c - b$. Zatem $q(c) - a = q(c - b) = q(w) = 0$, co kończy dowód.

TWIERDZENIE 2. Jeśli algebra Boole'a B jest $\varkappa$-zupełna i $sat(B) \leq \varkappa$, to B jest zupełna.

Dowód. Ustalmy zbiór $A \subset B$. Niech Z będzie rodziną podzbiorów zbioru $B - \{0\}$ składających się z elementów rozłącznych, przy czym

(1) jeśli $R \in Z$ oraz $u \in R$, to istnieje $a \in A$ takie, że $u \leq a$.

Zbiór Z jest częściowo uporządkowany przez relację zawierania, a każdy łańcuch w Z jest ograniczony. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w Z istnieje element maksymalny P. Skoro P składa się z elementów rozłącznych, to $|P| < \varkappa$. Zatem zbiór P ma kres górny; załóżmy, że $z = sup(P)$. Pokażemy, że z jest także kresem górnym zbioru A.

Zauważmy wpierw, że $a \leq z$ dla każdego $a \in A$. Istotnie, gdyby dla pewnego $a \in A$ było $a - z \neq 0$, to zbiór $P \cup \{a-z\}$ należałby do Z, co przeczyłoby maksymalności P.

Jeśli $w \in B$ oraz $a \leq w$ dla każdego $a \in A$, to na mocy (1) $x \leq z$ dla każdego $x \in P$. Zatem $z = sup(P) \leq w$, czyli $z = sup(A)$; co kończy dowód.

Z twierdzeń 1 i 2 wynika, że jeśli algebra B oraz ideał $I \subset B$ są $\varkappa$-zupełne, a $sat(B|I) \leq \varkappa$, to algebra ilorazowa $B|I$ jest zupełna. W szczególności mamy:

TWIERDZENIE 3. Algebra Boole'a ilorazowa $L|I_0$ jest zupełna.

Dowód. Z twierdzenia 1 wynika, że algebra $L|I_0$ jest ω_1-zupełna. Skoro $sat(L|I_0) = \omega_1$ (lemat 2), to na mocy twierdzenia 2 $L|I_0$ jest algebrą zupełną.

Zauważmy, że sama algebra L nie jest zupełna, bo istnieją zbiory niemierzalne, a każdy zbiór jednopunktowy jest mierzalny.

Bardzo interesująca z punktu widzenia topologii jest przestrzeń Stone'a algebry $L|I_0$. Z tego, co dotychczas zostało powiedziane o algebrze Boole'a $L|I_0$, wynika, że przestrzeń $S(L|I_0)$ jest zwarta, ekstremalnie niespójna i ma przeliczalną liczbę Suslina. Ponieważ każdy zbiór mierzalny różni się od pewnego zbioru typu G_δ o zbiór miary zero, a zbiorów typu G_δ na odcinku jest 2^ω, więc $|L|I_0| \leq 2^\omega$. Nierówność przeciwna wynika stąd, że każda algebra Boole'a zupełna, jeśli jest nieskończona, to ma moc co najmniej 2^ω. Aby się o tym przekonać, wystarczy w algebrze Boole'a nieskończonej B rozważyć dowolny zbiór nieskończony A złożony z elementów rozłącznych i zauważyć, że jeśli A', $A'' \subset A$ oraz $A' \neq A''$, to $\sup(A') \neq \sup(A'')$. Zatem $|L|I_0| = 2^\omega$, czyli waga przestrzeni $S(L|I_0)$ jest równa 2^ω.

Wymienione dotychczas własności przestrzeni $S(L|I_0)$ (a więc: zwartość, ekstremalna niespójność, przeliczalność liczby Suslina i waga 2^ω) ma także przestrzeń Gleasona zbioru Cantora, tzn. przestrzeń $G(D^\omega)$ (przeliczalność liczby Suslina wynika stąd, że $G(D^\omega) = S(RO(D^\omega))$). Mogłoby więc powstać przypuszczenie, że przestrzenie te są z sobą homeomorficzne, tzn. przypuszczenie, że algebry $L|I_0$ i $RO(D^\omega)$ są izomorficzne. Nadmieńmy przy tej okazji, że każda algebra Boole'a przeliczalna bezatomowa (tzn. nie zawierająca atomów, patrz rozdział II, § 1) jest izomorficzna z algebrą $CO(D^\omega)$ - jest to boole'owska wersja znanego twierdzenia, że każda przestrzeń metryczna zwarta zero-wymiarowa, nie zawierająca punktów izolowanych, jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora. Okazuje się jednak, że przestrzenie $S(L|I_0)$ oraz $G(D^\omega)$ nie są homeomorficzne. Własnością topologiczną, która je rozróżnia, jest o ś r o d k o w o ś ć (przestrzeń jest ośrodkowa, gdy zawiera zbiór przeliczalny gęsty).

Przestrzeń $G(D^\omega)$ jest ośrodkowa. Wynika to stąd, że odwzorowanie Gleasona $G : G(D^\omega) \to D^\omega$ jest nieprzywiedlne; patrz rozdział II, § 4. Istotnie, jeśli z każdego zbioru $G^{-1}(x)$, gdzie x jest elementem pewnego zbioru gęstego w D^ω i przeliczalnego, wybierzemy po jednym elemencie, to otrzymamy zbiór przeliczalny i gęsty w $G(D^\omega)$.

Przestrzeń $S(L|I_0)$ nie jest ośrodkowa. Zauważmy wpierw, że każdy ultrafiltr w $L|I_0$ zawiera elementy reprezentowane przez zbiory dowolnie małej miary. Wystarczy w tym celu podzielić odcinek $[0,1]$ na skończoną liczbę odpowiednio małych odcinków stykających się co najwyżej jednym końcem. Ustalmy teraz zbiór $\{p_n : n<\omega\} \subset S(L|I_0)$. Dla każdego $n<\omega$ obierzmy element $u_n \in L$ taki, że $[u_n] \in p_n$ oraz $l(u_n) \leq 3^{-n}$ (l oznacza miarę Lebesque'a). Niech $v = \bigcup\{u_n : n<\omega\}$. Ponieważ $l(v) \leq 2^{-1}$, więc $w = [0,1] - v \notin I_0$. Zatem zbiór $\{p_n : n<\omega\}$ nie jest gęsty w $S(L|I_0)$, bo $[w] \neq 0$ oraz $[w] \notin p_n$, dla $n<\omega$.

§ 3. Zbiory elementów rozłącznych

Niech B będzie algebrą Boole'a zupełną. Przypomnijmy, że zbiór $P \subset B - \{0\}$ jest rozbiciem algebry B, gdy składa się z elementów rozłącznych i $\sup(P) = 1$; patrz § 1.

LEMAT 1. Jeśli P jest rozbiciem algebry Boole'a zupełnej B, to $|B| = \Pi\{|B{\restriction}u| : u \in P\}$.

Dowód. Zbiór B jest równoliczny z iloczynem kartezjańskim zbiorów $B{\restriction}u$, dla $u \in P$. Istotnie, niech funkcja $f : B \to \Pi\{B{\restriction}u : u \in P\}$ będzie określona wzorem:

$$(f(w))(u) = w \wedge u, \text{ gdzie } w \in B \text{ oraz } u \in P.$$

Jeśli $w, z \in B$ oraz $w \neq z$, to $w - z \neq 0$ lub $z - w \neq 0$. Załóżmy, że $w - z \neq 0$. Ponieważ P jest rozbiciem, więc $(w - z) \wedge u \neq 0$ dla pewnego $u \in P$. Wówczas $w \wedge u \neq z \wedge u$, czyli $f(w) \neq f(z)$. Zatem funkcja f jest różnowartościowa.

Jeśli $p \in \Pi\{B{\restriction}u : u \in P\}$, to $p = f(w)$ dla $w = \sup\{p(u) : u \in P\}$, bowiem dla każdego $u \in P$ mamy:

$$w \wedge u = u \wedge \sup\{p(v) : v \in P\} = \sup\{u \wedge p(v) : v \in P\}$$

(patrz lemat 3, IV, § 2). Skoro P jest rozbiciem oraz $p(v) \leq v$, to $w \wedge u = p(u)$; co kończy dowód lematu.

Będziemy mówili, że algebra Boole'a B jest *jednorodna ze względu na moc*, jeśli $|B| = |B{\restriction}u|$ dla każdego $u \in B - \{0\}$.

LEMAT 2. Jeśli B jest algebrą Boole'a, to istnieje takie rozbicie $P \subset B - \{0\}$, że dla każdego $u \in P$ algebra Boole'a $B \upharpoonright u$ jest jednorodna ze względu na moc.

Dowód tego lematu przebiega podobnie jak dowód lematu 2 z rozdziału IV, § 1.

TWIERDZENIE 1 (B. J e f i m o w, 1970). Jeśli algebra Boole'a B jest zupełna i dla każdego $u \in B - \{0\}$, $sat(B \upharpoonright u) > \varkappa$, to $|B|^{\varkappa} = |B|$.

Dowód. Z lematów 1 i 2 wynika, że nie zmniejszając ogólności możemy zakładać, iż algebra B jest jednorodna ze względu na saturowalność. Skoro $sat(B) > \varkappa$, to istnieje rozbicie Q mocy $\varkappa$. Dla każdego $u \in Q$, $|B \upharpoonright u| = |B|$. Zatem, na mocy lematu 1, $|B|^{\varkappa} = |B|$.

Z twierdzenia Jefimowa wynika znane twierdzenie Pierce'a:

TWIERDZENIE 2 (R.S. P i e r c e, 1958). Jeśli B jest algebrą Boole'a zupełną, to $|B|^{\omega} = |B|$.

Dowód. Niech A będzie zbiorem atomów algebry Boole'a zupełnej B i niech $u = sup(A)$. Algebra $B \upharpoonright u$ jest atomowa, a więc jest izomorficzna z ciałem zbiorów $P(A)$ (patrz rozdział II, § 1, twierdzenie 1). Zatem $|B \upharpoonright u| = 2^{|A|}$. Ponieważ $|B| = \max\{|B \upharpoonright u|, |B \upharpoonright -u|\}$, więc pozostaje udowodnić twierdzenie w przypadku, gdy algebra B nie zawiera atomów.

Jeśli B nie zawiera atomów, to $sat(B \upharpoonright w) > \omega$ dla każdego $w \in B - \{0\}$. Zatem, na mocy twierdzenia 1, $|B|^{\omega} = |B|$.

Niech $\varkappa$ będzie liczbą kardynalną, a $C = \{c_{\alpha} : \alpha < \varkappa\}$ ciągiem elementów niezerowych algebry Boole'a B (elementy w ciągu C mogą się powtarzać). Mówimy, że ciąg $\{d_{\alpha} : \alpha < \varkappa\} \subset B - \{0\}$ jest zwężeniem ciągu C, jeśli $d_{\alpha} \leq c_{\alpha}$ dla każdego $\alpha < \varkappa$. Powstaje pytanie: kiedy ciąg C ma zwężenie składające się z elementów rozłącznych? Wnikliwe studium tego zagadnienia oraz dane bibliograficzne można znaleźć w pracy B. B a l c a r a, P. S i m o n a i P. V o j t á š a (198*).

TWIERDZENIE 3 (B. Balcar, P. Vojtáš, 1977). Jeśli dla każdego elementu niezerowego u algebry Boole'a B $\mathrm{sat}(B\restriction u) > \varkappa^+$, to każdy ciąg $\{c_\alpha : \alpha < \varkappa\} \subset B - \{0\}$ ma zwężenie składające się z elementów rozłącznych.

Istota dowodu tego twierdzenia tkwi w następującym lemacie:

LEMAT 3. Jeśli dla elementu u_0 algebry Boole'a B $\mathrm{sat}(B\restriction u_0) > \varkappa^+$ ($\varkappa$ jest liczbą kardynalną nieskończoną), to dla każdego zbioru $A \subset B - \{0\}$ mocy nie większej niż $\varkappa$ istnieje zbiór $R \subset B\restriction u_0 - \{0\}$ mocy $\varkappa^+$, składający się z elementów rozłącznych i taki, że

(1) dla każdego $u \in A$ zbiór $\{w \in R : u \wedge w \neq 0\}$ jest pusty lub ma moc $\varkappa^+$.

Dowód. Ponieważ $\mathrm{sat}(B\restriction u_0) > \varkappa^+$, więc istnieje zbiór $P \subset B\restriction u_0 - \{0\}$ mocy $\varkappa^+$ składający się z elementów rozłącznych. Dla każdego $u \in A$ niech $P_u = \{w \in P : u \wedge w \neq 0\}$. Skoro $|A| \leq \varkappa$, to zbiór $R = P - \bigcup\{P_u : u \in A \text{ i } |P_u| \leq \varkappa\}$ ma moc $\varkappa^+$ i spełnia warunek (1).

Dowód twierdzenia 3. Niech $A = \{c_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ oraz niech Z będzie rodziną wszystkich zbiorów $R \subset B - \{0\}$ składających się z elementów rozłącznych i spełniających warunek (1). Z lematu 3 wynika, że $Z \neq \emptyset$. Zbiór Z jest częściowo uporządkowany przez relację zawierania i jeśli $L \subset Z$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym, to $\bigcup\{R : R \in L\} \in Z$ i jest kresem górnym L. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że w Z istnieje element maksymalny M. Z maksymalności zbioru M i lematu 3 wynika, że M jest rozbiciem B, a stąd

(2) dla każdego $u \in A$, $|\{w \in M : u \wedge w \neq 0\}| = \varkappa^+$.

Posługując się indukcją pozaskończoną i warunkiem (2), łatwo określić ciąg $\{w_\alpha : \alpha < \} \subset M$ taki, że

(3) $w_\alpha \neq w_\beta$, dla $\alpha \neq \beta$,

(4) $w_\alpha \wedge c_\alpha \neq 0$, dla $\alpha < \varkappa$.

Bezpośrednio z warunków (3) i (4) wynika, że ciąg $\{W_\alpha \wedge c_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ jest zwężeniem ciągu $\{c_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ składającym się z elementów rozłącznych. Dowód twierdzenia 3 został zakończony.

Spośród wielu zastosowań twierdzenia Balcara-Vojtáša przedstawimy dwa. Jedno z nich pojawi się w dowodzie twierdzenia Balcara-Franka w § 5. Drugie z tych zastosowań pokażemy teraz.

Przypomnijmy, że jeśli X jest przestrzenią topologiczną oraz $x \in X$, to *bazą* przestrzeni topologicznej X w punkcie x nazywamy każdą rodzinę R złożoną ze zbiorów otwartych zawierających punkt x taką, że dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ zawierającego x istnieje $V \in R$ takie, że $V \subset U$. *Charakterem* przestrzeni X w punkcie x nazywamy liczbę kardynalną $\chi(x,X) = \min\{|R| : R$ jest bazą przestrzeni X w punkcie $x\}$. Łatwo zauważyć, że jeśli X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną oraz $x \in X$ jest punktem nieizolowanym, to $\chi(x,X) \geq \omega_1$, (porównaj uwagi w rozdziale I, § 5).

TWIERDZENIE 4 (B. Balcar, P. Simon, P. Vojtáš, 1980). Jeśli X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną zwartą i dla każdej podprzestrzeni otwartej $U \subset X$, $c(U) = c(X)$, to $\chi(x,X) \geq c(X)$ dla każdego $x \in X$.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje punkt $x \in X$ taki, że $\chi(x,X) = \varkappa < c(X)$. Ponieważ przestrzeń X jest zero-wymiarowa (bo jest ekstremalnie niespójna), więc istnieje rodzina $R = \{U_\alpha : \alpha < \varkappa\} \subset CO(X)$ będąca bazą w punkcie x. Z lematu 3, § 1 wynika, że $\varkappa^+ < \mathrm{sat}(CO(X) \restriction U)$ dla każdego $U \in CO(X) - \emptyset$. Na mocy twierdzenia 3 rodzina R ma zwężenie $\{W_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ składające się z elementów rozłącznych. Przestrzeń X nie może mieć punktów izolowanych, a więc każdy zbiór $W_\alpha \in CO(X)$ można przedstawić w postaci sumy zbiorów G_α i H_α niepustych, otwartych i rozłącznych. Łatwo sprawdzić, że zbiory $G = \bigcup\{G_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ oraz $H = \bigcup\{H_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ są otwarte i rozłączne oraz $x \in cl(G) \cap cl(H)$, jest niemożliwe, bo przestrzeń X jest ekstremalnie niespójna. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Jak wykazali B. Balcar, P. Simon i P. Vojtáš (198*), przy założeniu hipotezy continuum, w przestrzeni $G(\beta IN - IN)$ istnieje punkt x taki, że $\chi(x, G(\beta IN - IN)) = \omega_1$. Ponieważ $c(G(\beta IN - IN)) = 2^{\omega} = \omega_1$ (patrz lemat 1, § 2), więc nierówność występująca w twierdzeniu 4 nie może być poprawiona na ostrą. Z drugiej strony, w § 5 pokażemy, że dla każdej przestrzeni ekstremalnie niespójnej zwartej (nieskończonej) X istnieje punkt $x \in X$ taki, że $\chi(x,X) = w(X)$. W przypadku rozpatrywanej tu przestrzeni oznacza to, że istnieje punkt $y \in G(\beta IN - IN)$ taki, że $\chi(y, G(\beta IN - IN)) = 2^{2^{\omega}}$.

§ 4. Zbiory niezależne a odwzorowania na kostki Cantora

Podzbiór A algebry Boole'a B nazywamy *zbiorem niezależnym*, jeśli dla każdego zbioru skończonego $\{u_1,\ldots,u_n\} \subset A$ i dla każdego ciągu $\{i_1,\ldots,i_n\}$ złożonego z liczb 1 i -1 zachodzi

$$i_1u_1 \wedge \ldots \wedge i_nu_n \neq 0,$$

gdzie $i_ku_k = u_k$, gdy $i_k = 1$ oraz $i_ku_k = -u_k$, gdy $i_k = -1$, dla każdego $k \leq n$.

TWIERDZENIE 1. Algebra Boole'a zawiera zbiór niezależny mocy τ wtedy i tylko wtedy, gdy jej przestrzeń Stone'a ma odwzorowanie ciągłe na kostkę Cantora D^{τ}.

Dowód. Załóżmy, że algebra Boole'a B ma zbiór niezależny mocy τ. Na mocy twierdzenia Stone'a algebra B jest izomorficzna z ciałem zbiorów $CO(S(B))$. Zatem w $CO(S(B))$ istnieje zbiór niezależny A mocy τ. Przedstawmy kostkę Cantora D^{τ} w postaci iloczynu kartezjańskiego $\Pi\{D_u : u \in A\}$, gdzie $D_u = \{-1,1\}$ dla każdego $u \in A$. Dla każdego $u \in A$ niech $f_u : S(B) \to \{-1,1\}$ będzie funkcją określoną wzorem: $f_u(p) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in u$. Rodzina funkcji $\{f_u : u \in A\}$ indukuje odwzorowanie ciągłe $g : S(B) \to \Pi\{D_u : u \in A\}$ określone wzorem:

$$g(p)(u) = f_u(p).$$

Odwzorowanie g jest ciągłe. Bazę w przestrzeni $\Pi\{D_u : u \in A\}$ tworzą zbiory będące przekrojami skończenie wielu zbiorów postaci:

$H_w^i = \{x \in \Pi\{D_u : u \in A\}: x(w) = i\}$, gdzie $w \in A$ oraz $i \in \{-1, 1\}$.

Zatem, dla dowodu ciągłości odwzorowania g wystarczy zauważyć, że $g^{-1}(H_u^1) = u$ oraz $g_u^{-1}(H_u^{-1}) = S(B) - u$.

Odwzorowanie g jest "na". Ponieważ zbiór A jest niezależny, więc, dla każdego $x \in \Pi\{D_u : u \in A\}$, zbiór $\{x(u) \cdot u : u \in A\}$ jest rodziną scentrowaną podzbiorów domknięto-otwartych przestrzeni $S(B)$. Przestrzeń $S(B)$ jest zwarta, więc istnieje $p \in \bigcap\{x(u) \cdot u : u \in A\}$. Łatwo sprawdzić, że $g(p) = x$.

Załóżmy teraz, że przestrzeń Stone'a $S(B)$ ma odwzorowanie ciągłe g na kostkę Cantora $D^{\tau} = \Pi\{D_\alpha : \alpha \in \tau\}$, gdzie $D_\alpha = \{-1, 1\}$ dla każdego $\alpha \in \tau$. Odwzorowanie $p_\alpha : \Pi\{D_\alpha : \alpha \in \tau\} \to D_\alpha$ określone wzorem: $p_\alpha(x) = x(\alpha)$ indukuje w przestrzeni D^{τ} zbiory domknięto-otwarte postaci $p_\alpha^{-1}(i_\alpha)$, gdzie $i_\alpha \in \{-1, 1\}$. Dla każdego zbioru skończonego $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \tau$, jeśli $\alpha_j \neq \alpha_k$ dla $j \neq k$, to $p_{\alpha_1}^{-1}(i_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(i_{\alpha_n}) \neq \emptyset$. Ponieważ funkcja g jest "na", więc $\{g^{-1}(p_\alpha^{-1}(1)) : \alpha \in \tau\}$ jest zbiorem niezależnym w algebrze $CO(S(B))$, co kończy dowód.

Z twierdzenia 1 wynika także, że przestrzeń zwarta zero-wymiarowa X ma odwzorowanie na kostkę Cantora D^{τ} wtedy i tylko wtedy, gdy algebra Boole'a $CO(X)$ zawiera zbiór niezależny mocy τ.

Czy w każdej algebrze Boole'a istnieje zbiór niezależny tej samej mocy co ta algebra? Pytanie takie stawiano już dawno.

