Jerzy Mioduszewski

Newton i źródła jego matematyki

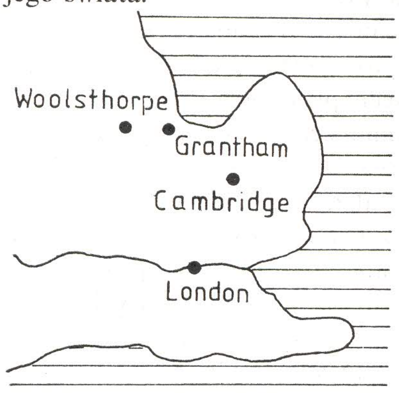
Znam zagadki nauki, znam owe przewody,
które machinę życia utrzymują w pędzie.
Wiem dobrze, co pożyczył rozum od przyrody,
a co sam niby skrzętna gospodyni przędzie.
Tworząc prawa, strategie; co sama natura
zdradzi, a co z niej wydrze chemiczna tortura.

Tych słów nie napisał Newton. Były napisane[1]) w jego kraju — w Anglii — przed jego urodzeniem.

* * *

Urodził się w Woolsthorpe — wsi nieopodal miasteczka Grantham w hrabstwie Lincoln na północ od Londynu — w Boże Narodzenie roku 1642. Ojciec zmarł przed jego urodzeniem. Kiedy miał trzy lata, matka wyszła powtórnie za mąż, zamieszkując u jego ojczyma w sąsiedniej wsi. Izaak pozostał w dawnym domu na wychowaniu u babki. W Woolsthorpe zaczął chodzić do szkoły. Kiedy miał lat dwanaście, rodzina przeniosła go do szkoły w Grantham.

Do dziewiętnastego roku życia miasteczko Grantham stanowiło centrum jego świata.



Rys. 1. Świat Newtona

Nie był to jednak świat zabity deskami. Szkoła Królewska w Grantham — bezpłatna — rówieśniczka Oksfordu, była budowana przez tego samego co Oksford budowniczego. Dawała wykształcenie ogólne: łacina, geometria, historia, literatura klasyczna. Zajmowała jedną salkę, w której wszystkie dzieci uczyły się razem. Newton nie od razu był w niej najlepszym uczniem.

Rodzina Newtona od strony matki była — jak na Woolsthorpe — boga-

[1]) George Herbert (1593—1633), *Perła* — ze zbioru Z *Tobą więc ze Wszystkimi — 222 arcydzieła angielskiej i amerykańskiej liryki religijnej*, przekład Stanisław Barańczak, Znak, Kraków 1992.

ta, ze źródłem dostatku w postaci gospodarstwa. Wuj William Ayscough — brat matki — był pastorem w Grantham, co wymagało wykształcenia. Zdobył je w Trinity College w Cambridge. Ojczym był również pastorem i odbył studia w Oksfordzie. Młodego Newtona umieszczono w domu aptekarza Clarka — przyjaciela wuja. W jego bibliotece płynęły szkolne lata Newtona. Sporo książek zostawił Newtonowi ojczym, który zmarł kiedy Newton miał lat piętnaście.

Otwarciu na świat sprzyjały również czasy, na które przypadło dzieciństwo Newtona. Rok jego urodzenia zbiega się z początkiem rewolucji Cromwella. Jest jeszcze w szkole w Woolsthorpe, kiedy ścięty zostaje Karol I, a w ostatnim roku jego pobytu w Grantham Stuartowie wracają na tron. Nie trzeba się było ruszać z Woolsthorpe i Grantham, żeby być świadkiem tych wydarzeń.

Zainteresowania Izaaka wychodziły poza wymagania szkoły. Interesowały go zagadnienia przyrodnicze, a że miał talent rysunkowy, jego notatnik zapełniony był rysunkami roślin i zwierząt. Pracownia chemiczna doktora Clarka była jeszcze jednym miejscem, gdzie chętnie przebywał. Sporządzał dla swoich rówieśników zabawki mechaniczne, ale potrafił także zbudować zegar słoneczny.

Dostatecznie wiele matematyki mógł nauczyć się w szkole. Ale czytał wiele książek ponadto. Wiedział o Koperniku, Keplerze i Galileuszu. Jakaś anegdota mówi, że trygonometrii nauczył się z książki kupionej na targu. Z dwiema książkami jakoby nigdy się nie rozstawał, z *Metamorfozami* Owidiusza i z Biblią. Czy to dlatego, że wspólną częścią obu ksiąg była kosmologia, czy dlatego, że teologia była jeszcze jedną jego pasją?

Biblię i Owidiusza wziął ze sobą, kiedy jako piętnastoleni chłopiec opuszczał Grantham — wydawało się na stałe — aby wraz z matką, która owdowiała po raz drugi i wróciła do Woolsthorpe, zająć się gospodarstwem. Żałował porzuconej szkoły, ale znał swoje obowiązki wobec rodziny. Pobliskie Grantham i dom aptekarza, skąd przynosił książki, odwiedzał często. Z książkami widywano go na polu, gdzie doglądał owiec.

Po roku wuj William zadecydował o jego losie. Nie mógł pogodzić się z tym, żeby jego zdolny siostrzeniec poprzestał na dotychczasowym wykształceniu i zabrał go spowrotem do Grantham. Po dwu latach Newton skończył szkołę. Dla nikogo z rodziny ani dla jego nauczyciela w Grantham nie było wątpliwości, że miejscem ich Izaaka jest Cambridge. Jest rok 1661.