G. Fichtenholz i L. Kantorowicz (1934) wykazali, że algebra $P(\mathbb{N})$ zawiera zbiór niezależny mocy 2^{ω}. Uogólniając ten wynik, F. Hausdorff (1936) udowodnił, że dla każdego zbioru (nieskończonego) M, algebra Boole'a $P(M)$ zawiera zbiór niezależny mocy $2^{|M|}$. Zauważmy, że twierdzenie Hausdorffa wynika również ze znanego twierdzenia Hewitta-Marczewskiego-Pondiczery'ego: dla każdej liczby kardynalnej $\tau \geq \omega$ w kostce Cantora $D^{2^{\tau}}$ istnieje zbiór gęsty (w sensie topologicznym) mocy τ (patrz R. E n g e l k i n g, 1975, s. 110). Istotnie, wystarczy rozważyć dowolne odwzorowanie f zbioru M na podzbiór gęsty kostki $D^{2^{|M|}}$. Topologia w M jest dyskretna, więc f jest odwzorowaniem ciągłym. Zatem istnieje odwzorowanie ciągłe $\bar{f} : \beta M \to D^{2^{|M|}}$ (βM jest rozszerzeniem Čecha-Stone'a zbioru M) takie, że $\bar{f}|M = f$. Skoro zbiór $f(M)$ jest gęsty w $D^{2^{|M|}}$, to $\bar{f}(\beta M) = D^{2^{|M|}}$. Algebra Boole'a $CO(\beta M)$ jest izomorficzna z algebrą $P(M)$, więc - na mocy twierdzenia 1 - w $P(M)$ istnieje zbiór niezależny mocy $2^{|M|}$.

B. B a l c a r i F. F r a n ě k (1979) udowodnili, że twierdzenie Hausdorffa można uogólnić na algebry Boole'a zupełne (patrz następny paragraf). Założenie zupełności jest tu istotne, bo istnieją algebry Boole'a nieprzeliczalne takie, że każdy ich podzbiór niezależny jest co najwyżej przeliczalny. Zanim przedstawimy stosowny przykład, udowodnimy twierdzenie Juhásza, które dostarczy nam warunku koniecznego na to, aby przestrzeń zwarta miała odwzorowanie ciągłe na kostkę Cantora D^{τ}.

Ustalmy punkt x przestrzeni topologicznej X. Rodzinę R zbiorów niepustych i otwartych w przestrzeni X nazywamy π - b a z ą w p u n k c i e x, gdy każde otoczenie otwarte punktu x zawiera pewien element rodziny R. Liczbę kardynalną $\pi\chi(x,X) = \min\{|R| : R$ jest π-bazą przestrzeni X w punkcie $x\}$ będziemy nazywali π-c h a r a k t e r e m przestrzeni X w punkcie x. Oczywiście $\pi\chi(x,X) \leq \chi(x,X)$, dla każdego $x \in X$.

LEMAT 1. Dla każdego $x \in D^{\tau}$, $\pi\chi(x, D^{\tau}) = \tau$.

Dowód. Nierówność $\pi\chi(x,D^{\tau}) \leq \tau$ jest oczywista, bo $w(D^{\tau}) = \tau$.

Dla dowodu nierówności przeciwnej ustalmy π-bazę R w punkcie $x \in D^{\tau}$ taką, że $|R| = \pi\chi(x,D^{\tau})$. Bez zmniejszenia ogólności możemy zakładać, że elementami rodziny R są zbiory bazowe, tzn. zbiory postaci $p_{\alpha_1}^{-1}(i_1) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(i_n)$, gdzie $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \tau$ oraz $i_k \in \{-1, 1\}$

(patrz rozdział I, § 2). Niech S będzie rodziną tych wszystkich zbiorów skończonych $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subset\tau$, takich, że $p_{\alpha_1}^{-1}(i_1)\cap\dots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(i_n)\in R$ przy pewnym układzie $\{i_1,\dots,i_n\}$ jedynek i minus-jedynek. Przypuśćmy że $|R|<\tau$. Wówczas $|S|<\tau$, a więc istnieje $\alpha\in\tau$ takie, które nie należy do żadnego elementu rodziny S. Obierzmy $i\in\{-1,1\}$ tak, aby $x\in p_\alpha^{-1}(i)$. Ponieważ dla każdego zbioru $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\in S$,

$$p_{\alpha_1}^{-1}(i_1)\cap\dots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(i_n)\not\subset p_\alpha^{-1}(i)$$

(niezależnie od wyboru liczb i_k), więc R nie jest π-bazą w punkcie x. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

TWIERDZENIE 2 (I. J u h á s z, 1967). Jeśli przestrzeń zwarta X ma odwzorowanie ciągłe f na kostkę D^τ, to istnieje podprzestrzeń domknięta $Z\subset X$ taka, że $f(Z) = D^\tau$ oraz $\pi\chi(x,Z)\geqslant\tau$, dla każdego $x\in \in Z$.

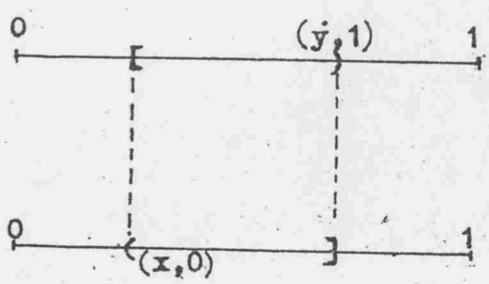
Dowód. Każde odwzorowanie g ciągłe na przestrzeni zwartej X można zacieśnić do pewnej podprzestrzeni domkniętej $Z\subset X$, tak aby $g(Z)= = g(X)$ oraz $g|Z$ było odwzorowaniem nieprzywiedlnym; patrz rozdział II, § 4, lemat 2. Niech Z będzie taką właśnie podprzestrzenią dla odwzorowania f. Niech R będzie π-bazą w punkcie $x\in Z$ względem przestrzeni Z. Z nieprzywiedlności odwzorowania $f|Z$ wynika, że rodzina $P = \{D^\tau - f(Z - U) : U\in R\}$ składa się ze zbiorów otwartych i niepustych w D^τ. Jeśli $V\subset D^\tau$ jest otoczeniem otwartym punktu $f(x)$, to $f^{-1}(V)\cap Z$ jest otoczeniem otwartym punktu x. Zatem istnieje $U\in R$ takie, że $U\subset f^{-1}(V)$. Łatwo zauważyć, że $D^\tau - f(Z - U)\subset V$, co pokazuje, że P jest π-bazą przestrzeni D^τ w punkcie $f(x)$. Na mocy lematu 1 $|P|\geqslant\tau$. Zatem $|R|\geqslant\tau$, co kończy dowód twierdzenia.

B.E. S z a p i r o w s k i (1980) udowodnił, że jeśli przestrzeń zwarta X zawiera podprzestrzeń domkniętą Z taką, że $\pi\chi(x,Z)\geqslant\tau$ dla każdego $x\in Z$, to X ma odwzorowanie ciągłe na kostkę Tichonowa I^τ. Warto zaznaczyć przy tej okazji, że kostka Tichonowa I^τ jest obrazem ciągłym kostki Cantora D^{τ} dla $\tau \geq \omega$. Nietrudno także zauważyć, że kostkę D^{τ} występującą w twierdzeniu Juhásza można zastąpić kostką I^{τ}. W tej wersji twierdzenie Juhásza jest odwracalne; twierdzeniem do niego odwrotnym jest wspomniane już twierdzenie Szapirowskiego.

Z twierdzenia Juhásza wynika w szczególności, że warunkiem koniecznym na to, aby algebra Boole'a zawierała zbiór niezależny mocy τ, jest, aby jej przestrzeń Stone'a w co najmniej jednym punkcie miała charakter większy bądź równy τ (w rzeczywistości moc zbioru takich punktów nie może być mniejsza niż 2^{τ}). Opierając się na tej przesłance, pokażemy przykład algebry Boole'a mocy 2^{ω} i saturowalności równej ω_1, w której każdy zbiór niezależny jest przeliczalny.

Przykład. Niech $I = [0,1]$ będzie przedziałem domkniętym w zbiorze liczb rzeczywistych, a $X = I \times \{0,1\}$. W zbiorze X określamy porządek leksykograficzny, tzn. porządek określony wzorem:

$$(x,i) < (y,j) \Leftrightarrow x < y \text{ lub } x = y \text{ oraz } i < j \quad \text{(patrz rysunek)}$$



Jest to porządek liniowy, a przedziały w sensie tego porządku wyznaczają w zbiorze X topologię zwartą (Hausdorffa). Topologia ta jest zero-wymiarowa, bo przedziały postaci $((x,0), (y,1))$, gdzie $x < y$, są zbiorami domknięto-otwartymi. Ponieważ w każdym punkcie przestrzeni X istnieje baza przeliczalna, więc $\chi(x,X) = \omega$ dla każdego $x \in X$. Zbiór $\{(z,i) : i \in \{0,1\}$ oraz z jest liczbą wymierną odcinka $I\}$ jest gęsty w X. Wynika stąd, że $c(X) = \omega$. Pozostaje sprawdzić, że $w(X) = 2^{\omega}$. Istotnie, jeśli R jest rodziną zbiorów otwartych w przestrzeni X oraz $|R| < 2^{\omega}$, to istnieje punkt $(x,1)$ w zbiorze X, który nie jest kresem dolnym żadnego zbioru z rodziny R i taki, że $x<1$. Łatwo sprawdzić, że w zbiorze R nie istnieje zbiór otwarty U taki, że $(x,1)\in U$ i $U\subset((x,0),(1,1))$. Zatem R nie może być bazą w przestrzeni X, czyli $w(X)=2^{\omega}$.

Z tego, co wykazaliśmy o przestrzeni X, oraz z twierdzeń 1 i 2 wynika, że algebra Boole'a $B=CO(X)$ ma następujące własności: $|B|=2^{\omega}$ $sat(B)=\omega_1$ oraz każdy zbiór niezależny w B jest przeliczalny. Dalej przedstawimy twierdzenie Shelaha, które mówi, że jeśli algebra Boole'a B ma moc $(2^{\omega})^+$ i $sat(B)=\omega_1$, to B zawiera zbiór niezależny mocy $(2^{\omega})^+$.

Niech C będzie podalgebrą algebry Boole'a zupełnej B. Mówimy, że C jest podalgebrą zupełną algebry B, jeśli każdy zbiór $A\subset C$ ma kres górny w algebrze C, który ponadto pokrywa się z kresem górnym zbioru A traktowanego jako podzbiór algebry B.

Niech B będzie algebrą Boole'a, a B^c jej uzupełnieniem. Dla każdego zbioru $A\subset B$ niech $A^c=\bigcap\{C : C$ jest podalgebrą zupełną algebry B^c oraz $A\subset C\}$. Nietrudno sprawdzić, że A^c jest podalgebrą zupełną algebry B^c zawierającą jako podzbiór gęsty podalgebrę algebry B, generowaną przez zbiór A. Zbiór A^c jest uzupełnieniem algebry generowanej przez zbiór A.

LEMAT 2. Jeśli algebra Boole'a B ma moc $(2^{\omega})^+$ i $sat(B)=\omega_1$, to w B istnieje ciąg $\{a_\alpha : \alpha<(2^{\omega})^+\}$ taki, że dla każdego $\alpha<(2^{\omega})^+$ zbiory $B_\alpha=(\{a_\xi : \xi<\alpha\})^c$ mają następujące własności:

(1) $a_\alpha\notin B_\alpha$,

(2) jeśli $\beta<\alpha$, to $a_\beta\in B_\alpha$,

(3) jeśli $\alpha<\beta$, to $B_\alpha\subset B_\beta$,

(4) jeśli $cf(\alpha)\geq\omega_1$, to $B_\alpha=\bigcup\{B_\xi : \xi<\alpha\}$,

(5) $\bigcup\{B_\alpha : \alpha<(2^{\omega})^+\}=B^c$.

Dowód. Zauważmy wpierw, że dla każdego zbioru $A\subset B$, jeśli $|A|<(2^{\omega})^+$, to także $|A^c|<(2^{\omega})^+$. Istotnie, jeśli $|A|\leq 2^{\omega}$, to A^c zawiera podzbiór gęsty mocy nie większej niż 2^{ω}. Zatem, na mocy lematu 4, § 1, $|A^c| \leq (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega}$, bo $sat(A^c) \leq sat(B^c) = \omega_1$.

Ustawmy elementy algebry Boole'a B w ciąg $\{b_{\alpha} : \alpha < (2^{\omega})^+\}$. Metodą indukcji pozaskończonej określamy ciąg $\{a_{\alpha} : \alpha < (2^{\omega})^+\} \subset B$ w ten sposób, że jeśli elementy a_{β} dla $\beta < \alpha$ są już określone, to przyjmujemy $a_{\alpha} = b_{\xi(\alpha)}$, gdzie $\xi(\alpha) = \min\{\xi < (2^{\omega})^+ : b_{\xi} \in B - (\{a_{\beta} : \beta < \alpha\})^c\}$. Wybór taki jest możliwy, bo $|(\{a_{\beta} : \beta < \alpha\})^c| < 2^{\omega}$, więc $B - (\{a_{\beta} : \beta < \alpha\})^c \neq \emptyset$. Łatwo zauważyć, że zbiory $B_{\alpha} = (\{a_{\beta} : \beta < \alpha\})^c$ spełniają własności (1) - (3).

Jeśli $\alpha < (2^{\omega})^+$ i $cf(\alpha) \geq \omega_1$, to $\bigcup\{B_{\xi} : \xi < \alpha\}$ jest algebrą ω_1-zupełną. Ponieważ jej saturowalność jest równa ω_1, to $\bigcup\{B_{\xi} : \xi < \alpha\}$ jest algebrą zupełną. Z drugiej strony $\{a_{\xi} : \xi < \alpha\} \subset \bigcup\{B_{\xi} : \xi < \alpha\}$. Stąd otrzymujemy własności (4) i (5), co kończy dowód.

LEMAT 3. Niech algebra Boole'a B, ciąg $\{a_{\alpha} : \alpha < (2^{\omega})^+\}$ oraz algebry B_{α} będą takie, jak w lemacie 2. Określmy funkcje $f, F : (2^{\omega})^+ \longrightarrow B^c$ następującymi wzorami:

$$(6) \quad \begin{aligned} f(\alpha) &= \sup\{x \in B_{\alpha} : x \leq a_{\alpha}\}, \\ F(\alpha) &= \inf\{x \in B_{\alpha} : a_{\alpha} \leq x\}, \end{aligned}$$

a funkcję $h : (2^{\omega})^+ \longrightarrow B^c \times B^c$ wzorem:

$$(7) \quad h(\alpha) = (f(\alpha), F(\alpha)).$$

Jeśli funkcja h jest stała na zbiorze S, to $\{a_{\alpha} : \alpha \in S\}$ jest zbiorem niezależnym w algebrze Boole'a B.

Dowód. Dla każdego $\alpha < (2^{\omega})^+$, $f(\alpha) \leq a_{\alpha} \leq F(\alpha)$ oraz $f(\alpha), F(\alpha) \in B_{\alpha}$. Na mocy (1), $a_{\alpha} \notin B_{\alpha}$, więc:

$$(8) \quad f(\alpha) < a_{\alpha} < F(\alpha), \text{ dla każdego } \alpha < (2^{\omega})^+.$$

Niech $b_1, b_2 \in B^c$ będą takie, że $h(\alpha) = (b_1, b_2)$ dla każdego $\alpha \in S$. Na mocy (8) i (7) $b_2 - b_1 > 0$. Pokażemy, że

(9) dla każdego $\alpha \in S$, jeśli $x \in B_{\alpha}$ i $0 < x \leq b_2 - b_1$, to $x \wedge a_{\alpha} \neq 0$ i $x \wedge - a_{\alpha} \neq 0$.

Przypuśćmy, że $x \wedge a_\alpha = 0$. Wówczas $a_\alpha \leq -x$, czyli $F(\alpha) \leq -x$ (bo $-x \in B_\alpha$). Skoro $F(\alpha) = b_2$, więc $b_2 \wedge x = 0$, sprzeczność.

Przypuśćmy, że $x \wedge -a_\alpha = 0$. Wówczas $x \leq a_\alpha$, czyli $x \leq f(\alpha)$. Zatem $x \wedge -b_1 = 0$, co także prowadzi do sprzeczności.

Warunek (9) jest szczególnym przypadkiem następującego warunku:

(10) jeśli $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset S$ i, dla $k \leq n$, $i_k \in \{-1, 1\}$ oraz $0 < x \leq b_2 - b_1$ i $x \in B_{\alpha_k}$ dla $k \leq n$, to $x \wedge i_1 a_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge i_n a_{\alpha_n} \neq 0$,

gdzie $1a_\alpha = a_\alpha$ oraz $-1a_\alpha = -a_\alpha$.

Zanim udowodnimy warunek (10), zauważmy, że bezpośrednio z niego wynika teza lematu. W tym celu przyjmujemy $x = b_2 - b_1$. Skoro dla każdego $\alpha \in S$, $b_1 = f(\alpha) \in B_\alpha$ i $b_2 = F(\alpha) \in B_\alpha$, to $x = b_2 - b_1 \in B_\alpha$.

Warunku (10) dowodzimy indukcyjnie ze względu na n. Przy $n = 1$ warunki (9) i (10) pokrywają się. Załóżmy, że warunek (10) jest prawdziwy dla każdego n-elementowego podzbioru zbioru S. Niech $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\} \subset S$ i niech, dla każdego $k \leq n+1$, $i_k \in \{-1, 1\}$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $\alpha_{n+1} > \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Załóżmy także, że $x \in B_{\alpha_k}$ dla każdego $k \leq n+1$, oraz $0 < x \leq b_2 - b_1$. Z założenia indukcyjnego mamy:

$$y = x \wedge i_1 a_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge i_n a_{\alpha_n} \neq 0.$$

Na mocy warunków (2) i (3) $y \in B_{\alpha_{n+1}}$. Ponieważ $0 < y \leq x \leq b_2 - b_1$, więc, na mocy warunku (9), $y \wedge i_{n+1} a_{\alpha_{n+1}} \neq 0$, co kończy dowód.

TWIERDZENIE 3 (S. Shelah, 1980). Jeśli algebra Boole'a ma moc nie mniejszą niż $(2^\omega)^+$, a saturowalność nie większą niż ω_1, to zawiera zbiór niezależny mocy $(2^\omega)^+$.

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności możemy zakładać, że $|B| = (2^\omega)^+$. Skoro zbiór B^- jest gęsty w B^c, to $|B^c| \leq ((2^\omega)^+)^\omega$. Na mocy twierdzenia Hausdorffa (patrz rozdział III, § 1) $|B^c| \leq (2^{\omega^+}) \cdot (2^\omega)^\omega = (2^\omega)^+$. Zatem istnieje funkcja różnowartościowa $g : B^c \times B^c \longrightarrow (2^\omega)^+$ taka, że

$g(B^c \times B^c) = (2^\omega)^+$. Wykażemy, że zbiór $S = \{\alpha<(2^\omega)^+ : g(B_\alpha \times B_\alpha) \subset \alpha\}$ jest stacjonarny.

Niech $x \subset (2^\omega)^+$ będzie zbiorem domkniętym nieograniczonym. Jeśli $\alpha<(2^\omega)^+$, to $|g(B_\alpha \times B_\alpha)|<(2^\omega)^+$. Istnieje zatem $\beta>\alpha$ takie, że $\beta \in x$ i $g(B_\alpha \times B_\alpha) \subset \beta$. Metodą indukcji pozaskończonej możemy określić ciąg $\{\alpha_\xi : \xi<\omega_1\}$ taki, że

(11) $\alpha_\xi \in x$ i $\alpha_\xi<\alpha_{\xi+1}$, dla $\xi<\omega_1$,

(12) $g(B_{\alpha_\xi} \times B_{\alpha_\xi}) \subset \alpha_{\xi+1}$,

(13) jeśli η jest liczbą porządkową graniczną, to $g(\bigcup\{B_{\alpha_\xi} \times B_{\alpha_\xi} : \xi<\eta\}) \subset \alpha_\eta$.

Konstrukcja taka jest możliwa, bo $\mathrm{cf}((2^\omega)^+) = (2^\omega)^+ > \omega_1$. Niech $\alpha = \sup\{\alpha_\xi : \xi<\omega_1\}$. Ponieważ zbiór x jest domknięty, więc, na mocy (11), $\alpha \in x$. Z warunku (4) wynika, że

$$g(B_\alpha \times B_\alpha) = g(\bigcup\{B_{\alpha_\xi} \times B_{\alpha_\xi} : \xi<\omega_1\}) = \bigcup\{g(B_{\alpha_\xi} \times B_{\alpha_\xi} : \xi<\omega_1\} \subset \sup\{\alpha_{\xi+1} : \xi<\omega_1\} = \alpha.$$

Zatem $S \cap x \neq \emptyset$. Wobec dowolności zbioru x oznacza to, że S jest zbiorem stacjonarnym.

Funkcja $H = g \circ h$, gdzie funkcja h jest określona wzorem (7), jest regresywna na zbiorze stacjonarnym S. Istotnie, jeśli $\alpha \in S$, to $h(\alpha) = (f(\alpha), F(\alpha)) \in B_\alpha \times B_\alpha$, czyli $g(h(\alpha))<\alpha$. Na mocy twierdzenia Fodora (patrz rozdział III, § 2) istnieje zbiór stacjonarny $S_1 \subset S$ taki, że funkcja $H|S_1$ jest stała. Ponieważ funkcja g jest różnowartościowa, więc także funkcja $h|S_1$ jest stała. Na mocy lematu 3 zbiór $\{a_\alpha : \alpha \in S_1\}$ jest niezależny. Skoro zbiór S_1 jest stacjonarny, to $|S_1| = (2^\omega)^+$. Zatem w algebrze Boole'a B istnieje zbiór niezależny mocy $(2^\omega)^+$, co kończy dowód.

Twierdzenie Shelaha w wersji topologicznej mówi, że jeśli X jest przestrzenią zwartą zero-wymiarową, $w(X) \geq (2^\omega)^+$ oraz $c(X) = \omega$, to

X ma odwzorowanie ciągłe na kostkę Cantora $D^{(2^{\omega})^+}$. Nietrudno zauważyć, że liczbę ω można zastąpić dowolną liczbą kardynalną większą niż ω.

§ 5. Zbiory niezależne w algebrach Boole'a zupełnych. Twierdzenie Balcara-Franka

Rodzinę R rozbić algebry Boole'a B nazywamy **rodziną niezależną**, gdy dla każdego zbioru skończonego $\{P_1, \ldots, P_n\} \subset R$ i dla każdego $x \in \Pi\{P_i : i = 1, \ldots, n\}$

$$x(1) \wedge \ldots \wedge x(n) \neq 0.$$

Jeśli zbiór $A \subset B$ jest zbiorem niezależnym (patrz § 4), to rodzina $\{P_u : u \in A\}$, gdzie $P_u = \{u, -u\}$, jest rodziną niezależną rozbić algebry Boole'a B. Na odwrót, jeśli R jest rodziną niezależną rozbić algebry Boole'a B, to dla każdego $x \in \Pi\{P : P \in R\}$ zbiór $\{x(P) : P \in R\}$ jest zbiorem niezależnym w algebrze B. Wynika stąd, że algebra Boole'a B zawiera zbiór niezależny mocy τ wtedy i tylko wtedy, gdy ma rodzinę rozbić niezależną mocy τ. Ze względów technicznych, zamiast zbiorów niezależnych będziemy rozważali rodziny niezależne rozbić.

LEMAT 1. Niech R będzie rodziną niezależną rozbić algebry Boole'a B. Istnieje rodzina niezależna R' rozbić algebry Boole'a B, która jest maksymalna (w sensie inkluzji) wśród rodzin niezależnych zawierających R.

Dowód. Dla dowodu lematu wystarczy zauważyć, że każdy łańcuch (w sensie relacji zawierania), złożony z rodzin niezależnych rozbić algebry Boole'a B, jest ograniczony i zastosować lemat Kuratowskiego-Zorna.

LEMAT 2 (B. Balcar - F. Franěk, 1979). Niech P będzie rozbiciem algebry Boole'a zupełnej B. Jeśli dla każdego $u \in B$ w algebrze Boole'a $B|u$ istnieje rodzina niezależna rozbić $R(u)$ i $|R(u)|\geq\omega$, to w algebrze Boole'a B istnieje rodzina niezależna rozbić R taka, że $|R| = \prod\{|R(u)| : u\in P\}$.

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności możemy zakładać, że dla każdego $u\in P$ elementy rodziny $R(u)$ są rozbiciami dwuelementowymi, tzn. są postaci $\{v_0,v_1\}$. Z twierdzenia 2, rozdział III, § 3 wynika, że istnieje zbiór $S\subset\prod\{R(u) : u\in P\}$ taki, że $|S| = |\prod\{R(u) : u\in P\}| = \prod\{|R(u)| : u\in P\}$ oraz dla każdego zbioru skończonego $\{x_1,\dots,x_n\}\subset S$ istnieje $u\in P$ takie, że

(1) jeśli $k\neq j$, to $x_k(u)\neq x_j(u)$.

Dla każdego $x\in S$ oraz $i\in\{0,1\}$ niech

(2) $(w(x))_i = \sup\{(x(u))_i : u\in P\}$,

gdzie $\{(x(u))_0, (x(u))_1\}\in R(u)$, $u\in P$. Niech $R = \{\{(w(x))_0,(w(x))_1\} : x\in S\}$. Pokażemy, że R jest rodziną niezależną rozbić algebry Boole'a B.

Z określenia (2) wynika, że dla każdego $x\in S$, $(w(x))_0\vee(w(x))_1 = 1$, bo $(x(u))_0\vee(x(u))_1 = u$ oraz P jest rozbiciem algebry B. Zatem R jest rodziną rozbić algebry B.

Ustalmy zbiór $\{x_1,\dots,x_n\}\subset S$ oraz dla każdego $k\leq n$ ustalmy $i_k\in\{0,1\}$. Wykażemy, że

(3) $(w(x_1))_{i_1}\wedge\dots\wedge(w(x_n))_{i_n}\neq 0$.

Z własności (1) i niezależności rodzin $R(u)$ wynika, że istnieje $u\in P$, dla którego $(x_1(u))_{i_1}\wedge\dots\wedge(x_n(u))_{i_n}\neq 0$. Zatem, z określenia (2) wynika własność (3), która oznacza, że R jest rodziną niezależną.

Skoro $|S| = |R|$, to $|R| = \prod\{|R(u)| : u\in P\}$, co kończy dowód.

LEMAT 3 (F. H a u s d o r f f, 1936). Dla każdej liczby kardynalnej nieskończonej $\varkappa$ algebra Boole'a $P(\varkappa)$ zawiera zbiór niezależny mocy $2^{\varkappa}$.

Dowód. Ustalmy zbiór $u \subset \aleph$ taki, że $|u| = \aleph$. Metodą indukcji matematycznej skonstruujemy rodzinę niezależną $\{Q_n : n<\omega\}$ rozbić algebry Boole'a $P(u)$, tak, aby dla każdego $n<\omega$ był spełniony warunek:

(4) jeśli $x \in \prod\{Q_k : k \leq n\}$, to $|x(1) \cap \ldots \cap x(n)| = \aleph$.

Załóżmy, że rozbicia $Q_1, \ldots, Q_n$ już są skonstruowane. Z warunku (4) wynika, że dla każdego $x \in Q_1 \times \ldots \times Q_n$ można obrać dwa rozłączne zbiory $w_1(x)$ i $w_2(x)$ mocy $\aleph$, tak aby

(5) $w_1(x) \cup w_2(x) \subset x(1) \cap \ldots \cap x(n)$,

(6) jeśli $x, y \in Q_1 \times \ldots \times Q_n$ i $x \neq y$, to
$w_i(x) \cap w_j(y) = \emptyset$, dla $i, j \in \{1, 2\}$.

Niech $w = \bigcup\{w_1(x) : x \in Q_1 \times \ldots \times Q_n\}$ i niech $Q_{n+1} = \{w, u-w\}$. Łatwo sprawdzić, że rozbicia $Q_1, \ldots, Q_n, Q_{n+1}$ spełniają warunek (4). Tym samym rodzina niezależna $\{Q_n : n<\omega\}$ rozbić algebry Boole'a $P(u)$ została określona.

Ponieważ każdy zbiór mocy $\aleph$ można przedstawić jako sumę $\aleph$ podzbiorów mocy $\aleph$ (bo $|\aleph \times \aleph| = \aleph$), więc, na mocy lematu 2, w $P(\aleph)$ istnieje rodzina mocy $\omega^{\aleph} (= 2^{\aleph})$ rozbić niezależnych.

LEMAT 4 (B. Jefimow, 1970). Jeśli algebra Boole'a zupełna B ma rozbicie mocy $\aleph$, to zawiera zbiór niezależny mocy $2^{\aleph}$.

Dowód. Niech $\{u_\alpha : \alpha < \aleph\}$ będzie rozbiciem algebry Boole'a B. Dla każdego $x \subset \aleph$ niech

$$w(x) = \sup\{u_\alpha : \alpha \in x\}.$$

Na mocy lematu 3 algebra Boole'a $P(\aleph)$ ma rodzinę niezależną rozbić R, $|R| = 2^{\aleph}$. Niech

$$R_1 = \{\{w(x) : x \in Q\} : Q \in R\}.$$

Pokażemy, że R_1 jest rodziną niezależną rozbić algebry B i $|R_1| = 2^{\aleph}$.

Jeśli $\{Q_1,\dots,Q_n\}$ jest podzbiorem skończonym rodziny R oraz $x_i \in Q_i$ dla $i \le n$, to istnieje $\alpha \in \varkappa$ takie, że $\alpha \in x_1 \cap \dots \cap x_n$, bo R jest rodziną niezależną. Zatem $0 < u_\alpha \le w(x_1) \wedge \dots \wedge w(x_n)$, co dowodzi niezależności rodziny R_1.

Łatwo zauważyć, że skoro Q jest rozbiciem algebry $P(\varkappa)$, to $\sup\{w(x) : x \in Q\} = 1$. Zatem R_1 jest rodziną rozbić. Ponieważ $|R| = 2^{\varkappa}$, więc $|R_1| = 2^{\varkappa}$.

LEMAT 5 (D.A. W ł a d i m i r o w, 1969; J.D. M o n k, 1977). Niech R będzie rodziną niezależną rozbić algebry Boole'a zupełnej B. Dla każdego zbioru $s = \{Q_1,\dots,Q_n\} \subset R$ niech $Q_s = \{u_1 \wedge \dots \wedge u_n : u_i \in Q_i$ oraz $i = 1,\dots,n\}$ i niech $R_1 = \{Q_s :$ s jest podzbiorem skończonym zbioru $R\}$. Dla każdego $P \in R_1$ niech $\bar{P} = \{\sup(A) : A \subset P\}$ i niech $\bar{R}$ będzie zbiorem wszystkich elementów postaci $y_1 \wedge y_2$, gdzie $y_1, y_2 \in \{\inf\{x(\bar{P}) : P \in R_1\} : x \in \Pi\{\bar{P} : P \in R_1\}\}$. Jeśli dla każdego $u \in B - \{0\}$ zbiór $\{a \in \bar{R} : a \le u\}$ nie jest gęsty w algebrze $B \restriction u$, to istnieje rozbicie Q takie, że $Q \notin R$ i $R \cup \{Q\}$ jest rodziną niezależną rozbić algebry Boole'a B.

Dowód. Wystarczy wykazać, że istnieje rozbicie $Q = \{w_0, w_1\}$ algebry Boole'a B takie, że dla każdego $u \in \bigcup\{P : P \in R_1\}$ i dla każdego $i \in \{0,1\}$ zachodzi warunek:

(7) $u \wedge w_i \ne 0$.

Zanim przystąpimy do konstrukcji rozbicia Q, zauważmy, że dla każdego $P \in R_1$, P jest rozbiciem algebry Boole'a B. Wynika to stąd, że dla każdego $A_1, A_2 \subset B$ zachodzi wzór: $\sup(A_1) \wedge \sup(A_2) = \sup\{u \wedge w : u \in A_1$ i $w \in A_2\}$ (porównaj lemat 3, § 2).

Ustalmy element $u \in \bigcup\{P : P \in R_1\}$. Skoro zbiór $\{a \in \bar{R} : a \le u\}$ nie jest gęsty w $B \restriction u$, to istnieje element $x(u) \in B - \{0\}$ taki, że

(8) $x(u) \le u$ i dla każdego $a \in \bar{R}$, $a - x(u) \ne 0$.

Niech $y(u) = \inf\{\sup\{w \in P : w \wedge x(u) \ne 0\} : P \in R_1\}$. Zauważmy, że

(9) $x(u) \le y(u) \le u$.

Istotnie, jeśli $u \in P \in R_1$, to $\sup\{w \in P: w \wedge x(u) \neq 0\} = u$, bo P jest rozbiciem i $x(u) \leq u$. Zatem $y(u) \leq u$. Stąd, że każde $P \in R_1$ jest rozbiciem algebry B, wynika nierówność $x(u) \leq \sup\{w \in P: w \wedge x(u) \neq 0\}$, czyli $x(u) \leq y(u)$; co dowodzi warunku (9).

Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje zbiór $A \subset \bigcup\{P: P \in R_1\}$ taki, że zbiór $\{y(u) : u \in A\}$ jest maksymalny wśród tych podzbiorów zbioru $\{y(u) : u \in \bigcup\{P : P \in R_1\}\}$, które składają się z elementów rozłącznych. Niech $w_0 = \sup\{x(u) : u \in A\}$ i $w_1 = -w_0$. Wykażemy, że $Q = \{w_0, w_1\}$ jest żądanym rozbiciem, tzn. spełnia warunek (7).

Z maksymalności zbioru $\{y(v) : v \in A\}$ wynika, że dla każdego $u \in P \in R_1$ istnieje $v \in A$ takie, że $y(u) \wedge y(v) \neq 0$. Zatem, na mocy warunku (9), $u \wedge y(v) \neq 0$. Stąd oraz z określenia elementu $y(v)$ wnioskujemy, że $u \wedge x(v) \neq 0$. Zatem $u \wedge w_0 \neq 0$, bo $v \in A$.

Ustalmy element $v \in A$. Jeśli $v' \in A$ i $v' \neq v$, to $y(v) \wedge y(v') = 0$. Zatem, na mocy warunku (9), zachodzi:

$$(10) \quad y(v) \wedge -x(v) \leq \inf\{-x(v') : v' \in A\} = -w_0 = w_1.$$

Dla każdego $u \in P \in R_1$, $y(u) \wedge y(v) \in \bar{R}$. Na mocy warunku (8) mamy więc $y(u) \wedge y(v) \wedge -x(v) \neq 0$. Stąd oraz z warunku (10) wynika, że

$$u \wedge w_1 \geq y(u) \wedge y(v) \wedge -x(v) > 0,$$

co kończy dowód.

Mówimy, że algebra Boole'a B jest *jednorodna ze względu na gęstość*, gdy dla każdego $u \in B - \{0\}$ algebra $B \restriction u$ ma tę samą gęstość, co B.

LEMAT 6. Każda algebra Boole'a B ma rozbicie P takie, że dla dowolnego $u \in P$ algebra $B \restriction u$ jest jednorodna ze względu na gęstość.

Dowód jest analogiczny do dowodu lematu 2 z § 1, więc możemy go pominąć.

TWIERDZENIE 1 (S. K i s l i a k o w, 1973; S. K o p p e l b e r g, 1973). Jeśli B jest algebrą Boole'a zupełną, nieskończoną i jednorodną ze względu na gęstość, a $\mathrm{sat}(B)$ nie jest liczbą kardynalną graniczną, to algebra B zawiera zbiór niezależny tej samej mocy co moc algebry Boole'a B.

Dowód (przedstawimy go w wersji podanej przez B. B a l c a r a i F. F r a n k a (1979). Niech $\pi(B) = \lambda$ i niech $\mathrm{sat}(B) = \varkappa^+$. Wykażemy, że $|B| = \lambda^\varkappa$. Nierówność $|B| \leq \lambda^\varkappa$ wynika z lematu 4 z § 1. Dla dowodu nierówności przeciwnej ustalmy rozbicie P algebry Boole'a B takie, że $|P| = \varkappa$. Skoro algebra B jest jednorodna ze względu na gęstość, to $\lambda = \pi(B\restriction u) \leq |B\restriction u|$ dla każdego $u \in P$. Zatem $\lambda^\varkappa \leq \prod\{|B\restriction u| : u \in P\} = |B|$.

Niech teraz η będzie najmniejszą liczbą kardynalną taką, że $\eta^\varkappa = \lambda^\varkappa$. Oczywiście $\eta \leq \lambda$. Zauważmy, że

(11) jeśli $\tau < \eta$, to $\tau^\varkappa < \lambda$.

Istotnie, gdyby $\tau^\varkappa \geq \lambda$, to $\tau^\varkappa = (\tau^\varkappa)^\varkappa \geq \lambda^\varkappa$. Z drugiej strony $\tau^\varkappa \leq \lambda^\varkappa$, bo $\tau < \eta \leq \lambda$. Zatem $\tau^\varkappa = \lambda^\varkappa$ i $\tau < \eta$, co jest sprzeczne z określeniem liczby η.

Wykażemy, że liczba η ma następującą własność:

(12) $\eta = 2$ lub $\eta > 2^\varkappa$.

Istotnie, jeśli $\eta \leqq 2^\varkappa$, to $\eta^\varkappa \leq (2^\varkappa)^\varkappa = 2^\varkappa \leq \eta^\varkappa$. Zatem $\lambda^\varkappa = \eta^\varkappa = 2^\varkappa$, czyli $\eta = 2$ (na mocy określenia liczby η).

Skoro $\mathrm{sat}(B) = \varkappa^+$, to istnieje w algebrze B rozbicie mocy $\varkappa$. Zatem, na mocy lematu 4, w B istnieje zbiór niezależny mocy $2^\varkappa$. Ponieważ $|B| = \lambda^\varkappa = \eta^\varkappa$, więc możemy zakładać, że zachodzi drugi człon alternatywy (12), tzn. $2^\varkappa < \eta$.

Niech P będzie rozbiciem mocy $\varkappa$ algebry B. Ustalmy element $u \in P$. Na mocy lematu 1 istnieje rodzina niezależna R maksymalna rozbić algebry Boole'a $B\restriction u$. Wykażemy, że $|R| \geq \eta$.

Przypuśćmy, że $|R| < \eta$. Niech $R_1, \bar{R}$ oznaczają to samo co w lemacie 5. Ponieważ $|R| > \omega$, więc $|R_1| = |R| < \eta$. Jeśli $P \in R_1$, to $|P| \leq \varkappa$, bo P jest rozbiciem i $\mathrm{sat}(B) = \varkappa^+$. Zatem $|\bar{P}| \leq 2^\varkappa$ dla każdego $P \in R_1$. Wynika stąd, że jeśli B_1 jest podalgebrą algebry B generowaną przez zbiór $\bigcup\{P\colon P \in R_1\}$, to $|B_1| \leq 2^{\aleph} \cdot |R|$, czyli (na mocy warunku (12)) $|B_1| < \eta$. Skoro $\mathrm{sat}(B_1) \leq \mathrm{sat}(B) = \aleph^+$, to $|B_1^c| \leq |B_1|^{\aleph}$. Zatem, na mocy warunku (11), $|B_1^c| < \lambda$. Ponieważ $\bar{R} \subset B_1^c$, więc $|\bar{R}| < \lambda$. Skoro dla każdego $v \in B - \{0\}$, $\pi(B{\restriction}v) = \lambda$, to zbiór $\{a \in \bar{R}\colon a \leq w\}$ nie jest gęsty w $B{\restriction}w$ dla każdego $w \in B{\restriction}u$. Zgodnie z lematem 5 oznacza to, że R nie jest rodziną niezależną maksymalną. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $|R| \geq \eta$.

Zatem wykazaliśmy, że dla każdego $u \in P$ w algebrze Boole'a $B{\restriction}u$ istnieje rodzina mocy η rozbić niezależnych. Wynika stąd na mocy lematu 2, że w algebrze Boole'a B istnieje rodzina mocy $\eta^{|P|}$ rozbić niezależnych. Ponieważ $\eta^{|P|} = \eta^{\aleph} = \lambda^{\aleph} = |B|$, twierdzenie jest udowodnione.

Z lematów 2 i 6, twierdzenia 1 i lematu 1 z § 3, oraz ze zdania (*) orzekającego, że

(*) saturowalność każdej algebry Boole'a jest liczbą kardynalną następnikową,

wynika, że każda algebra Boole'a zupełna B zawiera zbiór niezależny tej samej mocy, co moc algebry B. Zgodnie z twierdzeniem Erdősa-Tarskiego saturowalność każdej algebry Boole'a jest liczbą regularną. Zatem warunek (*) jest równoważny zdaniu orzekającemu, że nie istnieją liczby kardynalne słabo nieosiągalne (tzn. liczby regularne graniczne i nieprzeliczalne). Jak wiadomo (T. J e c h, 1973), zdanie takie jest niesprzeczne z aksjomatami teorii mnogości ZFC. Twierdzenie Kisliakowa i Koppelberg daje więc - przy założeniu, że nie istnieją liczby słabo nieosiągalne - pozytywne rozwiązania następującego zagadnienia: czy dla każdej algebry Boole'a zupełnej istnieje zbiór niezależny w B tej samej mocy, co moc tej algebry? Inne częściowe rozwiązanie tego zagadnienia (przy innych dodatkowych aksjomatach teorii mnogości) znaleźli: B. J e f i m o w (1970), J. D. M o n k (1977) i A. B ł a s z c z y k (1978). Całkowite rozwiązanie zagadnienia znaleźli B. B a l c a r i F. F r a n ě k (1979) - patrz twierdzenie 2.

LEMAT 7 (B. B a l c a r - F. F r a n ě k, 1979). Jeśli algebra Boole'a zupełna B jest jednorodna ze względu na saturowalność oraz $sat(B) = \varkappa$ jest liczbą kardynalną graniczną, to istnieje rodzina niezależna R rozbić algebry B taka, że $|R| = \sup\{|P| : P \in R\} = \varkappa$.

Dowód. Niech $\{\tau_\xi : \xi<\varkappa\}$ będzie ciągiem liczb kardynalnych mniejszych od $\varkappa$ takich, że $\sup\{\tau_\xi : \xi<\varkappa\} = \varkappa$. Metodą indukcji pozaskończonej skonstruujemy ciąg $\{P_\xi : \xi<\varkappa\}$ rozbić algebry B tak, by spełnione były następujące warunki:

(13) $|P_\eta| = \tau_\eta$,

(14) $\{P_\xi : \xi<\eta\}$ jest rodziną niezależną rozbić,

dla każdego $\eta<\varkappa$.

Załóżmy, że zbiór rozbić $\{P_\xi : \xi<\alpha\}$ jest już określony w ten sposób, że dla każdego $\eta<\alpha$ spełnione są warunki (13) i (14). Dla każdego ciągu $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}\subset\alpha$ określmy zbiór $Q_{\xi_1,\dots,\xi_n} = \{u_1\wedge\dots\wedge u_n : u_i \in P_{\xi_i}$ dla każdego $i\le n\}$. Niech $T = \bigcup\{Q_{\xi_1,\dots,\xi_n} : \{\xi_1,\dots,\xi_n\}\subset\alpha\}$. Na mocy warunku (14) T składa się z elementów niezerowych. Z warunku (13) i z regularności liczby $\varkappa$ (patrz twierdzenie Erdösa-Tarskiego) wynika, że $|T|<\varkappa$. Ustawmy elementy zbioru T w ciąg $\{v_\beta : \beta<\tau\}$, gdzie $\tau = |T|$. Skoro $\varkappa$ jest liczbą graniczną, to $\tau^+<\varkappa$. Z twierdzenia Balcara-Vojtáša wynika, że istnieje ciąg $\{w_\beta : \beta<\tau\}\subset B - \{0\}$ elementów rozłącznych taki, że $w_\beta \le v_\beta$ dla każdego $\beta<\tau$ (patrz twierdzenie 2, rozdział III, § 1). Ponieważ algebra B jest jednorodna ze względu na saturowalność, więc dla każdego $\beta<\tau$ istnieje rozbicie $\{z_{\beta,\delta} : \delta<\tau_\alpha\}$ algebry Boole'a $B\restriction w_\beta$. Dla każdego $\delta<\tau_\alpha$, $\delta>0$ niech $z_\delta = \sup\{z_{\beta,\delta} : \beta<\tau\}$ i niech $z_0 = -\sup\{z_\delta : \delta<\tau_\alpha$ i $\delta>0\}$. Łatwo sprawdzić, że $P_\alpha = \{z_\delta : \delta<\tau_\alpha\}$ jest rozbiciem oraz $\{P_\xi : \xi\le\alpha\}$ jest rodziną niezależną rozbić algebry B.