Okres szkolny Newtona jest tematem dociekań jego biografów. Wypowiadają się psychologowie, ale kilka tu przytoczonych faktów nie upoważnia do formułowania sądów, poza tym jednym, że chociaż skończył szkołę jako najlepszy uczeń, nigdy nie był cudownym dzieckiem. Socjologowi te fakty dają więcej do myślenia. Młody Newton poszedł do Cambridge za radą małomiasteczkowego nauczyciela, staraniem i za zrozumieniem jego wiejskiej rodziny. Były to wieś i miasteczko poelżbietańskiej i poszekspirowskiej Anglii, miasteczko ludzi wykształconych, gdzie na jarmarku można było kupić książkę.[2])

---

[2]) Dane biograficzne o Newtonie zaczerpnięte są w przeważającej części z książek: Władimira Karcewa, *Njuton*, Moskwa 1987 oraz Tadeusza Twarogowskiego, *Droga do Cambridge*, Warszawa, Nasza Księgarnia, wyd. II, 1966.

* * *

Uniwersytet w Cambridge — założony jeszcze w XIII wieku przez dysydentów z Oksfordu — nie jest darzony sympatią biografów czasów studenckich Newtona. Zdaje się, że Cambridge — chociażby ze względu na wojny — przechodziło wtedy jakiś kryzys. Ale wypomina się uniwersytetowi konserwatyzm, a między innymi to, że studiowano tam Arystotelesa.

Rzeczywiście, pierwszym zachwytem Newtona w Cambridge był Arystoteles. Zapewne, zaimponował mu ogrom arystotelesowskiego systemu fizyki, ale to, co go przede wszystkim musiało w nim urzec, to dyscyplina myślenia, ciągły dyskurs z własnymi myślami. Arystoteles jest kluczem do Newtona. Także Euklides, którego — jak powiedział ktoś z jemu współczesnych — nosił w sobie.[3]) Geometrię Kartezjusza odrzucał.

Początki w Cambridge były trudne dla Newtona. Był jednym z biedniejszych studentów, co miało odbicie w jego formalnym statusie w bursie Trinity College, gdzie go umieszczono. Przez pierwsze dwa lata studiuje geometrię, trygonometrię, arytmetykę, teologię, łacinę i języki starożytne, grekę i hebrajski. Zapewne, tak czy inaczej, jego zdolności byłyby zauważone, ale to że tak się stało za sprawą doktora Izaaka Barrowa, nadało studiom Newtona określony kierunek.

W roku 1663 Henry Lucas — poza tym nieznany — funduje w Trinity College katedrę matematyki. Obejmuje ją Izaak Barrow — matematyk i teolog — który ze względu na swe rojalistyczne sympatie musiał przedtem na jakiś czas opuścić Anglię. Newton znał już Barrowa z jego rozprawy o stycznych. Teraz zaczyna chodzić na jego wykłady.

* * *

Specyfiką Barrowa było podejście kinematyczne do zadań geometrii. Styczna do krzywej jest stanem granicznym położeń cięciw przechodzących przez rozważany punkt krzywej. Sama krzywa jest też rozumiana kinematycznie. Nachylenie stycznej odpowiada tempu wzrostu krzywej w punkcie styczności. Te pojęcia były jeszcze in statu nascendi w ówczesnej matematyce. Posługiwano się nimi intuicyjnie i do oficjalnego kanonu matematyki nie należały. Te intuicje były wszakże dość dobrze opanowane. Posługiwali się nimi Cavalieri i Torricelli, a John Neper na pojęciu tempa wzrostu oparł rozumienie logarytmu. Sama idea wiedzie daleko w głąb stuleci.

Arystoteles — w wyniku rozważań aporii Zenona — wykluczył zmienność z rozważań matematycznych. Stosująca się do tego zakazu geometria Euklidesa jest statyczna. Prosta nie jest śladem biegnącego po niej punktu, podobnie jak okrąg.

Ale poza matematyką, Arystoteles jest twórcą teorii wzrostu i zaniku, poświęcając temu w całości jedno z dzieł. To zainteresowanie odżywa u scholas-

---

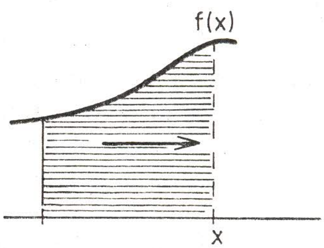
[3]) Według książki S. I. Wawiłowa, *Izaak Newton*, (1643–1727), tłum. z ros. Jan Guranowski, Warszawa, Czytelnik 1952. Dane z biografii naukowej Newtona korygowane są według tej książki. Data 1643 pochodzi stąd, że według kalendarza gregoriańskiego, który wszedł w użycie w Anglii już po urodzeniu Newtona, data urodzin Newtona wypadła na 4 stycznia 1643 roku.

tyków europejskiego średniowiecza, prowadząc do powstania w XIV wieku imponującej teorii. Była dziełem uczonych z Oksfordu i — na inny sposób — Mikołaja Oresme z uniwersytetu w Paryżu. Rozważa się intensywność zmiany. Formułuje się twierdzenie, według którego intensywność zmiany obserwowana w danym odcinku czasu wyznacza sumę zmiany w tym czasie. Uczeni z Oksfordu — nazywani Calculatorami — wyobrażali wielkość zmienną jako strumień — *fluentę;* intensywność zmiany nazywali *fluksją.* Oresme rozważał wykres natężenia, ilość zmiany traktując jako pole pod tym wykresem. Intuicje były oczywiste, intensywność pozostawała jednak pojęciem niezdefiniowanym[4]).

Nie wiemy, czy był bezpośredni związek zainteresowania się Barrowa zmiennością, a scholastykami z Oksfordu i Paryża. Wiadomo jedynie, że ich teoria — czy raczej doktryna — nie była zapomniana w ciągu tych kilku stuleci i była obecna w nauczaniu uniwersyteckim. Terminy *fluksja* i *fluenta* są obecne u Nepera i Cavalierego. Barrow pisze: „*The flux nature of all things here*"[5]).

To, co w czasach Barrowa wypowiadano używając pojęcia fluenty, niedługo potem zaczęto wypowiadać używając obecnego i w naszej matematyce pojęcia *funkcji.*

Barrow wykazał, że wartość funkcji w punkcie x można traktować jako tempo wzrostu w punkcie x strumienia pola pod wykresem tej funkcji (p. rys. 2). Dowiódł tego utożsamiając wartość funkcji z tangensem kąta nachylenia stycznej w punkcie x do wykresu funkcji wyobrażającej narastające pole. W istocie to ten dowód[6]) jest prawdziwą zasługą Barrowa. Zwraca się w nim uwagę na związek zadań dotyczących pola — tj. zadań na *kwadratury,* jak je nazywano w starożytności — z zadaniami dotyczącymi stycznych. Umożliwi ono przeniesienie intuicji z jednych zadań na drugie. Bo wiele oparte jest tu nadal na intuicji: intuicyjnie rozumie się pole, tangens nachylenia stycznej intuicyjnie rozumie się jako tempo wzrostu funkcji, chociaż już sam Barrow widzi — ale tego nie pisze — że chodzi o graniczną wartość ilorazu przyrostów.



Rys. 2. Wartość funkcji jako tempo wzrostu pola

Samo twierdzenie o tempie wzrostu pola było wypowiedziane już przez Oresme'a.

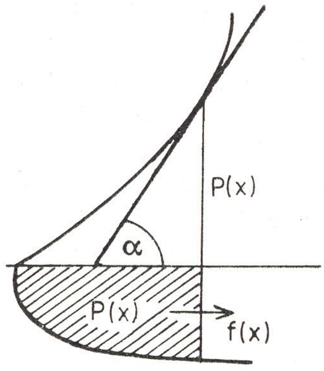
Oznaczmy przez P strumień pola pod wykresem funkcji f, a przez $P^{\cdot}$ *tempo wzrostu strumienia P.* Z twierdzenia Barrowa wynika, że

---

[4]) O Calculatorach w Merton College i Mikołaju Oresme i ich wpływie na odkrycie rachunku różniczkowego i całkowego, nazywanego w Anglii nadal „calculusem", p. książkę Carla B. Boyera, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego,* tłum. z ang. Stanisław Dobrzycki, Warszawa, PWN 1964.

[5]) Stare wydanie *Webster Dictionary;* hasło „flux".

[6]) Dowód można znaleźć w książce A. P. Juszkiewicza, *Historia matematyki,* tłum. z ros. Stanisław Dobrzycki, Warszawa, PWN, 1976, tom II, str. 223—224. Dowód wymaga założenia, że funkcja nie maleje, tj. że funkcja wyrażająca pole jest wypukła,wykres leży po jednej stronie stycznej.



Rys. 3. Dowód Barrowa

$$P^{\cdot}(x) = f(x)$$

dla każdej wartości x odciętej. Znakowanie jest zbliżone do znakowania Newtona, który używał kropki — nieco inaczej ustawionej — w znaku na tempo wzrostu, które nazywał fluksją.

W swoich *Wykładach z geometrii* Barrow zamieszcza uwagę, którą przypisuje Newtonowi, a z której mogłoby wynikać, że to Newton mógł wpaść — jeszcze w czasie słuchania jego wykładów — na rozumienie fluksji jako stanu granicznego ilorazu przyrostów[7]).

* * *

W roku 1665 Newton uzyskał stopień bakałarza. Był to rok, w którym do Cambridge dotarła epidemia dżumy, groźna jeszcze przez następne dwa lata. Większość tego czasu Newton spędza w Woolsthorpe, gdzie jest bezpieczniej. Z tego właśnie czasu — jak będzie później twierdził — pochodzi jego teoria fluksji i zamysł jego mechaniki.

Drugie prawo dynamiki — podstawa mechaniki Newtona — ma w napisanych w dwadzieścia lat później *Principiach* brzmienie: *Zmiana ilości ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły* (jeśli ograniczyć to prawo do ruchu wzdłuż prostej).

W tej skrótowej wypowiedzi, „zmiana" znaczy „tempo zmiany". Jeśli przez $g(t)$ oznaczymy siłę działającą na ciało w chwili t, a przez $J(t)$ *ilość ruchu* nagromadzoną w ciele do chwili t, to prawo wyrazi się wzorem

(1) $$J^{\cdot}(t) = g(t),$$

przy zastosowaniu przyjętej przedtem umowy.

Twierdzenie Barrowa pozwala spojrzeć na rzecz z innej strony. Traktujmy czas jako odciętą i rozważmy pole P pod wykresem funkcji g. Mamy wtedy

(2) $$P^{\cdot}(t) = g(t)$$

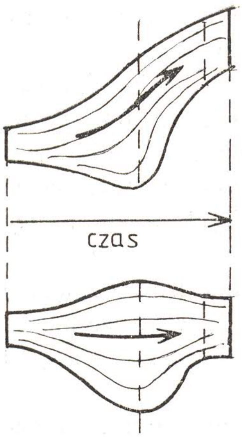
w każdej chwili t.

Mając wzory (1) i (2), Newton decyduje się na rzecz zasadniczą. Fluenty J i P mają te same fluksje. Newton przyjmuje postulat: fluenty mające dla każdej wartości odciętej te same fluksje są równe, jeśli są równe na początku.