Z warunków (13) i (14) wynika, że $R = \{P_\xi : \xi<\varkappa\}$ jest rodziną niezależną rozbić oraz $\sup\{|P_\xi| : \xi<\varkappa\} = \sup\{\tau_\xi : \xi<\varkappa\} = \varkappa$.

TWIERDZENIE 2 (B. B a l c a r, F. F r a n ě k, 1979). Każda algebra Boole'a zupełna (nieskończona) zawiera zbiór niezależny tej samej mocy, co moc tej algebry.

Dowód. Niech A będzie zbiorem wszystkich atomów algebry Boole'a zupełnej B i niech $u = \sup\{a: a \in A\}$. Algebra Boole'a $B \upharpoonright u$ jest atomowa, a więc - na mocy twierdzenia 1 z rozdziału II, § 1 - jest izomorficzna z algebrą $P(A)$. Na mocy lematu 3 w algebrze $B \upharpoonright u$ istnieje podzbiór niezależny tej samej mocy, co moc algebry $B \upharpoonright u$. Ponieważ $|B| = \max\{|B \upharpoonright u|, |B \upharpoonright -u|\}$, więc możemy zakładać, że algebra Boole'a B jest bezatomowa.

Na mocy lematu 6 każda algebra Boole'a ma rozbicie P takie, że dla każdego $u \in P$ algebra $B \upharpoonright u$ jest jednorodna ze względu na gęstość. Każda z algebr $B \upharpoonright u$ ma rozbicie $P(u)$ o tej własności, że dla dowolnego $w \in P(u)$ algebra $B \upharpoonright w$ jest jednorodna ze względu na saturowalność (patrz lemat 2, § 1). Wynika stąd, że algebra Boole'a B ma rozbicie Q takie, że dla każdego $v \in Q$ algebra $B \upharpoonright v$ jest nieskończona i jednorodna ze względu na gęstość i saturowalność. Ponieważ $|B| = \prod\{|B \upharpoonright v| : v \in Q\}$ (patrz lemat 1, § 3), więc - na mocy lematu 2 - wystarczy wykazać, że dla każdego $v \in Q$ algebra $B \upharpoonright v$ ma zbiór niezależny tej samej mocy, co moc algebry $B \upharpoonright v$.

Bez zmniejszenia ogólności możemy więc założyć, że algebra Boole'a B jest zupełna, nieskończona i jednorodna ze względu na gęstość i saturowalność. Na mocy twierdzenia Kisliakową-Koppelberg możemy dodatkowo założyć, że $\mathrm{sat}(B) = \aleph$ jest liczbą kardynalną graniczną. Zgodnie z twierdzeniem Erdösa-Tarskiego $\aleph$ jest liczbą regularną. Niech λ będzie gęstością algebry B. Wykażemy, że $|B| = \lambda^{\underline{\aleph}}$ $(= \sum\{\lambda^{\tau} : \tau$ jest liczbą kardynalną mniejszą niż $\aleph\}$; patrz rozdział III, § 1).

Skoro $\lambda \leq |B|$, to na mocy twierdzenia Jefimowa (patrz § 3) $\lambda^{\tau} \leq |B|^{\tau} = |B|$ dla każdego $\tau < \aleph$. Zatem $\lambda^{\underline{\aleph}} \leq |B|$. Nierówność przeciwna wynika z lematu 4 z § 1. Mamy więc równość $|B| = \lambda^{\underline{\aleph}}$.

Niech η będzie najmniejszą liczbą kardynalną taką, że $\eta^{\underline{\aleph}} = \lambda^{\underline{\aleph}}$. Oczywiście $\eta \leq \lambda$. Zauważmy, że

(15) jeśli $\tau<\eta$, to $\tau^{\aleph}<\lambda$.

Istotnie, przypuśćmy, że $\tau<\eta$ i $\lambda\le\tau^{\aleph}$. Skoro $(\tau^{\aleph})^{\aleph}=\tau^{\aleph}$ (patrz rozdział III, § 1, twierdzenie 1), to $\lambda^{\aleph}\le\tau^{\aleph}\le\eta^{\aleph}=\lambda^{\aleph}$, co jest sprzeczne z definicją liczby η.

Wykażemy teraz, że

(16) $\eta = 2$ lub $\eta>2^{\aleph}$.

Istotnie, jeśli $\eta\le 2^{\aleph}$, to $\eta^{\aleph}\le(2^{\aleph})^{\aleph} = 2^{\aleph}\le\eta^{\aleph}$. Zatem $\lambda^{\aleph} = 2^{\aleph}$, czyli $\eta = 2$.

Pozostają do rozpatrzenia dwa przypadki:

Przypadek 1. $\eta = 2$. Na mocy lematu 7 w algebrze B istnieje rodzina niezależna rozbić $\{P_\alpha : \alpha<\aleph\}$ taka, że $|P_\alpha| = \tau_\alpha\ge\omega$, $\tau_\alpha<\aleph$ dla każdego $\alpha<\aleph$ oraz $\sup\{\tau_\alpha : \alpha<\aleph\} = \aleph$. Dla każdego $\alpha<\aleph$ w ciele zbiorów $P(\tau_\alpha)$ istnieje rodzina niezależna rozbić S_α taka, że $|S_\alpha| = 2^{\tau_\alpha}$ (patrz lemat 3). Niech $P_\alpha = \{u_\xi : \xi<\tau_\alpha\}$ i niech dla każdego $s\in\bigcup\{Q : Q\in S_\alpha\}$, $w(s) = \sup\{u_\xi : \xi\in s\}$. Dla każdego $Q\in S_\alpha$ niech $P(Q) = \{w(s) : s\in Q\}$. Skoro Q jest rozbiciem zbioru τ_α, to $P(Q)$ jest rozbiciem algebry Boole'a B. Niech $R_\alpha = \{P(Q) : Q\in S_\alpha\}$. Zbiór $R = \bigcup\{R_\alpha : \alpha<\aleph\}$ jest rodziną rozbić algebry B i $|R| = \sum\{|R_\alpha| : \alpha<\aleph\} = \sum\{2^{\tau_\alpha} : \alpha<\aleph\} = 2^{\aleph} = |B|$. Wykażemy, że R jest rodziną niezależną rozbić.

Niech $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}\subset\aleph$ i niech, dla każdego $k\le m$, $\{Q_1^k,\dots,Q_{n(k)}^k\}\subset S_{\alpha_k}$. Dla każdego $k\le m$ i dla każdego $i\le n(k)$ wybierzmy element $x_i^k\in Q_i^k$. Wykażemy, że

(17) $w(x_1^1)\wedge\dots\wedge w(x_{n(1)}^1)\wedge\dots\wedge w(x_{n(m)}^m)\ne 0$.

Skoro S_{α_k} jest rodziną niezależną rozbić zbioru τ_{α_k}, to dla każdego $k\le m$ istnieje $\xi_k<\tau_{\alpha_k}$ takie, że $\xi_k\in x_1^k\cap\dots\cap x_{n(k)}^k$. Zatem $u_{\xi_k}\le w(x_1^k)\wedge\dots\wedge w(x_{n(k)}^k)$. Ponieważ $\{P_\alpha : \alpha<\aleph\}$ jest rodziną niezależną, więc $u_{\xi_1}\wedge\dots\wedge u_{\xi_m}\ne 0$, co dowodzi warunku (17).

Przypadek 2. $2^{\aleph}<\eta$. Na mocy lematu 1 w algebrze Boole'a B istnieje maksymalna rodzina R' rozbić niezależnych taka, że $\{P_\alpha : \alpha<\aleph\}\subset R$. Wykażemy, że $|R|\ge\eta$.

Przypuśćmy, że $|R|<\eta$. Przyjmijmy teraz oznaczenia z lematu 5 (porównaj analogiczny fragment z dowodu twierdzenia Kisliakowa i Koppelberg). Skoro $|R|\geq\omega$, to $|R_1| = |R|$. Dla każdego $Q\in R_1$, $\bar{Q}=\{\sup(A): A\subset Q\}$, więc $|\bar{Q}|\leq 2^{|Q|}$, gdzie $|Q|<\varkappa$ (bo $\mathrm{sat}(B) = \varkappa$). Zatem $\tau = |\bigcup\{\bar{Q} : Q\in R_1\}|\leq |R_1|\cdot 2^{\varkappa}<\eta$. Niech B_1 będzie algebrą Boole'a generowaną przez zbiór $\bigcup\{\bar{Q}: Q\in R_1\}$, a B_1^c jest uzupełnieniem. Skoro $|B_1| = \tau$ oraz $\mathrm{sat}(B_1)\leq \mathrm{sat}(B) = \varkappa$, to $|B_1^c|\leq\tau^{\varkappa}$. Zatem, na mocy warunku (15), $|\bar{R}|\leq\tau^{\varkappa}<\lambda$. Ponieważ dla każdego $u\in B$ algebra $B\restriction u$ ma gęstość równą λ, więc - na mocy lematu 5 - R nie jest rodziną maksymalną rozbić niezależnych. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $|R|\geq\eta$.

Skoro $\varkappa\leq 2^{\varkappa}<\eta$ i $\{P_\alpha : \alpha<\varkappa\}\subset R$, to rodzinę R można przedstawić w postaci sumy rodzin $\{P_\alpha : \alpha<\varkappa\}\cup\{Q_\beta : \beta<\eta\}$. Możemy przy tym zakładać, że rozbicia Q_β są dwuelementowe, tzn. $Q_\beta = \{v_\beta^0, v_\beta^1\}$. Niech $\{X_\alpha : \alpha<\varkappa\}$ będzie rozbiciem zbioru η na zbiory rozłączne mocy η (rozbicie takie istnieje, bo $\varkappa<\eta$). Dla każdego $u\in P_\alpha$ i dla każdego $\xi\in X_\alpha$ niech

$$P_{\xi,u} = \{u\wedge v_\xi^0, u\wedge v_\xi^1\}.$$

Każda z rodzin $P_{\xi,u}$ jest rozbiciem algebry Boole'a B_u. Niech $P_u = \{P_{\xi,u} : \xi\in X_\alpha\}$, gdzie $u\in P_\alpha$, $\alpha<\varkappa$. Dla każdego $\alpha<\varkappa$ istnieje zbiór $S_\alpha\subset\prod\{P_u : u\in P_\alpha\}$ taki, że $|S_\alpha| = |\prod\{P_u : u\in P_\alpha\}|$ oraz jest spełniony warunek:

(18) dla każdego zbioru $\{x_1,\ldots,x_n\}\subset S_\alpha$ istnieje $u\in P_\alpha$ takie, że dla dowolnych dwóch różnych x_i, x_j zachodzi $x_i(u)\neq x_j(u)$; patrz twierdzenie 2, rozdział 3, § 1.

Dla każdego $x\in S_\alpha$ i dla każdego $i\in\{0,1\}$ niech

$$w^i(x) = \sup\{(x(P_u))^i : u\in P_\alpha\}.$$

Skoro P_α jest rozbiciem algebry B, a każde P_u jest rodziną rozbić algebry $B\restriction u$, to $R_\alpha = \{\{w^0(x), w^1(x)\}: x\in S_\alpha\}$ jest rodziną rozbić algebry Boole'a B. Wykażemy, że $R' = \bigcup\{R_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ jest rodziną niezależną rozbić algebry B.

Dla każdego $k \leq m$ niech $\{x_1^k, \ldots, x_{n(k)}^k\} \subset S_{\alpha_k}$. Dla każdego $j \leq n(k)$ ustalmy $i_j \in \{0,1\}$. Należy wykazać, że

$$(19)\quad w^{i_1}(x_1^1) \wedge \ldots \wedge w^{i_{n(1)}}(x_{n(1)}^1) \wedge \ldots \wedge$$

$$\wedge\, w^{i_1}(x_1^m) \wedge \ldots \wedge w^{i_{n(m)}}(x_{n(m)}^m) \neq 0.$$

Z warunku (18) wynika, że dla każdego $k \leq m$ istnieje element $u_k \in P_{\alpha_k}$ taki, że dla $i \neq j$, $x_i^k(P_{u_k}) \neq x_j^k(P_{u_k})$. Dla każdego $k \leq m$ i dla każdego $j \leq n(k)$ istnieje $\beta_j \in X_{\alpha_k}$ takie, że

$$(x_j^k(P_{u_k}))^{i_j} = u_k \wedge v_{\beta_j}^{i_j}.$$

Ponieważ $\{X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_m}\}$ jest rodziną zbiorów rozłącznych oraz $\{P_\alpha : \alpha < \varkappa\} \cup \{Q_\xi : \xi < \eta\}$ jest rodziną niezależną rozbić, więc iloczyn wszystkich elementów $u_k \wedge v_{\beta_j}^{i_j}$, gdzie $k \leq m$, $j \leq n(k)$, jest różny od zera. Stąd oraz z nierówności

$$u_k \wedge v_{\beta_j}^{i_j} \leq w^{i_j}(x_j^k)$$

wynika warunek (19). Zatem R' jest rodziną niezależną rozbić algebry Boole'a B.

Skoro $|R_\alpha| = |S_\alpha| = \eta^{\tau_\alpha}$ dla każdego $\alpha < \varkappa$; to $|R'| = \eta^{\varkappa} = \lambda^{\varkappa} = |B|$, co kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie Balcara-Franka wypowiedziane w języku topologii brzmi następująco:

TWIERDZENIE 3. Każda przestrzeń ekstremalnie niespójna zwarta (nieskończona) X ma odwzorowanie ciągłe na kostkę Cantora $D^{w(X)}$, gdzie $w(X)$ oznacza wagę przestrzeni X.

Wniosek 1. Jeśli X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną zwartą (nieskończoną), to $|X| = 2^{w(X)}$.

Dowód. Z twierdzenia 3 wynika, że $|X| \geq 2^{w(X)}$. Z drugiej strony $|X| \leq 2^{w(X)}$, bo przestrzeń X jest homeomorficzna z pewną podprzestrzenią kostki $I^{w(X)}$ (twierdzenie Tichonowa). Zatem $|X| = 2^{w(X)}$.

Wniosek 2. Dla każdej przestrzeni ekstremalnie niespójnej zwartej (nieskończonej) X istnieje punkt $x \in X$ taki, że $\chi(x,X) = w(X)$.

Dowód. Z twierdzenia 3 wynika, że istnieje odwzorowanie ciągłe f przestrzeni X na kostkę $D^{w(X)}$. Na mocy twierdzenia Juhásza z § 4 istnieje zbiór zwarty $Z \subset X$ taki, że $f(Z) = D^{w(X)}$ i $\chi(y,Z) = w(X)$ dla każdego $y \in Z$. Zbiór Z jest niepusty. Skoro $\chi(y,Z) \leq \chi(y,X) \leq w(X)$, to wystarczy obrać dowolny punkt $x \in Z$.

§ 6. Niejednorodność przestrzeni ekstremalnie niespójnych zwartych

Przestrzeń topologiczna X jest j e d n o r o d n a, jeśli dla każdych dwóch punktów $x,y \in X$ istnieje homeomorfizm h przestrzeni X na siebie taki, że $h(x) = y$. Przestrzenie, które nie są jednorodne, nazywamy niejednorodnymi. Odcinek z końcami nie jest przestrzenią jednorodną. Okrąg, zbiór Cantora i kostka Cantora są przestrzeniami jednorodnymi.

Twierdzenie Z. Frolíka (cytowane w pracy W.W. C o m f o r t a, 1977) mówi, że przestrzenie ekstremalnie niespójne zwarte nie są jednorodne (oczywiście z wyjątkiem skończonych), tzn. przestrzenie Stone'a algebr Boole'a zupełnych nieskończonych nie są przestrzeniami jednorodnymi. W oryginale twierdzenie to mówi więcej: F-przestrzenie zwarte nieskończone nie są jednorodne. Ograniczymy się jednak do przestrzeni ekstremalnie niespójnych zwartych, co pozwoli na wykorzystanie innego twierdzenia Frolika o tym, że zbiór punktów stałych każdego homeomorfizmu przestrzeni ekstremalnie niespójnej zwartej w sobie jest domknięto-otwarty.

LEMAT 1. Niech X będzie przestrzenią ekstremalnie niespójną zwartą i niech f będzie homeomorfizmem przestrzeni X na przestrzeń $Y \subset X$. Jeśli f nie jest identycznością, to istnieją zbiory domknięto-otwarte $V_1, V_2, V_3 \subset X$ rozłączne, niepuste i takie, że

(1) dla każdego $i \leq 3$, $f(V_i) \cap V_i = \emptyset$,

(2) $f(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \subset V_1 \cup V_2 \cup V_3$,

(3) $f^{-1}(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \subset V_1 \cup V_2 \cup V_3$.

Dowód. Ustalmy punkt $x \in X$ taki, że $f(x) \neq x$. Ponieważ X jest przestrzenią zero-wymiarową, a f jest odwzorowaniem ciągłym, więc istnieje zbiór domknięto-otwarty $U_1 \subset X$ taki, że $x \in U_1$ oraz $f(U_1) \cap U_1 = \emptyset$. Ponieważ $f(U_1)$ jest zbiorem otwartym w Y, więc istnieje zbiór otwarty $G \subset X - U_1$ taki, że $G \cap Y = f(U_1)$. Skoro przestrzeń X jest ekstremalnie niespójna, $H_1 = \mathrm{cl}G$ jest zbiorem domknięto-otwartym w X oraz $H_1 \cap Y = f(U_1)$ i $H_1 \cap U_1 = \emptyset$.

Metodą indukcji matematycznej określimy ciąg $\{H_n : n < \omega\}$ zbiorów domknięto-otwartych (niepustych) takich, że dla każdego $n \geq 1$ spełnione są warunki:

(4) $H_{n+1} \cap (U_1 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_n) = \emptyset$,

(5) $H_{n+1} \cap Y = f(H_n) - U_1$.

Pokażemy wpierw, że warunki (4) i (5) pociągają warunek:

(6) $f(H_n) \cap H_k = \emptyset$ dla każdego $k \leq n$.

Istotnie, ponieważ $U_1 \cap H_n = \emptyset$, więc $f(U_1) \cap f(H_n) = \emptyset$. Zatem $f(H_n) \cap H_1 = \emptyset$, bo $f(U_1) = H_1 \cap Y$ i $f(H_n) \subset Y$. Jeśli $k > 1$, to na mocy warunku (4) $H_n \cap H_{k-1} = \emptyset$. Zatem $f(H_n) \cap f(H_{k-1}) = \emptyset$ i tym bardziej $f(H_n) \cap (f(H_{k-1}) - U_1) = \emptyset$. Z warunku (5) i stąd, że $f(H_n) \subset Y$, wynika więc, że $f(H_n) \cap H_k = \emptyset$, co dowodzi warunku (6).

Warunek (6) umożliwia zrobienie kroku indukcyjnego w definicji ciągu $\{H_n\}$. Mianowicie, z warunku (6) wynika, że jeśli zbiory $H_1, \ldots$ $\ldots, H_n$ są określone tak, by spełnione były warunki (4) i (5), to istnieje zbiór domknięto-otwarty $H_{n+1} \subset X$ taki, że $H_{n+1} \subset X - (U_1 \cup$

$\cup H_1 \cup \ldots \cup H_n)$ i $H_{n+1} \cap Y = f(H_n) - U_1$. Łatwo widać, że zbiory $H_1, \ldots$ $\ldots, H_{n+1}$ także spełniają warunki (4) i (5).

Niech $U_2 = cl(\bigcup\{H_{2n-1} : n<\omega\})$ i $U_3 = cl(\bigcup\{H_{2n} : n<\omega\})$. Na mocy warunku (4) i ekstremalnej niespójności przestrzeni X zbiory U_2 i U_3 są domknięto-otwarte i rozłączne. Z tych samych powodów $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = \emptyset$.

Skoro $f(U_1) = H_1 \cap Y$, to

(7) $f(U_1) \subset U_2$.

Z warunku (5) wynika, że $f(H_n) \subset H_{n+1} \cup U_1$. Stąd wynika, że

(8) $f(U_2) \subset U_1 \cup U_3$,

(9) $f(U_3) \subset U_1 \cup U_2$.

Dla każdego $i \leq 3$ oraz $n<\omega$ określamy indukcyjnie zbiory domknięto-otwarte U_i^n w następujący sposób:

$$U_1^{n+1} = U_1^n \cup (f^{-1}(U_2^n) - U^n),$$

$$U_2^{n+1} = U_2^n \cup (f^{-1}(U_3^n) - U^n),$$

$$U_3^{n+1} = U_3^n \cup (f^{-1}(U_1^n) - U^n),$$

gdzie $U^n = U_1^n \cup U_2^n \cup U_3^n$ oraz $U_i^1 = U_i$ dla każdego $i \leq 3$. Stąd, że zbiory U_1, U_2, U_3 są rozłączne, wynika, że dla każdego $n<\omega$ spełniony jest warunek:

(10) jeśli $i \neq j$, to $U_i^n \cap U_j^n = \emptyset$.

Wykażemy, że dla każdego $i \leq 3$ oraz $n<\omega$ zachodzi wzór:

(11) $f(U_i^n) \cap U_i^n = \emptyset$.

Wzoru (11) dowodzimy indukcyjnie ze względu na n. Przy $n = 1$ stosujemy warunki (7) - (9). Jeśli $f(U_i^n) \cap U_i^n = \emptyset$ dla każdego $i \leq 3$, to równość $f(U_i^{n+1}) \cap U_i^{n+1} = \emptyset$ wynika stąd, że $f(U_i^n) \subset U^n$ oraz $f^{-1}(U_i^n) \cap U_i^n = \emptyset$ (co z kolei wynika stąd, że $f(U_i^n) \cap U_i^n = \emptyset$).

Metodą indukcji matematycznej łatwo wykazać, że dla każdego $n \geq 1$

(12) $f(U^{n+1}) \subset U^n \subset U^{n+1}$.

Pierwszy krok indukcji wymaga użycia warunków (7) - (9).