Postulat ten nie jest niczym nowym, jeśli przypomnieć twierdzenie Calculatorów sprzed trzystu lat. Jednak twierdzenie Calculatorów nigdy nie było naprawdę twierdzeniem, jego dowody były oparte na intuicjach nie bardziej oczywistych niż ono samo. Próbował je bezskutecznie dowodzić Cavalieri. Korzystał zeń poprzez sformułowaną przez siebie zasadę (p. rys. 4), której nie uważał

---

[7]) Por. Boyer, loco cit., str. 260—261.

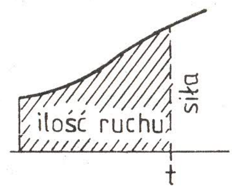


Rys. 4. Zasada Cavalieriego: pola obu strumieni są równe, jeśli ich szerokości w każdej chwili są równe

za matematyczną. Newton przecina te nieporozumienia i wahania.

Przyjęty postulat pozwala patrzeć na ilość ruchu jako na fluentę reprezentującą pole pod wykresem siły.

Przez *ilość ruchu* Newton rozumie wielkość proporcjonalną do masy ciała i prędkości. Stąd, jeśli ruch jest prostoliniowy i masa ciała w ciągu ruchu się nie zmienia, to pole pod wykresem siły można traktować jako prędkość narastającą w czasie.



Rys. 5. Nagromadzanie się ilości ruchu na skutek działania siły

Widziana w ten sposób prędkość jest całką. My przywykliśmy do widzenia jej jako pochodnej. W tym sposobie patrzenia na prędkość i — ogólniej — na ilość ruchu Newton miał prekursorów.

* * *

Trzysta lat przedtem Jean Buridan z uniwersytetu w Paryżu głosił, że siła działająca na ciało, wtłaczana weń w ciągu ruchu, sumuje się do wielkości objawiającej się jako impet.

Przy spadku swobodnym, kiedy działa tylko ciężar, wtłaczana siła jest w każdej chwili ta sama i impet narasta, co uwidacznia się w tym, że ciało spadające przyspiesza[8]). U samego Buridana brak dopowiedzenia, że impet narasta jednostajnie, ale wniosek się narzuca, chociaż był wypowiedziany explicite dużo później przez Domingo de Soto — jednego z szesnastowiecznych kontynuatorów teorii Buridana.

A oto komentarz na temat spadku swobodnego z *Principiów* Newtona[9]): *Przy spadku ciała, siła w równych sobie odcinkach czasu działając jednakowo dostarcza ciału równe ilości siły wywołując jednakowe wzrosty prędkości.*

Trudno negować współbrzmienie teorii Newtona i Buridana: w obu prędkość jest wynikiem sumowania się siły działającej w czasie ruchu. Nie wydaje się właściwym dopatrywanie się jakiejś różnicy między newtonowską ilością ruchu a impetem, chociaż Buridan dopuszcza wiele

Rys. 6. Prawo swobodnego spadku: stała siła powoduje jednostajny wzrost ilości ruchu — impetu

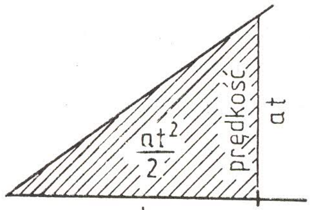
[8]) Pełny tekst Buridana, p. Michael Clagett, *The theory of mechanics in the Middle Ages*, The University of Winsconsin Press, 1962 str. 523.

[9]) *Principia*, wyd. III, 1726; str. 50 wyd. ros. w tłumaczeniu A. N. Kryłowa, Moskwa, Nauka, 1989.

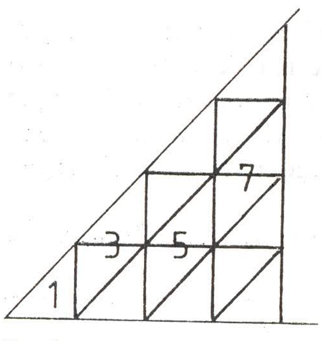
interpretacji, mówiąc np. o impecie sfer nieba. W przypadku ruchu prostoliniowego interpretacja jest jednoznaczna, ta sama co u Newtona.

W widzeniu impetu miał Buridan wartą odnotowania podwójność. Impet można traktować jako siłę sumaryczną nagromadzoną w ciele. Ta sumaryczna siła zmienia się w czasie jak prędkość i jesteśmy w systemie mechaniki Arystotelesa. Buridan lokował w ten sposób swoją teorię w systemie Arystotelesa, co mógłby zrobić i Newton. Siła sumaryczna jest wszakże mniej dostępna intuicji i niedostępna dla obserwacji.

Na prędkość można patrzeć również jako na pochodną drogi względem czasu, tj. na fluksję przypisaną fluencie, którą jest narastająca w czasie droga. Zgodnie z twierdzeniem Barrowa, można tę drogę rozumieć jako pole pod wykresem prędkości jako funkcji czasu.



Rys. 7. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym: $= at^2/2$



Rys. 8. Drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym według Oresme'a

Jeśli prędkość wzrasta jednostajnie, to pole jest łatwo policzyć: jest proporcjonalne do kwadratu czasu, jeśli prędkość początkowa była zerem. Tego szczególnego przypadku ogólnej prawidłowości Newton nie lekceważy, odnotowuje w komentarzu i wielokrotnie wykorzystuje w *Principiach*.

W połowie XIV wieku Mikołaj Oresme traktując prędkość jako tempo narastania drogi i interpretując tę drogę — zgodnie z doktryną Calculatorów i swoją własną — jako pole pod wykresem prędkości, wnosił, że w ruchu jednostajnie przyśpieszonym zaczynającym się prędkością zerową, drogi przebiegane w kolejnych początkowych równych odcinkach czasu mają się do siebie jak liczby 1 : 3 : 5 : 7 : ... Jeśli się będzie sumować kolejno te liczby, dostanie się 1, 4, 9, 16, ... — kolejne kwadraty. Tej ostatniej uwagi jednak Oresme nie zrobił.

Newton pisząc o drogach wzrastających z kwadratem czasu wspomina Galileusza jako odkrywcę tego prawa.

* * *

Na zasady mechaniki Newtona można więc patrzeć jak na syntezę tego, czego dokonali przed nim Calculatorowie z Oksfordu, Oresme, Buridan i ich następcy. Uporządkował ich pojęcia, określił intensywność zmiany — *fluksję* — jako stan graniczny i przy takim jej rozumieniu adaptował twierdzenie Barrowa dla swoich celów. Twierdzenie Calculatorów przekształcił w postulat, rezygnując z niejasnych prób dowodu.

Na swoje dzieło patrzył jako na kontynuację *Elementów*, które dla Euklidesa były teorią przestrzeni fizycznej. Teorię tę on teraz wzbogacił o czas, (który był z systemu geometrii Euklidesa wykluczony), przyjmując odpowiednie aksjomaty co do praw ruchu. Jego system mechaniki jest organicznie związany z teorią fluksji.

Synteza dokonana przez Newtona, mimo że złożona z rzeczy jakby znanych, jest teorią imponującą. Być może, należało przebywać w Anglii i to na jej prowincji, aby z przypadkowych lektur i zasłyszeń złożyć w logiczną całość zabłąkane pod strzechy doktryny scholastyków sprzed trzech stuleci, lekceważone już wtedy przez naukę oficjalną. W *Principiach* Newton miejscami mówi językiem twórców teorii impetu, o czym świadczą całe zdania, ale tam, gdzie wydawałoby się, że powinien się na nich powołać, powołuje się na Galileusza.

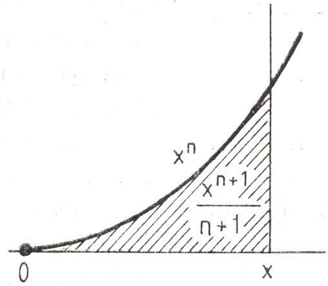
* * *

Teorię fluksji zbudował Newton przy okazji mechaniki. Mechanika była jednakże motywacją, a nie koniecznością matematyczną. Później Leibniz odkryje tę teorię na drodze czysto formalnej, arytmetycznej.

Dla Newtona arytmetyczny aspekt teorii fluksji zaczyna się od niewielkiego szczegółu.

Oblicza fluksję — pochodną funkcji zmieniającej się według wzoru x^n. Przyrostowi h zmiennej x odpowiada przyrost $(x+h)^n - x^n$ funkcji. Ten ostatni przyrost jest równy $nx^{n-1}h+$ wyrazy z wyższymi potęgami przyrostu h. Po podzieleniu przez h, dostaje wyrażenie $nx^{n-1}+$ wyrazy z potęgami przyrostu h. Jeśli h zanika, te dodatkowe wyrazy zanikają, stąd wyrażenie nx^{n-1} jest pochodną funkcji x^n.

Na tej zasadzie, pochodną funkcji $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ jest x^n. Ale według twierdzenia Barrowa, pole pod wykresem funkcji x^n ma tę samą pochodną. Na mocy postulatu Calculatorów, Newton wnioskuje, że pole pod wykresem funkcji x^n zmienia się według wzoru $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, jeśli je liczyć od $x = 0$.



Rys. 9. Pole pod wykresem funkcji x^n

Obliczenie to nie było na miarę Newtona, ale wydaje się, że nikt nie obliczał przedtem fluksji z x^n.

Pole pod x^n umiano jednak liczyć i bez tego. Umiał to robić John Wallis, a Mercator (1668) umiał wynik wykorzystać. Scałkował wyraz po wyrazie szereg geometryczny $1+x+x^2+\ldots$, otrzymując rozwinięcie $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$ funkcji $\log(1-x)$. Przeszło pół wieku przedtem John Neper określał logarytm jako funkcję mającą tempo wzrostu $\frac{1}{1-x}$. Mercator musiał więc stosować twierdzenie Calculatorów o odtwarzaniu fluenty z jej fluksji, a musiał znać je Neper.

Newton w tym czasie wiedział już więcej. Umiał przedstawić w postaci szeregu potęgowego dowolną potęgę $(1-x)^{\alpha}$. (Przypadek Mercatora, to $\alpha = -1$). Dawało mu to możliwość całkowania, tj. obliczania pól pod wykresami wszystkich, praktycznie biorąc, wówczas znanych funkcji.

* * *

Przez jakiś czas jedynie Barrow wiedział o tych pracach Newtona. Kiedy zauważył opublikowaną rozprawę Mercatora, zaniepokoił się o priorytet. Nalegania Barrowa sprawiły, że Newton przesłał rękopis pracy zatytułowanej *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* sekretarzowi Królewskiego Towarzystwa Naukowego. Jest rok 1669.

Rok przedtem Newton uzyskał stopień magistra. Barrow dostaje propozycję objęcia stanowiska kapelana królewskiego i poleca Newtona jako swego następcę na katedrze Lucasa. Przychodzą teraz dla Newtona lata może najtrudniejsze.

Nastał okres opracowania odkryć, a to przychodziło Newtonowi z pewnym trudem. Ogłasza swoje wyniki z wielkim opóźnieniem, poprzestając przeważnie na przedkładaniu Towarzystwu Królewskiemu rękopisów dokumentujących prace. Spowoduje to później liczne spory o priorytet.