Dla każdego $i \leq 3$ określamy zbiory V_i następującym wzorem:

$$V_i = \mathrm{cl}(\bigcup\{U_i^n : n < \omega\}).$$

Ponieważ $U_i^n \subset U_i^{n+1}$, więc - na mocy warunku (10) oraz ekstremalnej niespójności przestrzeni X - zbiory V_1, V_2, V_3 są domknięto-otwarte i rozłączne. Z warunku (11) i ciągłości funkcji f wynika, że $f(V_i) \cap \cap V_i = \emptyset$ dla każdego $i \leq 3$. Z warunku (12) wynika, że $f(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \subset \subset V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Inkluzja $f^{-1}(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \subset V_1 \cup V_2 \cup V_3$ wynika stąd, że $f^{-1}(U^n) \subset U^{n+1}$ dla każdego $n < \omega$ (patrz definicje zbiorów U_i^n).

TWIERDZENIE 1 (Z. Frolík, 1968). Jeśli f jest homeomorfizmem przestrzeni ekstremalnie niespójnej zwartej X na przestrzeń $Y \subset \subset X$, to zbiór $\{x \in X : f(x) = x\}$ jest zbiorem domknięto-otwartym w przestrzeni X.

Dowód. Jeśli $f(x) = x$ dla każdego $x \in X$, to twierdzenie jest oczywiste. Możemy więc założyć, że istnieje takie $x \in X$, że $f(x) \neq x$.

Niech R będzie zbiorem wszystkich trójek $T = (U_1, U_2, U_3)$ złożonych ze zbiorów domknięto-otwartych rozłącznych i niepustych o następujących własnościach:

(I) $f(U_i) \cap U_i = \emptyset$, dla każdego $i \leq 3$,

(II) $f(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3$,

(III) $f^{-1}(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

Z lematu 1 wynika, że $R \neq \emptyset$. W zbiorze R określamy częściowy porządek następującym wzorem: jeśli $T, T' \in R$ oraz $T = (U_1, U_2, U_3)$ i $T' = (U_1', U_2', U_3')$, to $T \leq T'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U_i \subset U_i'$ dla każdego $i \leq 3$.

Łatwo sprawdzić, że jeśli $\{(U_1^s, U_2^s, U_3^s) : s \in S\} \subset R$ jest podzbiorem liniowo uporządkowanym zbioru R, to jego ograniczeniem górnym jest element (U_1, U_2, U_3), gdzie $U_i = \mathrm{cl}\,(\bigcup\{U_i^s : s \in S\})$ dla każdego $i \leq 3$. Zatem z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że w R istnieje element maksymalny (V_1, V_2, V_3). Pokażemy, że $f(x) = x$ dla każdego $x \in X-(V_1 \cup \cup V_2 \cup V_3)$.

Przypuśćmy, że $X_1 = X - (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$ jest zbiorem niepustym i dla pewnego $x \in X_1$, $f(x) \neq x$. Z własności (II) i (III) wynika, że $f|X_1$ jest homeomorfizmem przestrzeni X_1 na pewną jej podprzestrzeń $f(X_1)$. Ponieważ X_1 jest przestrzenią ekstremalnie niespójną zwartą, więc, na mocy lematu 1, istnieją zbiory domknięto-otwarte $W_1, W_2, W_3 \subset X_1$ rozłączne i spełniające własności (I) - (III). Zbiory W_i są domknięto-otwarte także w X, bo X_1 jest podprzestrzenią domknięto-otwartą. Zatem $(W_1, W_2, W_3) \in R$. Łatwo sprawdzić, że $(V_1 \cup W_1, V_2 \cup \cup W_2, V_3 \cup W_3) \in R$, co przeczy maksymalności elementu (V_1, V_2, V_3). Zatem $\{x \in X : f(x) = x\} = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, co kończy dowód twierdzenia.

Do dowodu niejednorodności przestrzeni ekstremalnie niespójnych zwartych potrzebna nam jest jeszcze przesłanka, która mówi, że każda przestrzeń ekstremalnie niespójna zwarta jest homeomorficzna z pewną swoją podprzestrzenią nigdziegęstą. Przesłanka ta wynika z twierdzenia Balcara-Franka.

LEMAT 2. Jeśli przestrzenie X i Y są ekstremalnie niespójne zwarte oraz $w(X) \geq w(Y)$, to przestrzeń Y jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem nigdziegęstym przestrzeni X.

Dowód. Z twierdzenia Balcara-Franka wynika, że przestrzeń X ma odwzorowanie ciągłe f na kostkę Cantora $D^{w(X)}$. Istnieje zbiór domknięty $Z \subset X$ taki, że $f(Z) = D^{w(X)}$ i $f|Z$ jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym (patrz rozdział II, § 4, lemat 2).

Ze znanego twierdzenia topologii (patrz np. R. Engelking (1975)) wynika, że skoro $w(Y) \leq w(X)$, to przestrzeń Y jest homeomorficzna z pewną podprzestrzenią $Y_1 \subset D^{w(X)}$. Każdy zbiór otwarty w kostce $D^{w(X)}$ zawiera podzbiór domknięto-otwarty homeomorficzny z całą kostką $D^{w(X)}$. Ponieważ kostki Cantora nie są ekstremalnie niespójne, więc zbiór Y_1 musi być nigdziegęsty w przestrzeni $D^w(X)$ (bo Y_1 jest przestrzenią ekstremalnie niespójną).

Z nieprzywiedlności odwzorowania $f|Z$ i stąd, że Y_1 jest zbiorem nigdziegęstym, wynika, że zbiór $X_1 = Z \cap f^{-1}(Y_1)$ jest nigdziegęsty w X. Odwzorowanie $g = f|X_1$ przekształca w sposób ciągły zbiór X_1 na zbiór Y_1. Niech $Y_2 \subset X_1$ będzie podzbiorem domkniętym takim, że $g(Y_2) = Y_1$ i $g|Y_2$ jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym. Z ekstremalnej niespójności przestrzeni Y_1 wynika, że $g|Y_2$ jest homeomorfizmem (patrz II, § 4, lemat 3). Zatem przestrzeń Y jest homeomorficzna z podprzestrzenią przestrzeni nigdziegęstej; co kończy dowód.

TWIERDZENIE 2 (Z. F r o l í k). Przestrzenie ekstremalnie niespójne zwarte, nieskończone nie są jednorodne.

Dowód. Przypuśćmy, że X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną zwartą, nieskończoną i jednorodną. Z lematu 2 wynika, że istnieje homeomorfizm h przestrzeni X na pewną jej podprzestrzeń nigdziegęstą Y. Ustalmy punkt $x \in Y$. Niech y będzie takim punktem przestrzeni X, że $h(y) = x$. Skoro X jest przestrzenią jednorodną, to istnieje homeomorfizm g przestrzeni X na X taki, że $g(x) = y$. Wówczas x jest punktem stałym homeomorfizmu $f = h \circ g$. Na mocy twierdzenia 1 zbiór $\{x \in X : f(x) = x\} = Z$ jest otwarty w przestrzeni X. Jednakże, skoro $Z \subset Y$ oraz Y jest zbiorem nigdziegęstym, to $Z = \emptyset$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

V. Algebry Boole'a sztywne

§ 1. Przykład przestrzeni topologicznej sztywnej

Pojęcie sztywności występuje zarówno w teorii algebr Boole'a, jak i w topologii. A l g e b r a B o o l e'a jest s z t y w n a jeśli jej jedynym automorfizmem jest identyczność; p r z e s t r z e ń t o p o l o g i c z n a jest s z t y w n a, jeśli jedynym homeomorfizmem tej przestrzeni na siebie jest identyczność. Z twierdzenia Stone'a (patrz twierdzenia 3 i 5, rozdział II, § 3) wynika łatwo, że algebra Boole'a jest sztywna wtedy i tylko wtedy, gdy jej przestrzeń Stone'a jest sztywna; co znaczy, że przestrzeń topologiczna zwarta zero-wymiarowa jest sztywna wtedy i tylko wtedy, gdy jej algebra zbiorów domknięto-otwartych jest sztywna. Warto jednak zaznaczyć, że istnieją także przestrzenie sztywne nie będące przestrzeniami Stone'a, np. kontinua (tj. przestrzenie zwarte i spójne), które nie będą przedmiotem naszych rozważań.

Literatura o przestrzeniach sztywnych jest bardzo bogata. Wspomnijmy jedynie dwie prace: J. C h a r a t o n i k a (1979) i J. de G r o o t a (1959). Pierwsze konstrukcje algebr Boole'a sztywnych podali: B. J ó n s s o n (1951), M. K a t ě t o v (1951) i L. R i e g e r (1951).

Algebry Boole'a sztywne można więc otrzymać konstruując odpowiednie przestrzenie topologiczne zwarte, zero-wymiarowe i sztywne. Dalej podamy taką konstrukcję. Jest ona modyfikacją konstrukcji W. S i e r p i ń s k i e g o (1950) pewnego zbioru na prostej (patrz także R. B o n n e t, 1978). Twierdzenie Ławrentiewa , które tu wykorzystamy, można znaleźć w książce R. E n g e l k i n g a (1975). Dla pełności podajemy jego dowód.

LEMAT 1 (Twierdzenie Ławrentiewa). Niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi zupełnymi oraz niech $A \subset X$ i $B \subset Y$. Dla każdego homeomorfizmu f odwzorowującego zbiór A na zbiór B istnieją zbiory $G \subset X$ oraz $H \subset Y$ typu G_δ (odpowiednio w X oraz Y) oraz homeomorfizm $\bar{f}$ odwzorowujący G na H takie, że $A \subset G$, $B \subset H$ oraz $\bar{f}|A = f$.

Dowód. Niech A_1 oznacza zbiór tych punktów $x \in \mathrm{cl}A$, dla których jest spełniony następujący warunek:

(1) dla każdej liczby naturalnej n istnieje otoczenie U_n punktu x takie, że średnica zbioru $f(A \cap U_n)$ jest mniejsza niż $\frac{1}{n}$.

Widać, że A_1 jest zbiorem typu G_δ oraz $A \subset A_1$. Niech $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ będzie funkcją określoną wzorem:

(2) $f_1(x) = y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{y\} = \bigcap\{\mathrm{cl}f(A \cap U) : U$ jest otoczeniem otwartym punktu x w przestrzeni $X\}$.

Funkcja f_1 jest poprawnie określona, bo Y jest przestrzenią zupełną, a zbiór $\{\mathrm{cl}f(A \cap U) : U$ jest otoczeniem otwartym punktu x w przestrzeni $X\}$ jest, na mocy warunku (1), rodziną scentrowaną zbiorów domkniętych o dowolnie małych średnicach. Z ciągłości funkcji f wynika, że $f_1|A = f$. Sprawdźmy ciągłość funkcji f_1. Niech $x \in A_1$ oraz niech V będzie ustalonym otoczeniem punktu $f(x)$. Na mocy (1) i (2) istnieje otoczenie U_n punktu x takie, że $\mathrm{cl}f(A \cap U_n) \subset V$. Łatwo widać, że $f_1(A_1 \cap U_n) \subset V$; co dowodzi ciągłości funkcji f_1.

Pokazaliśmy, że istnieje zbiór A_1 typu G_δ w X oraz funkcja ciągła $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ takie, że $A \subset A_1$ oraz $f_1|A = f$. Rozważmy teraz funkcję $f^{-1} : B \longrightarrow A$ i przeprowadźmy w stosunku do niej tę samą konstrukcję. Otrzymamy wówczas zbiór B_1 typu G_δ w Y oraz funkcję ciągłą $f_2 : B_1 \longrightarrow X$ takie, że $B \subset B_1$, B gęste w B_1, oraz

$f_2|B = f^{-1}$. Niech $G = (f_1)^{-1}(f_1(A_1) \cap B_1)$. Skoro B_1 jest typu G_δ w Y, to $f_1(A_1) \cap B_1$ jest typu G_δ w $f_1(A_1)$. Zatem, dzięki ciągłości f_1, G jest typu G_δ w A_1, czyli G jest typu G_δ w X. Łatwo widać, że $A \subset G$. Rozważmy funkcję $\bar{f} = f_1|G$. Pokażemy, że $\bar{f}$ jest homeomorfizmem zbioru G na zbiór $f_1(A_1) \cap B_1$. Istotnie, $(f_2 \circ f_1)|A = f^{-1} \circ f$ oraz A jest zbiorem gęstym w G. Zatem, skoro $f^{-1} \circ f$ jest identycznością na zbiorze A, to $f_2 \circ f_1$ jest identycznością na zbiorze G (bo każda funkcja ciągła jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na zbiorze gęstym). Podobnie $f_1 \circ f_2$ jest identycznością na zbiorze $f_1(A_1) \cap B_1$, co dowodzi, że $\bar{f}$ jest homeomorfizmem. Oczywiście $\bar{f}|A = f$. Jeśli jeszcze raz tę konstrukcję zastosujemy do funkcji $(\bar{f})^{-1} : f_1(A_1) \cap B_1 \to G$, to otrzymamy zbiór H typu G_δ w Y oraz homeomorfizm zbioru H na zbiór G taki, że jego obcięcie do zbioru B jest równe funkcji f^{-1}.

TWIERDZENIE 1. Istnieje podzbiór gęsty X zbioru Cantora taki, że każdy homeomorfizm zbioru X w X jest identycznością.

Dowód. Niech R będzie rodziną wszystkich zbiorów, które są typu G_δ w zbiorze Cantora C. Skoro w C jest dokładnie 2^ω zbiorów otwartych, to $|R| = (2^\omega)^\omega = 2^\omega$. Niech F będzie zbiorem wszystkich homeomorfizmów f postaci $f : G \to H$, gdzie $G, H \in R$ oraz $f(G) = H$. Pokażemy, że $|F| = 2^\omega$. Ustalmy $G, H \in R$. Ponieważ każdy podzbiór zbioru C jest ośrodkowy (bo C ma bazę przeliczalną), więc istnieje zbiór przeliczalny gęsty $M \subset G$. Z gęstości zbioru M wynika, że jeśli $f_1, f_2 : G \to H$ są ciągłe oraz $f_1|M = f_2|M$, to $f_1 = f_2$. Zatem moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych odwzorowujących G na H jest równa $|H|^{|M|} \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega$. Skoro $|R \times R| = 2^\omega$, to $|F| = 2^\omega$.

Ustawmy zbiór F w ciąg pozaskończony, tzn. $F = \{f_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$. Ustawmy także w ciąg pozaskończony $\{U_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w C w ten sposób, że każdy zbiór U_α występuje w tym ciągu 2^ω razy (jest to możliwe, bo $|2^\omega \times 2^\omega| = 2^\omega$). Dla każdego $\alpha < 2^\omega$ niech D_α oznacza dziedzinę, a P_α przeciwdziedzinę funkcji f_α.

Metodą indukcji pozaskończonej określamy ciąg $\{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ tak, aby

$$(3)\quad x_\alpha \in U_\alpha - (\{x_\xi : \xi<\alpha\} \cup \bigcup\{f_\beta(D_\beta \cap \{x_\xi : \xi<\alpha\}) : \beta\leq\alpha\} \cup \bigcup\{(f_\beta)^{-1}(P_\beta \cap \{x_\xi : \xi<\alpha\}) : \beta\leq\alpha\}),$$

dla każdego $\alpha < 2^\omega$. Konstrukcja taka jest możliwa, bo $|\bigcup\{f_\beta(D_\beta \cap \{x_\xi : \xi<\alpha\}) : \beta \leq \alpha\}| \leq |\alpha|\cdot|\alpha| < 2^\omega$ i, podobnie, $|\bigcup\{(f_\beta)^{-1}(P_\beta \cap \{x_\xi : \xi<\alpha\} : \beta\leq\alpha\}| < 2^\omega$ oraz $|U_\alpha| = 2^\omega$.

Z warunku (3) wynika łatwo, że zbiór $X = \{x_\alpha : < 2^\omega\}$ ma część wspólną mocy 2^ω z każdym zbiorem otwartym w C. W szczególności X jest zbiorem gęstym w C.

Niech $f : X \to X$ będzie homeomorfizmem zbioru X na X. Pokażemy, że $f(x) = x$ dla każdego $x \in X$. Z lematu 1 wynika, że istnieje homeomorfizm $f_\alpha \in F$ taki, że $f_\alpha|X = f$. Pokażemy, że $f_\alpha(x_\xi) = x_\xi$ dla każdego $\xi \geq \alpha$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas, jeśli $f_\alpha(x_\xi) = x_\delta$ oraz $\delta > \xi$, to $x_\delta \in f_\alpha(D_\alpha \cap \{x_\xi : \xi < \delta\})$; sprzeczność z określeniem (3), bo $\alpha < \delta$. Jeśli $f_\alpha(x_\xi) = x_\delta$ oraz $\delta < \xi$, to $x_\xi \in (f_\alpha)^{-1}(P_\alpha \cap \{x_\delta : \delta < \xi\})$; sprzeczność z (3), bo $\alpha \leq \xi$.

Pokazaliśmy, że $|\{x \in X : f_\alpha(x) \neq x\}| < 2^\omega$. Przypuśćmy, że istnieje $x \in X$ takie, że $f_\alpha(x) \neq x$. Wówczas istnieje zbiór otwarty $U \subset C$ taki, że $(U \cap X) \cap f_\alpha(U \cap X) = \emptyset$. Z drugiej jednak strony $|U \cap X| = 2^\omega$, czyli $|\{x \in X : f_\alpha(X) \neq x\}| = 2^\omega$; sprzeczność.

LEMAT 2. Jeśli X jest przestrzenią metryczną ośrodkową, to żaden punkt zbioru $\beta X - X$ (narostu rozszerzenia Čecha-Stone'a) nie jest granicą nietrywialnego ciągu punktów przestrzeni βX.

Dowód. Przypuśćmy, że punkt $x \in \beta X - X$ jest granicą ciągu $\{x_n : n < \omega\} \subset \beta X - \{x\}$, tzn. w każdym otoczeniu otwartym punktu x znajdują się wszystkie, poza skończoną ilością, punkty zbioru $\{x_n : n<\omega\}$. Wówczas zbiór $\{x_n : n<\omega\}$ byłby domkniętym podzbiorem zbioru $Y = X \cup \{x_n : n<\omega\}$. Sprawdźmy, że Y jest przestrzenią normalną. Niech $A, B \subset Y$ będą zbiorami domkniętymi i rozłącznymi. Skoro zbiór $A-X$ jest co najwyżej przeliczalny, to istnieje rodzina przeliczalna P_1 zbiorów otwartych (w Y) taka, że $A - X \subset \bigcup P_1$ oraz $\mathrm{cl}U \cap B = \emptyset$ dla każdego $U \in P_1$ (Y jest przestrzenią regularną). Skoro baza przestrzeni X jest przeliczalna, to istnieje rodzina P_2 zbiorów otwartych (w Y) taka, że $A \cap X \subset \bigcup P_2$ oraz $\mathrm{cl}U \cap B = \emptyset$ dla $U \in P_2$. Analogicznie istnieją rodziny przeliczalne Q_1 i Q_2 zbiorów otwartych w Y takie, że $B - X \subset \bigcup Q_1$, $B \cap X \subset \bigcup Q_2$ oraz $\mathrm{cl}U \cap A = \emptyset$ dla $U \in Q_1 \cup Q_2$. Niech $P_1 \cup \cup P_2 = \{U_n : n<\omega\}$ oraz $Q_1 \cup Q_2 = \{V_n : n<\omega\}$. Dla każdego $n<\omega$ przyjmijmy:

$$G_n = U_n - \mathrm{cl}(V_1 \cup \ldots \cup V_n),$$

$$H_n = V_n - \mathrm{cl}(U_1 \cup \ldots \cup U_n).$$

Skoro $A \cap \mathrm{cl}V_i = \emptyset$, dla $i \leqslant n$, to $A \subset \bigcup\{G_n : n<\omega\}$. Podobnie $B \subset \bigcup\{H_n : n<\omega\}$. Łatwo widać, że, jeśli $n \neq k$, to $G_n \cap H_k = \emptyset$. Zatem zbiory $G = \bigcup\{G_n : n<\omega\}$ oraz $H = \bigcup\{H_n : n<\omega\}$ są rozłączne, co kończy dowód normalności przestrzeni Y.

Rozbijmy zbiór $\{x_n : n<\omega\}$ na dwa zbiory A i B rozłączne i nieskończone. Skoro $\{x_n : n<\omega\}$ jest zbiorem domkniętym, to A i B są także domknięte. Z normalności przestrzeni Y wynika, że domknięcia zbiorów A i B w przestrzeni βY są rozłączne. Skoro jednak $X \subset Y \subset \beta X$, to $\beta X = \beta Y$; patrz R. E n g e l k i n g (1975), s. 223. Zatem zbiory A i B mają rozłączne domknięcia w przestrzeni βX; sprzeczność, bo x jest punktem skupienia zarówno zbioru A, jak i B.

TWIERDZENIE 2. Wśród przestrzeni zwartych zero-wymiarowych istnieją przestrzenie sztywne.

Dowód. Na mocy twierdzenia 1 istnieje podprzestrzeń zbioru Cantora C, która nie ma nietrywialnych homeomorfizmów w sobie. Rozważmy przestrzeń $Y = \beta X$. Skoro X jest przestrzenią zero-wymiarową (jako podzbiór zbioru Cantora) i metryczną, to βX jest przestrzenią zwartą i zero-wymiarową; patrz twierdzenie 2 z rozdziału I, § 2. Przypuśćmy, że $f : Y \to Y$ jest homeomorfizmem. Obierzmy punkt $x \in X$. Z

...etryczności przestrzeni X wynika, że x jest granicą pewnego ciągu. Wobec lematu 2 $f(x) \in X$. Zatem $f(X) \subset X$ oraz f jest przedłużeniem odwzorowania $f|X$. Skoro, na mocy twierdzenia 1, X jest przestrzenią sztywną, to $f|X$ jest identycznością. Zatem, z gęstości zbioru X w Y wynika, że $f(x) = x$ dla każdego $x \in Y$, co kończy dowód.

Zauważmy, że udowodniliśmy nieco więcej, niż to głosi twierdzenie 2. Skonstruowana tu przestrzeń X jest nie tylko sztywna, ale ma jeszcze i tę własność, że jeśli $Y \subset X$ oraz $f: X \to Y$ jest homeomorfizmem, to $Y = X$ oraz $f(x) = x$ dla każdego $x \in X$. Warto także zauważyć, że przestrzenie o analogicznych własnościach można otrzymać, wychodząc - zamiast ze zbioru Cantora - z dowolnej przestrzeni metrycznej zupełnej i ośrodkowej.

Z twierdzenia 2 wynika następujące

TWIERDZENIE 3 (Twierdzenie Jónssona-Katětova-Riegera). Istnieją algebry Boole'a sztywne.

Dowód. Niech X będzie przestrzenią zwartą zero-wymiarową i sztywną; istnienie przestrzeni X wynika z twierdzenia 2. Łatwo sprawdzić, że każdy automorfizm algebry $CO(X)$ na siebie jest identycznościowy, co kończy dowód.

Tu również udowodniliśmy nieco więcej: istnieje algebra Boole'a B taka, że jeśli $h : B \to B$ jest epimorfizmem, to $h(u) = u$ dla każdego $u \in B$. Nasuwa się pytanie, czy algebra B^c (uzupełnienie algebry B) jest także algebrą Boole'a sztywną? Okazuje się, że skonstruowana tu algebra sztywna (a także inne algebry skonstruowane w podobny sposób) nie ma tej własności. Jeśli B jest algebrą Boole'a taką, jaka została skonstruowana w dowodzie twierdzenia 3, to jej uzupełnienie B^c ma 2^{ω} różnych automorfizmów. Wynika to stąd, że jeśli X jest przestrzenią zwartą i ma przeliczalną pseudobazę, to $G(X) = G(C)$, gdzie $G(Y)$ oznacza jak zwykle przestrzeń Gleasona przestrzeni Y, a C jest zbiorem Cantora.

P s e u d o b a z ą przestrzeni topologicznej X nazywamy każdą rodzinę P zbiorów otwartych taką, że dla każdego zbioru otwartego niepustego $U \subset X$ istnieje zbiór niepusty $V \in P$ taki, że $V \subset U$. Każda baza jest, jak łatwo zauważyć, pseudobazą.

LEMAT 3. Jeśli przestrzeń Tichonowa X ma pseudobazę mocy τ, to βX ma także pseudobazę mocy τ.

Dowód. Niech P będzie pseudobazą w X. Dla każdego $W \in P$ obierzmy $W' \subset \beta X$ tak, aby $W' \cap X = W$. Pokażemy, że $P' = \{W' : W \in P\}$ jest pseudobazą w βX. Ustalmy zbiór otwarty niepusty $U \subset \beta X$. Z regularności przestrzeni βX wynika, że istnieje zbiór otwarty $V \subset \beta X$ taki, że $\emptyset \neq V \subset \mathrm{cl} V \subset U$. Niech $W \in P$ będzie takie, że $\emptyset \neq W \subset V \cap X$. Wystarczy teraz pokazać, że $W' \subset \mathrm{cl} V$. Gdyby $W' - \mathrm{cl} V \neq \emptyset$, to $X \cap (W' - \mathrm{cl} V) \neq \emptyset$, bo X jest gęste w βX. Wówczas $W \cap (X - \mathrm{cl} V) \neq \emptyset$; sprzeczność, bo $W \subset V \cap X$. Zatem P' jest pseudobazą w βX oraz $|P'| = |P|$, co kończy dowód.

Przypomnijmy, że odwzorowanie ciągłe $f: X \to Y$ jest nieprzywiedlne, jeśli $f(X) = Y$, oraz dla każdego zbioru domkniętego $F \subset X$, jeśli $f(F) = Y$, to $F = X$. Odwzorowania nieprzywiedlne były rozważane w § 4 rozdziału II.

LEMAT 4. Jeśli przestrzeń zwarta zero-wymiarowa bez punktów izolowanych ma pseudobazę przeliczalną, to ma odwzorowanie nieprzywiedlne na zbiór Cantora.

Dowód. Niech rodzina $\{U_n : n < \omega\}$ będzie pseudobazą przestrzeni X zwartej zero-wymiarowej nie zawierającej punktów izolowanych. Bez zmniejszenia ogólności możemy zakładać, że zbiory U_n są domknięto-otwarte. Dla każdego $n < \omega$ niech $f_n: X \to \{0,1\}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru U_n, tzn. $f_n(x) = 0$, jeśli $x \notin U_n$, oraz $f_n(x) = 1$, jeśli $x \in U_n$. Funkcję $f: X \to D^{\omega}$ określmy wzorem:

$$(4) \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots) \text{ dla } x \in X.$$

Łatwo sprawdzić, że skoro funkcje f_n są ciągłe, to f jest także funkcją ciągłą. Pokażemy, że f traktowane jako funkcja na zbiór $f(X)$ jest funkcją nieprzywiedlną. Istotnie, niech $F \subset X$ będzie zbiorem domkniętym takim, że $X-F \neq \emptyset$. Skoro $\{U_n : n<\omega\}$ jest pseudobazą, to istnieje zbiór U_n, $n<\omega$, taki, że $U_n \cap F = \emptyset$. Zatem $f_n(U_n) \cap$ $\cap f_n(F) = \emptyset$. Zgodnie z określeniem (4) wynika stąd, że $f(F) \neq f(X)$. Zatem funkcja $f: X \to f(X)$ jest nieprzywiedlna.

Z nieprzywiedlności f wynika, że zbiór $f(X)$ nie ma punktów izolowanych. Istotnie, gdyby punkt $y \in f(X)$ był izolowany w $f(X)$, to zbiór $f^{-1}(y)$ byłby domknięto-otwarty. Skoro w przestrzeni X nie ma punktów izolowanych, to moglibyśmy dobrać zbiór domknięto-otwarty niepusty $U \subset f^{-1}(y)$ tak, aby $U \neq f^{-1}(y)$. Wówczas $f(X-U) = f(X)$, co przeczyłoby nieprzywiedlności.

Pokazaliśmy, że $f(X)$ jest podzbiorem zwartym kostki Cantora D^{ω} oraz $f(X)$ nie ma punktów izolowanych. Ze znanego twierdzenia topologii wynika, że $f(X)$ jest zbiorem homeomorficznym ze zbiorem Cantora; patrz R. Engelking (1975), s. 447. Zatem X ma odwzorowanie nieprzywiedlne na zbiór Cantora.

TWIERDZENIE 4. Jeśli X jest przestrzenią metryczną ośrodkową bez punktów izolowanych, to przestrzeń Gleasona $G(\beta X)$ jest homeomorficzna z przestrzenią Gleasona zbioru Cantora.

Dowód. Przestrzenie metryczne ośrodkowe mają bazę przeliczalną. Zatem, na mocy lematów 3 i 4, przestrzeń βX ma odwzorowanie nieprzywiedlne na zbiór Cantora C. Zatem, na mocy twierdzenia 4 z rozdziału II, § 4, $G(\beta X)$ jest homeomorficzne z $G(C)$.

Przestrzeń Gleasona $G(X)$ przestrzeni zwartej X jest to (patrz rozdział II, § 4), przestrzeń Stone'a algebry $RO(X)$ zbiorów regularnie otwartych w X. Zatem twierdzenie 4 można przeformułować następująco:

TWIERDZENIE 5. Jeśli X jest przestrzenią metryczną zero-wymiarową, ośrodkową, bez punktów izolowanych, to algebra $RO(\beta X)$ jest izomorficzna z algebrą Boole'a zbiorów regularnie otwartych zbioru Cantora.

Twierdzenie to daje odpowiedź na pytanie, czy uzupełnienie algebry Boole'a sztywnej skonstruowanej w twierdzeniu 3 jest także algebrą sztywną. Odpowiedź jest negatywna, bo - jak wiadomo - istnieją nietrywialne homeomorfizmy zbioru C na siebie, a więc istnieją także nietrywialne automorfizmy algebry $RO(C)$. Ilość automorfizmów algebry $RO(C)$ można dokładnie wyliczyć; jest ich 2^{ω}. Wynika to choćby stąd, że przestrzeń C jest jednorodna, a więc ma co najmniej tyle homeomorfizmów ile punktów, tzn. co najmniej 2^{ω}. Nierówność przeciwna wynika stąd, że $|RO(C)| = 2^{\omega}$ oraz w algebrze Boole'a $RO(C)$ istnieje zbiór przeliczalny i gęsty (w sensie porządkowym). Każdy automorfizm algebry Boole'a jest wyznaczony jednoznacznie przez swoje wartości na zbiorze gęstym.

Pokazaliśmy więc, że jeśli X jest przestrzenią metryczną, zero-wymiarową, ośrodkową, bez punktów izolowanych, to uzupełnienie algebry $CO(\beta X)$ ma dokładnie 2^{ω} automorfizmów. Zatem algebr Boole'a sztywnych i zupełnych trzeba szukać gdzie indziej.

§ 2. Algebry Boole'a sztywne i zupełne

Czy wśród algebr Boole'a zupełnych istnieją algebry sztywne? Problem ten, postawiony przez B. J ó n s s o n a (1951), został rozwiązany pozytywnie przez K. M c A l o o n a (1971) metodami teorii modeli boole'owskich. Istnienie algebr Boole'a sztywnych zupełnych ma w teorii modeli boole'owskich ważne zastosowania. Nieco później S. S h e l a h (1974) udowodnił, że dla każdej liczby kardynalnej istnieje algebra Boole'a mocy τ taka, że jej uzupełnienie jest algebrą sztywną. Algebraiczna metoda Shelaha została rozwinięta przez P. Š t ě p á n k a i B. B a l c a r a (1977) oraz J.D. M o n k a i

A. R a s s b a c h a (1979). W szczególności Monk i Rassbach pokazali, że dla każdej liczby kardynalnej τ takiej, że $\tau^{\omega} = \tau$, istnieje algebra zupełna sztywna mocy τ ; przypomnijmy, że $|B|^{\omega} = |B|$ dla każdej algebry zupełnej B (patrz twierdzenie 2, rozdział IV, § 3). Przedstawimy tutaj twierdzenie Shelaha w nieco słabszej wersji, zyskując, kosztem ogólności, na przejrzystości i prostocie dowodu.

TWIERDZENIE 1 (S. S h e l a h, 1974). Istnieje algebra Boole'a mocy ω_1 i saturowalności równej ω_1 taka, że jej uzupełnienie jest algebrą Boole'a sztywną.

Dowód, który tu przedstawimy, jest adaptacją dowodu nieco ogólniejszego twierdzenia P. Š t ě p á n k a i B. B a l c a r a (1977). Dla większej przejrzystości dowód rozbijemy na lematy. Zaczniemy od opisu kontrukcji.

Niech B będzie algebrą zbiorów domknięto-otwartych kostki Cantora wagi ω_1, $B = CO(D^{\omega_1})$. Jak wiemy, bazę topologii w przestrzeni D^{ω_1} stanowią zbiory postaci:

$$(1)\quad p_{\alpha_1}^{-1}(i_1) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(i_n),$$

gdzie $p_{\alpha_j} : D^{\omega_1} \longmapsto \{-1,1\}$ jest rzutowaniem kanonicznym oraz $i_j \in \{-1,1\}$. Skoro każdy zbiór domknięto-otwarty w D^{ω_1} jest zwarty, to elementami algebry B są zbiory będące sumami skończonymi zbiorów postaci (1). Zbiór pusty (zero algebry B) także można zapisać w tej postaci: $\emptyset = p_{\alpha}^{-1}(1) \cap p_{\alpha}^{-1}(-1)$. Każdy zbiór u postaci (1) jest wyznaczony jednoznacznie przez funkcję odwzorowującą zbiór skończony $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \omega_1$ w zbiór $\{-1,1\}$, mianowicie zbiór wszystkich przedłużeń tej funkcji do funkcji odwzorowujących ω_1 w $\{-1,1\}$ jest identyczny ze zbiorem u. W celu uproszczenia rachunków będziemy identyfikować zbiór u z tą właśnie funkcją, tzn. każdą funkcję $u:\{\alpha_1,\ldots$ $\ldots,\alpha_n\} \longrightarrow \{-1,1\}$, gdzie $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \omega_1$, identyfikujemy ze zbiorem $p_{\alpha_1}^{-1}(u(\alpha_1)) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(u(\alpha_n))$. Zbiór $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, na którym określona jest funkcja u, będziemy oznaczać symbolem s(u). Niech A będzie zbiorem wszystkich funkcji u odwzorowujących zbiór skończony $s(u) \subset$

$\subset \omega_1$ w zbiór $\{-1,1\}$ oraz niech $A_\alpha = \{u \in A : s(u) \subset \alpha\}$ dla $\alpha < \omega_1$ ($s(u) \subset \alpha$ oznacza, że $\xi < \alpha$ dla każdego $\xi \in s(u)$). Mamy oczywistą równość:

(2) $A = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Dla każdego $\xi < \omega_1$ niech $a_\xi \in A$ będzie funkcją taką, że $s(a_\xi) = \{\xi\}$ oraz $a_\xi(\xi) = 1$. Symbolem $-a_\xi$ będziemy oznaczali funkcję o dziedzinie równej $\{\xi\}$ taką, że $-a_\xi(\xi) = -1$. Wówczas każdy element zbioru A możemy zapisać w postaci:

(3) $\varepsilon_1 a_{\xi_1} \cap \ldots \cap \varepsilon_n a_{\xi_n}$,

gdzie $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$ dla $i \leq n$. W szczególności $-a_\xi \cap a_\xi$ jest zerem algebry B. Z tego, co już powiedzieliśmy, wynika, że każdy element algebry B jest sumą skończenie wielu elementów postaci (3).

Jeśli $w = u_1 \cup \ldots \cup u_n$, gdzie $u_i \in A$ dla $i \leq n$, to przyjmujemy $s(w) = s(u_1) \cup \ldots \cup s(u_n)$. Dla każdego $\alpha < \omega_1$ niech B_α będzie podalgebrą algebry B generowaną przez zbiór A_α. Wówczas, jak łatwo zauważyć, $B_\alpha = \{w \in B : s(w) \subset \alpha\}$.

Niech W oznacza zbiór wszystkich liczb porządkowych granicznych mniejszych od ω_1. Zbiór W jest, jak widać, domknięty i nieograniczony. Na mocy twierdzenia Fodora-Ulama (patrz rozdział III, § 2) zbiór ω_1 jest sumą ω_1 rozłącznych zbiorów stacjonarnych. Wynika stąd, że istnieje rodzina $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ zbiorów stacjonarnych takich, że

(4) $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ dla $\alpha \neq \beta$,

(5) $W_\alpha \subset \{\xi < \omega_1 : \alpha < \xi\}$,

(6) $\bigcup\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\} = W$.

Pokażemy, że istnieje funkcja różnowartościowa $f : \omega_1 \to A$ taka, że

(7) $f(\omega_1) = A$, oraz

(8) $f(\{\xi < \omega_1 : \xi < \alpha\}) = A_\alpha$ dla $\alpha \in W$.

Posługując się indukcją pozaskończoną (ze względu na zbiór dobrze uporządkowany W), konstruujemy ciąg funkcji $\{f_\alpha : \alpha \in W\}$ taki, że

(a) f_α odwzorowuje w sposób różnowartościowy zbiór α na zbiór A_α,

(b) jeśli $\alpha<\beta$ oraz $\alpha, \beta \in W$, to $f_\beta | \alpha = f_\alpha$.

Konstrukcja taka jest możliwa, bo $|A_\alpha| = \omega$ oraz $|\alpha| = \omega$ dla każdego $\alpha \in W$, oraz jeśli $\alpha<\beta$, to $|A_\beta - A_\alpha| = \omega$; szczegóły pomijamy. Jeśli ciąg $\{f_\alpha : \alpha \in W\}$ jest już określony, to przyjmujemy funkcję $f : \omega_1 \longrightarrow A$ jako sumę funkcji f_α; tzn. $f(\xi) = f_\alpha(\xi)$ dla $\xi < \alpha$, $\xi \in \omega_1$. Z (b) wynika, że taka definicja funkcji f jest poprawna. Z warunku indukcyjnego (a) wynikają własności (7) i (8).

Z definicji zbiorów W_α (patrz (4) i (6)) wynika, że dla każdego $\delta \in W$ istnieje dokładnie jedno $\alpha<\omega_1$ takie, że $\delta \in W_\alpha$. Z warunku (5) wynika, że jeśli $\delta \in W_\alpha$, to $\alpha<\delta$. Zatem, na mocy (8), $f(\alpha) \in A_\delta$. Wobec definicji zbioru A_δ mamy więc:

(9) jeśli $\delta \in W_\alpha$, to $s(f(\alpha)) \subset \delta$.

Każda liczba $\delta<\omega_1$ jest przeliczalna. Zatem, na mocy (9), dla każdego $\delta \in W$ istnieje ciąg $\{\xi(\delta, n) : n<\omega\}$ taki, że

(10) $\beta<\xi(\delta,n)<\xi(\delta,n+1)<\delta$, gdzie $n<\omega$, $\beta \in s(f(\alpha))$, oraz $\alpha<\omega_1$ jest takie, że $\delta \in W_\alpha$,

(11) $\xi(\delta,n) \notin W$ dla $n<\omega$,

(12) $\sup\{\xi(\delta,n) : n<\omega\} = \delta$.

Po tych przygotowaniach możemy już przystąpić do definicji tej algebry Boole'a, której uzupełnienie okaże się algebrą sztywną. Algebrą tą jest algebra ilorazowa $B|I$, gdzie I jest najmniejszym ideałem zawierającym wszystkie elementy postaci:

(13) $y_\delta - f(\alpha)$, gdzie $\delta \in W_\alpha$, oraz

(14) $y_\delta - x_{\xi(\delta,n)}$, gdzie $\delta \in W$ oraz $n<\omega$,

przy czym od tej pory przyjmujemy następującą umowę: $a_\delta = y_\delta$, jeśli $\delta \in W$ oraz $a_\xi = x_\xi$, jeśli $\xi \in \omega_1 - W$. Innymi słowy, $u \in I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \leq w_1 \cup \ldots \cup w_n$, gdzie w_i jest postaci (13) lub (14), dla każdego $i \leq n$. W lemacie 1 podamy wygodne kryterium na to, by $u \in I$. Wpierw opiszemy pewną pomocniczą konstrukcję.

Niech $s\subset\omega_1$ będzie zbiorem skończonym. Ciąg zbiorów skończonych $\{F^n(s) : n<\omega\}$ określamy następująco:

$$F^1(s) = s,$$

$$F^{n+1}(s) = F^n(s)\cup\bigcup\{s(f(\alpha)) : W_\alpha\cap F^n(s) \neq \emptyset\}.$$

Niech $F(s) = \bigcup\{F^n(s) : n<\omega\}$. Pokażemy, że zbiór $F(s)$ zawiera s, jest skończony i ma następującą własność:

(15) jeśli $W_\alpha\cap F(s) \neq \emptyset$, to $s(f(\alpha))\subset F(s)$.

Inkluzja $s\subset F(s)$ jest oczywista. Skończoność zbioru $F(s)$ wynika stąd, że ciąg $\{F^n(s) : n<\omega\}$ stabilizuje się od pewnego miejsca, tzn. istnieje liczba $m<\omega$ taka, że $F^m(s) = F^k(s)$ dla każdego $k\leq m$. Istotnie, jeśli $\delta\in W_\alpha\cap F^n(s)$, to $\beta<\delta$ dla każdego $\beta\in s(f(\alpha))$ oraz $s(f(\alpha)) \subset F^{n+1}(s)$. Zatem, gdyby ciąg $\{F^n(s) : n<\omega\}$ nie stabilizował się, to istniałby ciąg nieskończony $\{\delta_n : n<\omega\}$ taki, że $\delta_{n+1}<\delta_n$, co przeczy własnościom liczb porządkowych. Ze stabilizowania się ciągu $\{F_n : n<\omega\}$ wynika także własność (15).

Dla każdego $u\in B$ określmy teraz element $I(u)\in I$ następującym wzorem:

$$(16)\quad I(u) = \bigcup\{y_\delta - f(\alpha) : \delta\in W_\alpha\cap F(s(u))\}\cup$$
$$\cup\bigcup\{y_\delta - x_{\xi(\delta,n)} : \delta\in W\cap F(s(u)) \text{ oraz } \xi(\delta,n) \in F(s(u))\}.$$

LEMAT 1. Jeśli $u\in I$, to $u\leq I(u)$.

Dowód. Niech $u\in I$ oraz $F = F(s(u))$. Przypuśćmy, że $u_1 = u - I(u) \neq 0$. Skoro $s(u)\subset F$ oraz $s(I(u))\subset F$ (patrz określenie (16)), to $s(u_1)\subset F$. Skoro $u_1\leq u$ oraz $u\in I$, to $u_1\in I$. Zatem istnieją zbiory $\{\eta_1,\dots,\eta_k\}$ i $\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$ zawarte w W oraz liczby $n_1,\dots, n_m<\omega$ takie, że

$$(17)\quad u_1\leq\bigcup\{y_{\eta_i} - f(\alpha_i) : \eta_i\in W_{\alpha_i} \text{ oraz } i\leq k\}\cup$$
$$\cup\bigcup\{y_{\delta_i} - x_{\xi(\delta_i,n_i)} : i\leq m\},$$

przy czym liczby δ_i mogą się powtarzać w ciągu $\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$. Możemy zatem założyć, że

$$(18)\quad u_1 \leqslant I(u) \cup \bigcup \{y_{\eta_i} - f(\alpha_i) : \eta_i \in W_{\alpha_i} \text{ oraz } i \leqslant k\} \cup$$

$$\cup \bigcup \{y_{\delta_i} - x_{\xi(\delta_i, n_i)} : i \leqslant m\},$$

przy czym zachodzą związki:

$$(19)\quad F \cap \{\eta_1,\dots,\eta_k\} = \emptyset,$$

$$(20)\quad \text{jeśli } \delta_i \in F, \text{ to } \xi(\delta_i, n_i) \notin F,$$

co wynika łatwo z określenia (16).