Jak później będzie wielokrotnie stwierdzał, wszystkie swoje odkrycia przemyślał przebywając w Woolsthorpe w okresie epidemii dżumy.

To wtedy miało spaść jabłko naprowadzające go na myśl o powszechności grawitacji. Newton — już jako stary człowiek — temu nie zaprzeczał, ale też nie dodawał nic od siebie. Prawdą psychologiczną jest to, że całość odkrycia dostrzegana jest na raz i w jednej chwili. Ta chwila może się zbiec z uderzeniem o ziemię jabłka, i to właśnie zostaje w pamięci.

Hipoteza o przyciąganiu się wzajemnym mas siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości nie była w czasach Newtona nową. Można się było na nią naprowadzić na drodze spekulacji geometrycznej, jeśli się przyjęło za Keplerem[10]), że grawitacja rozprzestrzenia się jak promieniowanie i w odległości r od masy przyciągającej ta sama ilość tego promieniowania pada na powierzchnię kuli, której pole wzrasta proporcjonalnie do r^2.

Wydaje się, że Newton już w latach wspomnianego pobytu w Woolsthorpe miał dla tej hipotezy poważniejszą argumentację. Zakładając, że ruch planety odbywa się pod wpływem przyciągania jej przez Słońce spoczywające w ognisku jej orbity eliptycznej, wyprowadził z prawa Keplera o zachowaniu pól wniosek, że w czasie ruchu planety ta siła zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu jej odległości od Słońca. Współcześni mu uczeni z Towarzystwa Królewskiego mieli też już na to swoje argumenty.

Robert Hooke doszedł do tego przekonania po dwudziestoletnich rozmyślaniach nad ruchem planet, tym tylko różniących się od rozważań Newtona, że nie było w nich matematyki. Swoją hipotezę zakomunikował Newtonowi. Edmund Halley — astronom, odkrywca komety — argumentował odwrotną pro-

---

[10]) Kepler przyjmując ten pogląd brał pod uwagę rozchodzenie się grawitacji jedynie w płaszczyźnie ekliptyki, otrzymując wzór z $1/r$.

porcjonalność do kwadratu odległości trzecim prawem Keplera. Jeszcze inne argumen ~~interpre~~tacje przedstawiał Christopher Wren — budowniczy katedry Świętego Pawła[11]).

Siergiej Wawiłow w swojej książce o Newtonie pisze[12]): *W czasie spotkania z Hookiem i Halleyem w jednej z londyńskich kawiarni, Wren zaproponował niewielką nagrodę temu, kto dowiedzie, że ruch pod wpływem siły malejącej odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości odbywa się po torze eliptycznym. Działo się to w roku 1683. Forma prawa była dla tych uczonych przesądzona, chodziło im o wnioski. Wszyscy trzej byli przekonani w pełni, że innej odpowiedzi na ich pytanie być nie może. Trudność sprowadzała się do matematyki. Żaden z nich nie widział sposobu rozwiązania zadania. Pozostawało jedno: zwrócić się do wszystkowiedzącego Newtona.*

m

Newton był już wtedy dobrze znany~~m~~ uczonym z Londynu. Był członkiem Towarzystwa Królewskiego. Miał za sobą słynne odkrycia w teorii rozchodzenia się światła.

Halley zwrócił się do Newtona z zadaniem w sierpniu 1684 roku i w listopadzie tego roku dostał rękopis Newtona z rozwiązaniem.

Jeszcze przedtem Newton postanowił wydać całość swojej mechaniki. Zachęcony przez Halleya, przyśpieszył pracę. W roku 1686 rękopis *Zasad matematycznych fizyki* — *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* — został złożony w Królewskim Towarzystwie Naukowym.

* * *

Principia nie są dziełem jednolitym, ale ta niejednolitość jest wynikiem świadomego skontrastowania poszczególnych ich części. Składają się z trzech Ksiąg, z tym, że jeszcze w osobnym wstępie wyłożone zostają *Prawa ruchu — Axiomata sive leges motus* — z najbardziej wszystkim znanymi zasadami dynamiki[13]), poprzedzone rozdziałem objaśniającym pojęcia czasu, przestrzeni, masy, siły i ilości ruchu. Wyłożone są w duchu Euklidesa — postulatywnie. Niemal zupełny — poza niektórymi miejscami w komentarzach — jest brak wzorów. Wydaje się, że rzecz mogłaby wyjść spod pióra uczonego z tego samego Cambridge, ale żyjącego tam przed dwoma-trzema stuleciami.

Księga I zawiera teorię ruchu planet i w niej zawiera się ciężar *Principiów*. Po Księdze II dotyczącej ruchów specjalnych, m.in. z uwzględnieniem oporu środowiska, następuje Księga III, stanowiąca z jednej strony epilog *Principiów* ze słynnym *hypotheses non fingo*[14]), a w zasadniczej części będąca konfrontacją Newtona-fizyka z Newtonem-matematykiem. Twierdzenia natury matematycznej

---

[11]) Christopher Wren (1632—1723) — znany także z obliczenia długości łuku cykloidy. Edmund Halley (1656—1742) — odkrywca komety; przewidział rok jej powrotu: 1758. Robert Hooke (1635—1703) — fizyk.

[12]) Wawiłow, loco cit., rozdział IX.

[13]) Nie da się tam znaleźć II prawa w formie „$mp = F$". Tego rodzaju formuły są Newtonowi obce, a pojęcie przyspieszenia nie pojawia się w *Principiach*.