Wymnóżmy obydwie strony nierówności (18) przez elementy $-y_{\eta_i}$ dla każdego $i \leqslant k$ oraz przez elementy $-y_{\delta_i}$, jeśli $\delta_i \notin F$, lub przez $x_{\xi}(\delta_i, n_i)$, jeśli $\delta_i \in F$. Skoro $s(u_1) \subset F$, to na mocy (19) i (20) w ten sposób otrzymany po lewej stronie nierówności (18) element u_2 jest niezerowy oraz zachodzi

$$u_2 \leqslant u_1 \quad \text{i} \quad u_2 \leqslant I(u).$$

Skoro $u_1 \cap I(u) = 0$, to $u_2 = 0$; sprzeczność.

LEMAT 2. Jeśli $u \in A$, $w \in B$ oraz $0 < \varepsilon a_\alpha \cap u \leqslant w$, gdzie $\varepsilon \in \{-1,1\}$ oraz $\alpha \in \omega_1 - s(w)$, to $u \leqslant w$.

Dowód. Przypomnijmy, że elementami zbiorów u, w i a są funkcje określone na ω_1 i przyjmujące wartości w zbiorze $\{-1,1\}$, a nierówność "$\leqslant$" oznacza faktycznie inkluzję. Niech $u = \varepsilon_1 a_{\alpha_1} \cap \dots \cap$

$\cap \varepsilon_n a_{\alpha_n}$, gdzie $\varepsilon_i = u(\alpha_i)$. Skoro $\varepsilon a_{\alpha} \cap u \neq 0$, to możemy przyjąć, że $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Niech $p : \omega_1 \to \{-1,1\}$ będzie taką funkcją, że $p \in u$. Wówczas $p(\alpha_i) = \varepsilon_i$ dla każdego $i \leq n$. Niech funkcja $q : \omega_1 \to \{-1,1\}$ będzie określona wzorem:

$$q(\beta) = \begin{cases} \varepsilon & \text{jeśli } \beta = \alpha \\ p(\beta) & \text{jeśli } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

Skoro $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, to $q \in \varepsilon a_{\alpha} \cap u$. Zatem $q \in w$. Istnieje wówczas element $\varepsilon_1 a_{\alpha'_1} \cap \ldots \cap \varepsilon_k a_{\alpha'_k} \leq w$ taki, że $q \in \varepsilon_1 a_{\alpha'_1} \cap \ldots \cap \varepsilon_k a_{\alpha'_k}$, tzn. $q(\alpha'_i) = \varepsilon_i$ dla $i \leq k$. Skoro $\alpha \notin s(w)$, to $\alpha \notin \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k\}$. Zatem $p \in \varepsilon_1 a_{\alpha'_1} \cap \ldots \cap \alpha_k a_{\alpha'_k}$, co kończy dowód.

Przypomnijmy, że symbol $[u]$ oznacza klasę abstrakcji elementu u względem relacji dzielenia przez ideał I (tzn. $[u]$ jest elementem zbioru $B|I$). Zanotujmy następujący lemat:

LEMAT 3. Dla każdego $\delta \in W$, $[y_\delta] = \inf \{[x_{\xi(\delta,n)}] : n < \omega\}$.

Dowód. Skoro, na mocy (14), $y_\delta - x_{\xi(\delta,n)} \in I$, to $[y_\delta] \leq [x_{\xi(\delta,n)}]$ dla każdego $n < \omega$.

Załóżmy, że $u \in B$ oraz $[u] \leq [x_{\xi(\delta,n)}]$ dla każdego $n < \omega$. Pokażemy, że $[u] \leq [y_\delta]$. Przypuśćmy, że $[u] - [y_\delta] \neq 0$. Skoro zbiór A jest gęsty w B, to istnieje $w \in A$ takie, że

$$[w] \wedge [y] = 0 \text{ oraz}$$

$$[w] \leq [u].$$

Niech $w_1 = w \cap -y_\delta$. Skoro $[w] \neq 0$ oraz $[w] \wedge [y_\delta] = 0$, to $[w_1] = [w] \wedge [-y_\delta] \neq 0$. Skoro zbiór $F(s(w_1))$ jest skończony, to istnieje $n<\omega$ takie, że $\xi(\delta,n) \notin F(s(w_1))$. Niech $w_2 = w_1 \cap -X_{\xi(\delta,n)}$. Skoro $w_1 \neq 0$ oraz $\xi(\delta,n) \notin s(w_1)$, to $w_2 \neq 0$. Pokażemy, że $[w_2] \neq 0$. Przypuśćmy, że $w_2 \in I$. Wówczas, na mocy lematu 1,

$$(21)\quad w_2 \leqslant I(w_2) = \bigcup\{y_\eta - f(\alpha) : \eta \in W_\alpha \cap F\} \cup$$
$$\cup \bigcup\{y_\delta - X_{\xi(\delta,n)} : \delta \in W \cap F \text{ oraz } \xi(\delta,n) \in F\},$$

gdzie $F = F(s(w_2))$. Skoro $w_2 \cap -y_\delta = w_2$, to możemy przyjąć, że $\xi(\delta,n) \notin s(I(w_2))$, bo w przeciwnym wypadku możemy obydwie strony nierówności (21) wymnożyć przez $-y_\delta$ i pozbyć się składnika $y_\delta - X_{\xi(\delta,n)}$ po prawej stronie (zauważmy, że $F(s(w_2)) = F(s(w_1)) \cup \{\xi(\delta,n)\}$, a więc $X_{\xi(\delta,n)}$ nie występuje w żadnym innym miejscu w wyrażeniu po prawej stronie nierówności (21)).

Zatem, na mocy lematu 2, $w_1 \in I$; sprzeczność.

Pokazaliśmy więc, że $[w_2] \neq 0$. Z drugiej jednak strony $[w_2] \leqslant [w_1] \leqslant [w] \leqslant [u] \leqslant [X_{\xi(\delta,n)}]$. Zatem $[w_2] = [w_2 \cap X_{\xi(\delta,n)}] = [0] = 0$; sprzeczność.

LEMAT 4. Jeśli $z \in W$ jest zbiorem nieskończonym, to $\inf\{[y_\delta] : \delta \in z\} = 0$.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje $u \in A$ takie, że $[u] \neq 0$ oraz $[u] \leqslant [y_\delta]$ dla każdego $\delta \in z$. Skoro zbiór $F(s(u))$ jest skończony, to istnieje $\delta \in z - F(s(u))$. Rozważmy element $u_1 = u \cap -y_\delta$. Skoro $s(u) \subset F(s(u))$, to $u_1 \neq 0$. Pokażemy, że $[u_1] \neq 0$. Przypuśćmy, że $u_1 \in I$. Wówczas, na mocy lematu 1,

$$(22)\quad u_1 \leqslant I(u_1) = \bigcup\{y_\eta - f(\alpha) : \eta \in W_\alpha \cap F\} \cup$$
$$\cup \bigcup\{y_\sigma - X_{\xi(\sigma,n)} : \sigma \in W \cap F \text{ oraz } \xi(\sigma,n) \in F\},$$

gdzie $F = F(s(u_1))$. Skoro $\delta \notin F(s(u))$ oraz $\delta \in W_\alpha$ implikuje $s(f(\alpha)) \subset \delta$ (patrz (9)), to y_δ może występować po prawej stronie nierówności (22) jedynie ze znakiem +. Zatem, podobnie jak w poprzednim dowodzie, możemy zakładać, że y_δ nie występuje po prawej stronie nierówności (22). Wobec lematu 2, mamy $u \in I$; sprzeczność. Tym samym $[u_1] \neq 0$.

Z drugiej strony $[u_1] < [u] \leq [y_\delta]$. Zatem $[u_1] = [u_1 \cap y_\delta]$; sprzeczność, bo $u_1 \cap y_\delta = 0$.

LEMAT 5. Dla każdego $u \in A - I$ istnieje $u' \in A - I$ takie, że $u' \leq u$ oraz $s(u') = F(s(u))$.

Dowód. Ustalmy $u \in A - I$. Jeśli $s(u) = F(s(u))$, to nie ma czego dowodzić. Jeśli $s(u) \neq F(s(u))$, to niech $\gamma = \max(F(s(u)) - s(u))$; przypomnijmy, że $s(u) \subset F(s(u))$. Pokażemy, że istnieje $u_1 \in A - I$ takie, że $u_1 \leq u$ oraz $s(u_1) = s(u) \cup \{\gamma\}$. Skoro $\gamma \in F(s(u))$, to na mocy (15) $F(s(u_1)) = F(s(u))$. Jeśli $s(u_1) \neq F(s(u_1))$, to opisaną operację powtarzamy w stosunku do u_1. Skoro zbiór $F(s(u)) - s(u)$ jest skończony, to po pewnej skończonej liczbie kroków dojdziemy do szukanego elementu u'.

Opiszemy teraz konstrukcję elementu u_1. Zauważmy wpierw, że skoro $\gamma \in F(s(u)) - s(u)$, to istnieje $\eta \in F(s(u))$ takie, że dla pewnego $\alpha < \omega_1$, $\eta \in W_\alpha$ oraz $\gamma \in s(f(\alpha))$; patrz definicja zbioru $F(s(u))$. Skoro, na mocy (9), $\gamma < \eta$, to $\eta \in s(u)$ (bo γ jest największe w zbiorze $F(s(u)) - s(u)$). Rozważmy teraz dwa przypadki:

Przypadek 1. Istnieje $\eta \in F(s(u)) \cap W_\alpha$ takie, że $\gamma \in s(f(\alpha))$ oraz $u(\eta) = 1$. Załóżmy, że $f(\alpha) = \varepsilon_1 a_{\beta_1} \cap \ldots \cap \varepsilon_n a_{\beta_n}$ oraz $\beta_1 = \gamma$ (założenie takie wolno nam przyjąć bez zmniejszenia ogólności). Niech $u_1 = \varepsilon_1 a_{\beta_1} \cap u$. Pokażemy, że $[u_1] \neq 0$. Istotnie, skoro $y_\eta - f(\alpha) \in I$, to także $y_\eta - \varepsilon_1 a_{\beta_1} \in I$. Zatem $[y_\eta] \leq [\varepsilon_1 a_{\beta_1}]$. Skoro $u \cap y_\eta = u$, to $0 < [u] = [u \cap y_\eta] \leq [u \cap \varepsilon_1 a_{\beta_1}] = [u_1]$.

Przypadek 2. Dla każdego $\eta \in F(s(u)) \cap W_\alpha$ takiego, że $\gamma \in s(f(\alpha))$, $u(\eta) = -1$. Załóżmy dodatkowo, że $\gamma \notin W$. Wówczas przyjmujemy, że $u_1 = X_\gamma \cap u$. Twierdzimy, że $u_1 \notin I$. Istotnie, w przeciwnym przypadku

$$(23)\quad u_1 \leq I(u_1) = \bigcup\{y_\eta - f(\alpha) : \eta \in W_\alpha \cap F\} \cup$$
$$\cup \bigcup\{y_\sigma - X_{\xi(\sigma,n)} : \sigma \in W \cap F \text{ i } \xi(\sigma,n) \in F\},$$

gdzie $F = F(s(u_1))$. Zauważmy, że $F = F(s(u)) \cup \{\gamma\}$. Jeśli obydwie strony nierówności wymnożymy przez X_γ oraz przez każdy element $-y_\eta$ taki, że $\eta \in F(s(u)) \cap W_\alpha$ oraz $\gamma \in s(f(\alpha))$, to otrzymamy nierówność:

(24) $u_1 \leqslant w$, gdzie $w \in I$ oraz $\gamma \notin s(w)$.

Zatem, na mocy lematu 2, $u \in I$; sprzeczność.

Jeśli $\gamma \in W$, to przyjmujemy $u_1 = -y_\gamma \cap u$. Podobnie jak poprzednio, łatwo sprawdzić, że $u_1 \notin I$.

LEMAT 6. sat $(B|I) = \omega_1$.

Dowód. Przypuśćmy, że w $B|I$ istnieje zbiór mocy ω_1 złożony z elementów rozłącznych.
Wówczas z lematu 5 wynika, że istnieje zbiór $R \subset A$ mocy ω_1 taki, że

(25) jeśli $u, w \in R$ i $u \neq w$, to $u \cap w \in I$,

(26) $s(u) = F(s(u))$ dla każdego $u \in R$,

(27) $R \cap I = \emptyset$.

Każdy element $u \in A$ możemy traktować jak funkcję, której dziedziną jest $s(u)$, a zbiór wartości jest zawarty w $\{-1, 1\}$. Zatem, na mocy twierdzenia Marczewskiego (patrz twierdzenie 2, rozdział III, § 3), istnieją : zbiór $R_1 \subset R$ mocy ω_1 oraz zbiór skończony $s_0 \subset \omega_1$, spełniające warunek:

(28) jeśli $u, w \in R_1$ i $u \neq w$, to $s(u) \cap s(w) = s_0$ oraz $u|s_0 = w|s_0$.

Twierdzimy, że

(29) jeśli $u, w \in R_1$ i $u \neq w$, to istnieje $\delta \in s(u) \cap W$ takie, że $u(\delta) = 1$ oraz dla pewnego n $w(\xi(\delta, n)) = -1$, lub istnieje $\eta \in s(w) \cap W$ takie, że $w(\eta) = 1$ oraz dla pewnego n, $u(\xi(\eta, n)) = -1$.

Ustalmy $u, w \in R_1$ takie, że $u \neq w$. Niech $z = u \cap w$ i niech $F = F(s(z))$. Na mocy warunku (26), $F = s(u) \cup s(w)$. Skoro $z \in I$, to

$$(30)\quad z \leq I(z) = \bigcup\{y_\eta - f(\alpha) : \eta \in W_\alpha \cap F\} \cup$$
$$\cup \bigcup\{y_\eta - X_{\xi(\eta,n)} : \eta \in W \cap F \text{ i } \xi(\eta,n) \in F\}.$$

Istnieje $\delta \in W \cap F$ takie, że $z(\delta) = 1$ i $z(\xi(\delta,n)) = -1$ dla pewnego $n<\omega$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas, wymnażając odpowiednio oby-dwie strony nierówności (30), otrzymujemy:

$$(31)\quad z \leq \bigcup\{y_\eta - f(\alpha) : \eta \in W_\alpha \cap F\}.$$

Niech $F' = \{\eta \in W : z(\eta) = 1\}$. Łatwo widać, że $F' \subset F$ oraz

$$(32)\quad z \leq \bigcup\{y_\eta - f(\alpha) : \eta \in W_\alpha \cap F'\}.$$

Ustalmy dowolne $\eta \in F' \cap W_\alpha$. Niech $f(\alpha) = \varepsilon_1 a_{\beta_1} \cap \ldots \cap \varepsilon_n a_{\beta_n}$. Wówczas $y_\eta - f(\alpha) = (y_\eta - \varepsilon_1 a_{\beta_1}) \cup \ldots \cup (y_\eta - \varepsilon_n a_{\beta_n})$. Przypomnijmy, że $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subset s(z)$. Na mocy warunku (28) $z \neq 0$, więc możemy zakładać, że $z(\beta_i) = -\varepsilon_i$ dla pewnego $i \leq n$. Jeśli $\eta \in s(u) = F(s(u))$, to także $s(f(\alpha)) \subset s(u)$, czyli $\beta_i, \eta \in s(u)$. Zatem $u \leq y_\eta - \varepsilon_i a_{\beta_i} \in I$, co daje sprzeczność z warunkiem (27).

Pokazaliśmy, że istnieje element $\delta \in W \cap F$ taki, że $z(\delta) = 1$ i $z(\xi(\delta,n)) = -1$ dla pewnego $n<\omega$. Stąd otrzymujemy warunek (29), bo $F = s(u) \cup s(w)$.

Z warunków (27), (28) i (29) wynika, że jeśli powiększymy każdy element u zbioru R_1, usuwając z jego dziedziny (ze zbioru $s(u)$) zbiór s_0, to otrzymamy rodzinę R_2 spełniającą warunki:

(33) $|R_2| = \omega_1$,

(34) jeśli $u, w \in R_2$ i $u \neq w$, to $s(u) \cap s(w) = \emptyset$,

(35) jeśli $u, w \in R_2$ i $u \neq w$, to $u(\eta) = 1$ oraz $w(\xi(\eta,n)) = -1$ dla pewnego $\eta \in s(u)$ i $\xi(\eta,n) \in s(w)$ lub $w(\delta) = 1$ oraz $u(\xi(\delta,m)) = -1$ dla pewnego $\delta \in s(w)$ i $\xi(\delta,m) \in s(u)$.

Dla każdego $u \in R_2$ niech

$$A_u = \{\xi(\delta,n) \in s(u) : u(\xi(\delta,n)) = -1\}.$$

Zbiory A_u są skończone. Z warunków (33), (34) i stąd, że kofinalność zbioru ω_1 jest nieprzeliczalna, wynika, że istnieje zbiór $\{u_\alpha : \alpha<\omega_1\} \subset R_2$ taki, że

(36) jeśli $\alpha<\beta<\omega_1$ oraz $\xi\in A_{u_\alpha}$ i $\xi'\in A_{u_\beta}$, to $\xi<\xi'$.

W dalszym ciągu dowodu zamiast A_{u_α} będziemy pisali A_α. Dla każdego $\alpha<\omega_1$ niech

$$B_\alpha = \{\xi(\delta,n) : u_\alpha(\delta) = 1 \text{ oraz } n<\omega\}.$$

Każdy zbiór B_α jest przeliczalny, a jego typ porządkowy jest równy $\omega\cdot n$, gdzie $n<\omega$. Z warunku (35) wynika, że jeśli $B_\beta \cap A_\alpha = \emptyset$, to istnieje $\delta<\omega_1$ takie, że $u_\alpha(\delta) = 1$ i $u_\beta(\xi(\delta,n)) = -1$ dla pewnego $n<\omega$. Zatem, na mocy warunku (34), zbiór $\{\beta<\omega_1 : B_\beta \cap A_\alpha = \emptyset\}$ jest przeliczalny dla każdego $\alpha<\omega_1$. To oznacza, że

(37) dla każdego $\alpha<\omega_1$ istnieje $\beta<\omega_1$ takie, że jeśli $\gamma>\beta$, to $A_\alpha \cap B_\gamma \neq \emptyset$.

Rozważmy zbiór $A_{\omega\cdot\omega}$. Z warunku (37) i stąd, że $cf(\omega_1) = \omega_1$, wynika, że istnieje $\mu<\omega_1$ takie, że $B_\mu \cap A_\alpha \neq \emptyset$ dla każdego $\alpha<\omega\cdot\omega$. Zatem, na mocy warunku (36), zbiór B_μ zawiera podzbiór uporządkowany w typ $\omega\cdot\omega$. W ten sposób otrzymujemy sprzeczność, bo – jak zauważyliśmy wcześniej – zbiór B_μ ma typ porządkowy $\omega\cdot n$, gdzie n jest pewną liczbą skończoną.

Niech C oznacza uzupełnienie algebry $B|I$, tzn. $C = (B|I)^c$. Dla każdego $\alpha<\omega_1$ określmy zbiór

(38) $Q_\alpha = \{u\in C:$ istnieje zbiór $X\subset B_\alpha$ taki, że $u = \sup\{[w] : w\in X\}\}$,

gdzie $\sup(Z)$ rozumiane jest jako kres górny zbioru Z w algebrze Boole'a C.

LEMAT 7. $C = \bigcup\{Q_\alpha : \alpha<\omega_1\}$.

Dowód. Skoro $B = \bigcup\{B_\alpha : \alpha<\omega_1\}$, to $B|I \subset \bigcup\{Q_\alpha : \alpha<\omega_1\} \subset C$.

Skoro zbiór $B|I$ jest gęsty w C, to także zbiór $Q = \bigcup\{Q_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ jest gęsty w C. Ustalmy $u \in C$ oraz zbiór $Z \subseteq Q$ składający się z elementów rozłącznych i taki, że $\sup(Z) = u$. Skoro $\mathrm{sat}(B|I) = \omega_1$, to Z jest zbiorem przeliczalnym. Zatem istnieje $\alpha < \omega_1$ takie, że $Z \subset Q_\alpha$, czyli $u = \sup(Z) \in Q_\alpha$.

Zbiory Q_α są, jak widać, zamknięte ze względu na kres górny. O kresach dolnych nie można tego twierdzić. W następnych lematach zmierzać będziemy do pokazania, że jeśli $Z \subset Q_\alpha$ oraz $\inf(Z) \cap [y_\alpha] = 0$, to $\inf(Z) \in Q_\alpha$.

LEMAT 8. Jeśli $u \in A$, $\delta \in W$ oraz $[u] \wedge [y_\delta] = 0$, to istnieje $u' \in A$ takie, że $s(u') \subset \delta$ i $[u] \leq [u']$ oraz spełniony jest warunek:

(39) jeśli $w \in A$ i $s(w) \subset \delta$ oraz $[u] \wedge [w] = 0$, to $[u'] \wedge [w] = 0$.

Dowód. Jeśli $[u] = 0$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $[u] \neq 0$. Skoro $u \wedge y_\delta \in I$ oraz $u \notin I$, to

(40) $u(\delta) = -1$ lub $\delta \notin s(u)$.

Rozważmy zbiór $T = \{\alpha \in s(u) : \alpha \geq \delta\}$. Jeśli $T = \emptyset$, to możemy przyjąć $u' = u$. Załóżmy więc, że $T \neq 0$ oraz $\eta = \max(T)$. Pokażemy, że istnieje $u_1 \in A$ takie, że

(41) $u_1(\delta) = -1$ lub $\delta \notin s(u)$,

(42) jeśli $\alpha \in s(u_1)$ i $\alpha \geq \delta$, to $\alpha < \eta$,

(43) jeśli $w \in A_\delta$ i $u \cap w \in I$, to $u_1 \cap w \in I$,

gdzie $A_\delta = \{a \in A : s(a) \subset \delta\}$ (patrz (2)),

(44) $[u] \leq [u_1]$.

Łatwo zauważyć, że jeśli operację opisaną warunkami (41) - (44) będziemy powtarzali, to po pewnej skończonej liczbie kroków otrzymamy element $u' \in A_\delta$ taki, że $[u] \leq [u']$ i będzie spełniony warunek (39). Istotnie, w przeciwnym wypadku istniałby ciąg nieskończony liczb porządkowych $\{\eta_n : n < \omega\}$ taki, że $\eta_{n+1} < \eta_n$, co jest niemożliwe.