[14]) Ta „skrzydlata fraza" bywa rozumiana niewłaściwie. Jest ona — ostatnia stronica *Principiów* — częścią zdania: ... *przyczyny ... ciążenia nie potrafiłem jak dotąd wyprowadzić ze zjawisk,*

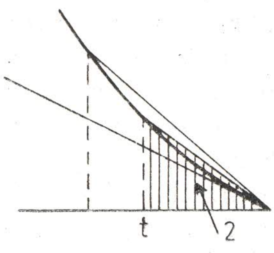
z Księgi I poddane są tu weryfikacji w warunkach odbiegających od idealnych.

Był jeszcze jeden autor, który potrafił na tę skalę prowadzić dyskurs przeciwko własnym tezom: Arystoteles. Język Newtona z pozamatematycznych partii *Principiów* jest językiem Arystotelesa. Podobnie jak Arystoteles, nie stawiał matematyki nad fizyką.

Bez teorii fluksji nie byłoby *Principiów* — jest obecna w każdym niemal rozumowaniu Ksiąg I i II. Ale niewprawny czytelnik z trudem to zauważa. Wykładowi teorii fluksji poświęcony jest pierwszy niewielki rozdział Księgi I, a w jednym z rozdziałów Księgi II zamieszczony jest lemat o *momencie iloczynu*.

Tu dygresja. „Moment" jest jedną z postaci w jakiej objawia się fluksja. We wspomnianym rozdziale Newton jakby zapomina o swoim wykładzie teorii fluksji z Księgi I, gdzie fluksja jest granicą ilorazu przyrostów, i zaczyna posługiwać się pojęciem *momentu*, które jest odpowiednikiem nieskończenie małej. George Berkeley[15]) potem sobie użyje na tym dość osobliwym fragmencie tekstu *Principiów*.

Nie rzucający się w oczy i mało formalny udział teorii fluksji w tekście *Principiów* wytłumaczyć można stosunkowo prosto. Newton w sposób pewny, przemyślany do końca, posługuje się prawidłami przejść granicznych. Wie, jakie są dopuszczalne uproszczenia przy posługiwaniu się zanikającymi przyrostami wielkości zmiennych. Dlatego nie uważa za konieczne zdawanie się na formalizm teorii fluksji, na którego formę się nie całkiem zdecydował. Wypracował za to pewne skróty myślowe, którymi sprowadza rozumowania do czystych rozumowań geometrycznych.



Rys. 10. Rysunek z rozdziału I, Księgi I *Principiów*

Lista tych skrótów myślowych — w postaci jedenastu lematów i wniosków z tych lematów — jest dana we wspomnianym rozdziale Księgi I. Lemat X, będący spoiwem między geometrią i mechaniką, ma brzmienie: *Drogi przebyte przez ciało ... są na samym początku ruchu proporcjonalne do kwadratu czasu*. Dla dowodu, Newton robi wykres prędkości w zależności od czasu taki jak u Oresme'a interpretując pole pod tym wykresem jako przebytą w ciągu ruchu (do rozważanej chwili) drogę. Pole pod odpowiednią cięciwą jest — przy tej interpretacji

---

a hipotez nie tworzę. Widać stąd, że w tym zdaniu słowo „hipoteza" nie znaczy nic innego niż nieuzasadniony wniosek. Nieporozumienia biorą się stąd, że słowo „hipoteza" znaczy w języku ogólnie używanym coś innego, a mianowicie założenie lub przypuszczenie (do potwierdzenia, lub — częściej — do obalenia).

[15]) George Berkeley (1685—1753), filozof i biskup. W 140-stronicowej broszurze *The Analyst, by Bishop Berkeley. A discourse addressed to an infidel mathematician* (1734) krytykował nieścisłości matematyki newtonowskiej. Proponował zastanowić się czy aby *metody matematyków naszych czasów nie mają tego samego stopnia ścisłości co rozważania nad prawdami i tajemnicami wiary*. Wolnomyślnym matematykiem, do którego skierowana była ta krytyka, był, jak ogólnie przypuszczano, Edmund Halley. Fragment broszury Berkeleya znaleźć można w I tomie zbioru *The World of Mathematics* wydanego przez J. R. Newmana, New York, 1956, str. 288—293.

proporcjonalne do kwadratu czasu. Granicznie, oba pola są równe, co uzasadnia Newton wcześniejszymi lematami. Doktryna Oresme'a i Calculatorów musiała być według Newtona oczywistością dla spodziewanych czytelników, skoro nie widzi potrzeby jej skomentowania.

Bo komentarzy co do rozumienia granicy ilorazu wielkości zanikających nie szczędzi. To widocznie uważa za nowość. Wie, że u czytelnika może powstać trudność wynikająca stąd, że *żaden iloraz wielkości, które jeszcze nie zanikły, nie jest granicą, a kiedy już zanikną, nie ma ilorazu.* Tłumaczy jak pogodzić się z tą trudnością. Pisze, że można zamiast granicami posłużyć się metodą niepodzielnych, ale określa ją jako „durior" — mniej subtelną. Nie uważa wszakże tej metody za niedopuszczalną. Ta tolerancja wynika stąd, że — co Newton wie — stosowalność teorii fluksji, w tej czy innej wersji, zależy od przyjętego pozamatematycznie za postulat stwierdzenia, że z fluksji można odtworzyć fluentę. Ta pożyczka pozamatematyczna dręczyła Cavalieriego. Newton przyjął ją bez wahań. Dlaczego?

Newton bowiem aksjomatyzował nie samą geometrię, ale geometrię wzbogaconą o mechanikę. A w mechanice — tak, jak ją widział — *wszystko jest fluksją.* Nie obserwujemy przeważnie ilości zmiany, lecz jej natężenie, z natężenia prądu w strumieniu wnosimy o ilości płynącej tym strumieniem wody, z tempa wzrostu populacji oceniamy nieznany nam jej przyrost. Newton kodyfikował to postępowanie. Wahania musiały ustąpić, jeśli się widziało przed sobą wnioski z postulatu. Prawo grawitacji dawało wzór na siłę.