Konstrukcję elementu u_1 spełniającego (41) - (44) rozbijemy na trzy przypadki.

Przypadek 1. $\eta \in W$ oraz $u(\eta) = 1$. Wówczas istnieje element $v \in A$ taki, że $s(v) \subset \eta'$ oraz $u = y_\eta \cap v$. Na mocy (40) $\eta > \delta$. Zatem zbiór tych liczb $n < \omega$, dla których $\xi(\eta,n) < \max(s(v) \cup \{\delta\})$, jest skończony. Niech $\{n_1,\ldots,n_k\} = \{n: \xi(\eta,n) < \max(s(v) \cup \{\delta\})\}$. Niech $\alpha < \omega_1$ będzie takie, że $\eta \in W_\alpha$. Widać, że $f(\alpha)$ można zapisać w następującej postaci:

$$f(\alpha) = b_1 \cap b_2,$$

gdzie $b_1 = 1$ lub $s(b_1) = \{\beta \in s(f(\alpha)) : \beta \leq \max(s(v) \cup \{\delta\})\}$ oraz $b_2 = 1$ lub $s(b_2) = \{\beta \in s(f(\alpha)) : \beta > \max(s(v) \cup \{\delta\})\}$. Przyjmujemy:

$$u_1 = v \cap b_1 \cap X_{\xi(\eta,n_1)} \cap \ldots \cap X_{\xi(\eta,n_k)}.$$

Z konstrukcji widać, że spełnione są warunki (41) i (42). Aby sprawdzić (43), ustalmy $w \in A_\delta$ takie, że $u \cap w \in I$. Mamy wówczas nierówność:

$$(45) \quad u \cap w \leq I(u \cap w) = \bigcup\{y_\beta - f(\gamma) : \beta \in W_\gamma \cap F\} \cup$$
$$\cup \bigcup\{y_\delta - X_{\xi(\delta,n)} : \delta \in W \cap F \text{ i } \xi(\delta,n) \in F\},$$

gdzie $F = F(s(u \cap w))$. Wymnóżmy obydwie strony nierówności (45) przez element $b_1 \cap X_{\xi(\eta,n_1)} \cap \ldots \cap X_{\xi(\eta,n_k)}$. Otrzymujemy nierówności:

$$y_\eta \cap u_1 \cap w \leq z \cup (y_\eta \cap -b_2) \cup \bigcup\{y_\eta - X_{\xi(\eta,n)} : \xi(\eta,n) \in F$$
$$\text{oraz } \xi(\eta,n) \geq \max(s(v) \cup \{\delta\})\},$$

gdzie z jest pewnym elementem takim, że $z \in I$ oraz dla każdego $\beta \in s(z)$, $\beta < \max(s(v) \cup \{\delta\})$. Zauważmy, że $s(u_1 \cap w) \subset \max(s(v) \cup \{\delta\})$ oraz dla każdego $\beta \in s(b_2)$, $\beta > \max(s(v) \cup \{\delta\})$. Wynika stąd, że

$$y_\eta \cap u_1 \cap w \leq z$$

(można założyć, że $y_\eta \cap u_1 \cap w \neq 0$, bo inaczej także $u_1 \cap w = 0$). Zatem, na mocy lematu 2, $u_1 \cap w \leq z$, czyli $u_1 \cap w \in I$.

Sprawdźmy teraz, że $[u] \leq [u_1]$. Wynika to prosto stąd, że $[y_\eta] \leq [X_{\xi(\eta,n)}]$ i $[y_\eta] \leq [f(\alpha)]$ oraz $u \leq y_\eta$.

Przypadek 2. $\eta \in W$ oraz $u(\eta) = -1$. Wówczas istnieje $v \in A$ takie, że $u = -y_\eta \cap v$. Przyjmujemy $u_1 = v$. Warunki (41), (42) i (44) spełnione są w sposób oczywisty. Aby sprawdzić (43), ustalmy $w \in A_\delta$ takie, że $u \cap w \in I$. Mamy wówczas nierówność:

$$(46)\quad -y_\eta \cap v \cap w \leq \bigcup\{y_\beta - f(\gamma) : \beta \in W_\gamma \cap F\} \cup$$
$$\cup \bigcup\{y_\sigma - X_{\xi(\sigma,n)} : \sigma \in W \cap F \text{ i } \xi(\sigma,n) \in F\},$$

gdzie $F = F(s(u \cap w))$. Skoro η jest elementem maksymalnym w $s(u \cap w)$, to η jest także elementem maksymalnym w F. Wynika stąd, że element y_η może występować po prawej stronie nierówności (46) jedynie ze znakiem +. Zatem, jeśli wymnożymy obydwie strony nierówności (46) przez $-y_\eta$, to otrzymamy nierówność:

$$-y_\eta \cap u_1 \cap w \leq z,$$

gdzie $z \in I$ oraz $\eta \notin S(z)$. Zatem, na mocy lematu 2, $u_1 \cap w \leq z$, czyli $u_1 \cap w \in I$.

Przypadek 3. $\eta \in W$. Wówczas istnieje $v \in A$ oraz $\varepsilon \in \{-1,1\}$ takie, że $u = \varepsilon X_\eta \cap v$. Przyjmujemy $u_1 = v$. Warunki (41), (42) i (44) są spełnione w sposób oczywisty. Aby sprawdzić (43), ustalmy $w \in A_\delta$ takie, że $u \cap w \in I$. Mamy wówczas:

$$(47)\quad \varepsilon X_\eta \cap v \cap w \leq \bigcup\{y_\beta - f(\gamma) : \beta \in W_\gamma \cap F\} \cup$$
$$\cup \bigcup\{y_\sigma - X_{\xi(\sigma,n)} : \sigma \in W \cap F \text{ i } \xi(\sigma,n) \in F\},$$

gdzie $F = F(u \cap w)$. Widać, że $\eta = \max(F)$. Zatem element X_η nie może występować po prawej stronie nierówności (47). Wobec lematu 2 $u \cap w = v \cap w \in I$, co kończy dowód.

LEMAT 9. Dla każdego $\delta \in W$ oraz $u \in C$ takiego, że $u \cap [y_\delta] = 0$, istnieje element $u' \in Q_\delta$ taki, że $u \leq u'$ oraz spełniony jest warunek:

(48) dla każdego $w \in Q_\delta$, jeśli $u \leq w$, to $u' \leq w$.

Dowód. Przypomnijmy, że $B_\alpha = \{u \in B\colon s(u) \subset \alpha\}$. Niech $B_\alpha | I = \{[u]\colon u \in B_\alpha\}$. Jak widać, dla każdego $u \in B_\alpha | I$ istnieją $w_1, \ldots, w_n \in A_\alpha$ takie, że $u = [w_1] \vee \ldots \vee [w_n]$. Stąd i z lematu 8 wynika, że dla każdego $u \in B|I$ takiego, że $u \wedge [y_\delta] = 0$, istnieje $u' \in B_\delta | I$ takie, że

(49) dla każdego $w \in B_\delta | I$, jeśli $u \wedge w = 0$, to $u' \wedge w = 0$.

Ustalmy teraz element $u \in C$ taki, że $u \wedge [y_\delta] = 0$. Niech $Z \subset B|I$ będzie zbiorem takim, że $u = \sup(Z)$. Dla każdego $z \in Z$ istnieje, na mocy (49), $z' \in B_\delta | I$ takie, że $z \leqslant z'$ oraz dla każdego $w \in B_\delta | I$, jeśli $z \leqslant w$, to $z' \leqslant w$. Zgodnie z definicją zbioru Q_δ, $u' = \sup\{z' : z \in Z\} \in Q_\delta$. Niech $w \in Q_\delta$. Wówczas istnieje zbiór $V \subset B_\delta | I$ taki, że $w = \sup(V)$. Przypuśćmy, że $u \leqslant w$ oraz $u' - w \neq 0$. Wówczas istnieje $z \in Z$ takie, że $z' \wedge (-v) \neq 0$ dla każdego $v \in V$. Zatem, na mocy (49), $z \wedge (-v) \neq 0$ dla każdego $v \in V$, czyli $u - w \neq 0$; sprzeczność.

Skoro $z \leqslant z'$ dla każdego $z \in Z$, to $u \leqslant u'$, co kończy dowód.

LEMAT 10. Dla każdego $\delta \in W$ oraz zbioru $Z \subset Q_\delta$, jeśli $[y_\delta] \wedge \inf(Z) = 0$, to $\inf(Z) \in Q_\delta$.

Dowód. Niech $u = \inf(Z)$. Skoro $u \in C$ oraz $u \wedge [y_\delta] = 0$, to na mocy lematu 9 istnieje $u' \in Q_\delta$ takie, że $u \leqslant u'$ oraz spełniony jest warunek (48), tzn. $u \leqslant w$ implikuje $u' \leqslant w$ dla każdego $w \in Z$. Zatem $u = u'$, co kończy dowód.

Teraz, kiedy skompletowaliśmy już lematy, możemy przystąpić do dowodu głównego twierdzenia w tym rozdziale. Pokażemy mianowicie, że opisana wyżej algebra Boole'a C nie ma nietrywialnych automorfizmów. Algebra C jest przy tym zupełna i, jak wynika z lematu 6, $\mathrm{sat}(C) = \omega_1$.

Dowód twierdzenia. Przypuśćmy, że $h : C \longrightarrow C$ jest nietrywialnym automorfizmem algebry C, tzn. $h(w) \neq w$ dla pewnego $w \in C$.

Istnieje $u \in C$ takie, że

(50) $u \neq 0$ oraz $h(u) \wedge u = 0$.

Istotnie, za u można przyjąć ten spośród elementów $w-h(w)$, $h(w)-w$, który jest niezerowy.

Rozważmy zbiór:

(51) $X = \{\alpha<\omega_1 : h(B_\alpha|I) \subset Q_\alpha\}$

(przypomnijmy, że $B_\alpha|I = \{[u] : u \in B_\alpha\}$). Pokażemy, że zbiór X jest domknięty i nieograniczony. Na mocy twierdzenia 1 z rozdziału III, § 2, wystarczy wykazać, że funkcja $i : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ określona wzorem:

$$i(\alpha) = \min\{\beta : h(B_\alpha|I) \subset Q_\beta\}$$

jest ciągła i rosnąca (funkcja ta jest dobrze określona, bo $|h(B_\alpha|I)| = \omega$ oraz $h(B_\alpha|I) \subset C = \bigcup\{Q_\beta : \beta<\omega_1\}$; patrz lemat 7). Sprawdźmy wpierw monotoniczność: jeśli $\alpha_1 \leq \alpha_2$, to $i(\alpha_1) \leq i(\alpha_2)$. Istotnie, skoro $B_{\alpha_1}|I \subset B_{\alpha_2}|I$, to $h(B_{\alpha_1}|I) \subset h(B_{\alpha_2}|I) \subset Q_{i(\alpha_2)}$. Zatem $i(\alpha_1) \leq$ $\leq i(\alpha_2)$. Sprawdźmy teraz ciągłość: jeśli $\alpha = \sup\{\beta : \beta<\alpha\}$, to $i(\alpha) =$ $= \sup\{i(\beta) : \beta<\alpha\}$. Łatwo zauważyć, że $B_\alpha|I = \bigcup\{B_\beta|I : \beta<\alpha\}$. Zatem

$$h(B_\alpha|I) = h(\bigcup\{B_\beta|I : \beta<\alpha\}) = \bigcup\{h(B_\beta|I) : \beta<\alpha\} \subset$$
$$\subset \bigcup\{Q_{i(\beta)} : \beta<\alpha\} \subset Q_\mu,$$

gdzie $\mu = \sup\{i(\beta) : \beta<\alpha\}$ ($\mu<\omega_1$, bo $cf(\omega_1) = \omega_1$). Zatem $i(\alpha) \leq \sup$ $\{i(\beta) : \beta<\alpha\}$. Nierówność przeciwna wynika stąd, że funkcja i jest monotoniczna.

Pokazaliśmy więc, że zbiór X jest domknięty i nieograniczony. Skoro zbiór $A|I = \{[u'] : u' \in A\}$ jest gęsty w C oraz u (opisane w warunku (50)) jest niezerowe, to istnieje $\alpha<\omega_1$ takie, że

(51) $0<[f(\alpha)] \leq u$,

gdzie funkcja f odwzorowująca ω_1 na A jest opisana warunkami (7) i (8). Zbiór W_α (patrz (4) - (6)) jest stacjonarny, a zbiór X domknięty i nieograniczony. Zatem zbiór

$$Y = X \cap W_\alpha$$

jest także stacjonarny.

Dla każdego $\delta \in W$, $[y_\delta] \neq 0$, czyli $h([y_\delta]) \neq 0$. Zatem, skoro A jest gęste w C i $f(\{\alpha : \alpha<\omega_1\}) = A$, istnieje $\alpha'<\omega_1$ takie, że $0<[f(\alpha')]\leq h([y_\delta])$. Możemy więc określić funkcję $g : Y \to \omega_1$ następującym wzorem:

(52) $g(\delta) = \min\{\alpha<\omega_1 : 0<[f(\alpha)]\leq h([y_\delta])\}$.

Pokażemy, że g jest funkcją regresywną, tzn. $g(\delta)<\delta$ dla każdego $\delta \in Y$.

Ustalmy $\delta \in Y$. Na mocy lematu 3 $[y_\delta] = \inf\{[X_{\xi(\delta,n)}] : n<\omega\}$. Skoro h jest izomorfizmem, to $h([y_\delta]) = \inf\{h([X_{\xi(\delta,n)}]) : n<\omega\}$. Dla każdego $n<\omega$, $\xi(\delta,n)<\delta$ (patrz (10)). Zatem $[X_{\xi(\delta,n)}]\in B_\delta|I$ dla $n<\omega$. Skoro $\delta\in X$, to na mocy (51) $\{h([X_{\xi(\delta,n)}]) : n<\omega\}\subset Q_\delta$. Zauważmy, że $h([y_\delta])\wedge[y_\delta] = 0$. Wynika to stąd, że $[y_\delta]\leq[f(\alpha)]\leq u$ (patrz (51)), oraz $h(u)\wedge u = 0$ na mocy (50). Zatem, wobec lematu 10, $h([y_\delta])\in Q_\delta$. Skoro zbiór $A_\delta|I = \{[w] : w\in A_\delta\}$ jest gęsty w Q_δ, to istnieje $w\in A_\delta$ takie, że

$$0<[w]\leq h([y_\delta]).$$

Na mocy (8) $A_\delta = f(\{\alpha<\omega_1 : \alpha<\beta\})$. Istnieje zatem $\alpha<\beta$ takie, że $0<[f(\alpha)]\leq h([y_\delta])$. Na podstawie definicji (52) $g(\delta)<\delta$.

Wykazaliśmy, że $g : Y \to \omega_1$ jest funkcją regresywną na zbiorze stacjonarnym Y. Zatem, na mocy twierdzenia Fodora (patrz rozdział 3, § 2), istnieje zbiór stacjonarny $Z\subset Y$ taki, że $g|Z$ jest funkcją stałą. Załóżmy, że $\mu = g(\delta)$ dla $\delta\in Z$. Wówczas, na mocy (52),

(53) $0<[f(\mu)]\leq h([y_\delta])$ dla każdego $\delta\in Z$.

Skoro zbiór Z jest stacjonarny, to jest nieskończony. Zatem, na mocy lematu 4, $\inf\{[y_\delta] : \delta\in Z\} = 0$. Skoro h jest izomorfizmem, to także $\inf\{h([y_\delta]) : \delta\in Z\} = 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność z warunkiem (53). Dowód został zakończony.

Bibliografia

A l e k s a n d r o w (Alexandroff) P.S., P.S. U r y s o h n, 1929: Mémoire sur les espaces topologiques compactes. Verh. Akad. Wetensch. [Amsterdam] 14:1-96.

B a l c a r B., F. F r a n ě k, 1979: Independent families on complete Boolean algebras. Seventh Winter School on Abstract Analysis. Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences. Praha s. 10-14.

B a l c a r B., F. F r a n ě k, 198*: Independent families on complete Boolean algebras (w przygotowaniu).

B a l c a r B., P. S i m o n, P. V o j t á š, 1980: Disjoint refinement and related topics. Eight Winter School on Abstract Analysis. Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences. Praha s. 16-24.

B a l c a r B., P. S i m o n, P. V o j t á š, 198*: Refinement properties and extending of filters in Boolean algebras (w przygotowaniu).

B a l c a r B., P. V o j t á š, 1977: Refining systems on Boolean algebras. Lecture Notes in Math. 619: 45-48.

B ł a s z c z y k A., 1978: On mappings of extremally disconnected compact spaces onto Cantor cubes. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai [Budapest] 23: 143-153.

B o n n e t R., 1978: Sur les algèbres de Boole rigides (praca doktorska). Lyon.

C h a r a t o n i k J.J., 1979: On chaotic curves. Colloq. Math. 41: 219-237.

C o m f o r t W.W., 1977: Some recent applications of ultrafilters to topology. Lecture Notes in Math. 609: 34-42.

C o m f o r t W.W., S. N e g r e p o n t i s, 1974: The theory of ultrafilters. Berlin-Heidelberg-New York Springer-Verlag.

E n g e l k i n g R., 1975: Topologia ogólna. Warszawa PWN.

E r d ö s P., A. T a r s k i, 1943: On families mutually exclusive sets. Ann. of Math. 44: 315-329.

F i c h t e n h o l z G., L. K a n t o r o w i c z, 1834: Sur les opérationes linéares dans l'espace des fonctions bornées. Studia Math. 5 : 69-98.

F o d o r G., 1966: On stationary sets and regresive functions. Acta Sci. Math. Szeged 27: 105-110.

F r o l í k Z., 1968: Fixed points of extremally disconnected spaces and complete Boolean algebras. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Mat. Phys. 16 : 269-275.

G l e a s o n A.M., 1958: Projective topological spaces. Illinois J. Math. 2: 482-489.

G r o o t J. de, 1959: Groups represented by homeomorphism groups I. Math. Annalen 138: 80-102.

G u z i c k i W., P. Z b i e r s k i, 1978: Podstawy teorii mnogości. Warszawa PWN.

H a l m o s P.R., 1974: Lectures on Boolean algebras. Heidelberg--Berlin-New York Springer-Verlag.

H a u s d o r f f F., 1936: Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovich. Studia Math. 6: 18-19.

J e c h T. (Т. Йех), 1973: Теория инoжеств и метод форсинга. Москва Мир.

J e c h T., 1978: Set theory. New York-San Francisco-London.

J e f i m o w B. (Б.А. Ефимов), 1970: Экстремально несвязные бикомпакты и абсолюты. Труды Моск. Мат. Общ. 23: 235-276.

J ó n s s o n B., 1951 : A Boolean algebra without proper automorphisms. Proc. Amer. Math. Soc. 2: 766-770.

J u h á s z I., 1967: Remarks on a theorem of B. Pospišil. Comment. Math. Univ. Carolinae 8: 231-247.

J u h á s z I., 1975: Cardinal functions in topology. Mathematical Centre Tracts [Amsterdam] 34.

K a t ě t o v M., 1951: Remarks on Boolean algebras. Colloq. Math. 2: 229-235.

K i s l i a k o w S. (С.В. Кисляков), 1973: Свободные подалгебры полных булевых алгебр и пространства непрерывных функций. Сибирский мат. журнал 14: 569-581.

K o p p e l b e r g S., 1973: Free subalgebras of complete Boolean algebras. Notices Amer. Math. Soc. 20: A-418.

K u r a t o w s k i K., A. M o s t o w s k i, 1978: Teoria mnogości. Warszawa PWN.

M a c N e i l l e H.M., 1937: Partially ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc. 42 : 416-460.

M a r c z e w s k i E. (E. Szpilrajn), 1941: Remarque sur les produits cartesiens d'espaces topologiques. Dokl. Akad. Nauk SSSR 31: 525-528.

M c A l o o n K., 1971: Consistency results about ordinal definability. Annals of Math. Logic 2: 449-467.

M i o d u s z e w s k i J., 1971: Wykłady z topologii. Cz. I, II. Katowice.

M o n k J.D., 1977 : On free subalgebras of complete Boolean algebras. Arch. der Math. 29: 113-115.

M o n k J.D., W. R a s s b a c h, 1979: The number of rigid Boolean algebras. Algebra Universalis 9: 207-210.

P i e r c e R.S., 1958: A note on complete Boolean algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 9: 892-896.

P o g o r z e l s k i W.A., T. P r u c n a l, 1974: Wstęp do logiki matematycznej. Cz. I. Katowice Uniwersytet Śląski.

R i e g e r L., 1951 : Some remarks on automorphisms of Boolean algebras. Fund. Math. 38: 209-216.

S h e l a h S., 1974: Why there are many nonisomorphic models for unsuperstable theories. Int. Congress Math. Vancouvre, s. 259-264.

S h e l a h S., 1980: Remarks on Boolean algebras. Algebra Universalis 11: 77-89.

S i e r p i n s k i W., 1950: Sur les types d'ordre des ensembles linéares. Fund. Math. 37: 253-264.

S i k o r s k i R., 1948: A theorem on extension of homomorphisms. Ann. Soc. Polon. Math. 21: 332-335.

S i k o r s k i R., 1964: Boolean algebras. Berlin-Heidelberg-New York Springer-Verlag.

S t o n e M.H., 1936 : The representation theorem for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 40: 37-111.

S z a n i n N.A. (Н.А. Шанин), 1946: Одна теорема из общей теории множеств. ДАН СССР 53: 122-130.

S z a p i r o w s k i B. (Б.Е. Шапировский), 1980: Об отображениях на тихоновские кубы. Успехи Мат. Наук 35: 122-130.

S t e p a n e k P., B. B a l c a r, 1977: Embedding theorems for Boolean algebras and consistency results on ordinal definable sets J. Symb. Logic 43: 64-76.

T r a c z y k T., 1970: Wstęp do teorii algebr Boole'a. Warszawa PWN.

U l a m S., 1930: Zur Masstheorie in der allgemainen Mengenlehre. Fund. Math. 16: 140-150.

W l a d i m i r o w D.A. (D.A. Владимиров), 1969: Булевы алгебры. Москва Наука.

Skorowidz nazw

Skorowidz symboli