Siła była fluksją ilości ruchu, skąd można było ilość ruchu odtworzyć, a potem z ilości ruchu, postępując jeszcze raz według tej samej reguły, odtworzyć zależność drogi od czasu, tj. opis ruchu. Zadania mechaniki polegają na odtwarzaniu fluent ze znanych wcześniej fluksji.

Zdanie o mniej więcej tej treści Newton zaszyfrował i zostawił sekretarzowi Towarzystwa Królewskiego. Było to wtedy, kiedy Leibniz odkrył swój rachunek nieskończenie małych, równoważny teorii fluksji. Spór Newtona z Leibnizem o priorytet można uważać za nieważny od samego początku. Tak zdaje się jeszcze w okresie pierwszych dwu wydań *Principiów* myślał i Newton, o czym świadczy następujący fragment figurujący jeszcze w tych wydaniach: *Ten znakomity uczony odpowiedział mi, że on też wpadł na tę metodę, a kiedy mi ją przedstawił, okazała się niewiele różniącą się od mojej, chyba że w terminach i sposobie pisania wzorów.* Newton był w jakiś sposób świadomy, że *analiza* — jak później nazywano teorię — już w jakiś sposób dotąd istniała i zaksjomatyzowanie jej przez kogoś innego musiał uważać za możliwe. Aksjomatyka Leibniza miała motywacje w zadaniach o stycznych i szybciej prowadziła do formalizacji w postaci rachunku z użyciem symboliki $\frac{dy}{dx}$ i $\int$ do dziś stosowanej.

* * *

Są elementy pozamatematyczne sporu z Leibnizem.

Ale element matematyczny sporu też się pojawia i jest aktualny do dziś. Ujęcia Newtona i Leibniza, mimo że logicznie równoważne, są odbierane przez matemtyków inaczej, zgodnie z różnicą ich sposobu myślenia, który w matematyce może być geometryczny lub algebraiczny.

Sposób myślenia Newtona jest geometryczny. Rozumowania, kontrolowane wyobraźnią, nie są zdane na ślepą zależność od wzorów. Twierdzenia *Principiów* wypowiadane są bez użycia symboli matematycznych. Te pojawiają się dopiero w dowodach. Newton jest w tym podobny do Euklidesa. To podobieństwo uwidacznia się także w strukturze dzieła. Zanim przejdzie do części szczegółowej, ustala znaczenie pojęć. Ustala je z dokładnością na jaką pozwala przedmiot. Określenie *masy* jako *ilości mierzonej proporcjonalnie do jej objętości i gęstości* ma ten sam stopień dokładności, co określenie *linii* jako *długości bez szerokości* u Euklidesa. Te określenia mają dla Newtona wagę wyjaśnień, a dodatkowe komentarze osaczają pojęcie, co umożliwia późniejszą dokładność rozumowań. Była to dokładność wypracowywana nie dla samej dokładności, lecz po to by rozumieć siebie samego, co jest kontrolą pewniejszą niż formalizm.

* * *

Spojrzenie na matematykę Newtona będzie niepełne, jeśli się nie wspomni jego *Arithmetica Universalis* — dzieła wydanego dopiero w roku 1707, ale gotowego już w czasie poprzedzającym *Principia*. Jedni będą mieć na uwadze kilkadziesiąt tam zamieszczonych zadań o treści nieraz anegdotycznej, z których najpopularniejsze mówi o wołach zjadających wciąż odrastającą trawę[16]), a inni będą pamiętać podany tam algorytm na obliczanie pierwiastka kwadratowego z liczby danej w zapisie dziesiętnym. Arytmetyka Newtona mogłaby współcześnie z powodzeniem służyć jako podręcznik. Ale jest w *Arithmetica Universalis* rzecz o znaczeniu zasadniczym.

Newton wprowadza w użycie liczbę rozumianą jako proporcję dwu wielkości tego samego rodzaju. Przyjmując w danym rodzaju wielkości jedną uznaną za jednostkową, otrzymuje — niezależnie teraz od rodzaju wielkości — uniwersalną, oderwaną od mian, skalę liczb. Droga i czas mierzone są tą samą skalą liczb uniwersalnych. Można pomyśleć teraz dzielenie wielkości wyrażającej drogę przez wielkość wyrażającą czas, pozostając nadal w obrębie liczb uniwersalnych-niemianowanych. Z punktu widzenia fizyki takie dzielenie jest absurdalne. Ale temu właśnie zawdzięczamy w końcu możliwość rozumienia pochodnej jako stanu granicznego tego rodzaju ilorazów.

Newtonowskie pojęcie liczby nie jest niczym nowym. Teorię proporcji opracował (za Eudoksosem) Euklides. Starożytni nie postawili jednak „kropki nad i". Postępowanie Newtona jest równoznaczne z postulowaniem istnienia skali uniwersalnej liczb niemianowanych.

My teraz te liczby inaczej nazywamy i wiemy, że w drugiej połowie XIX wieku Dedekind, Cantor i inni spłacili dług Newtona i w obrębie systemu pojęć mnogościowych zbudowali postulowane przez Newtona — ale dodajmy, że

[16]) Zadanie „O wołach Newtona" przytacza Szczepan Jeleński w *Lîlavatî*. Jest tłumaczenie rosyjskie arytmetyki Newtona dokonane przez Juszkiewicza, *Wsieobszczaja arifmietika*, Moskwa, 1948.

i przez starożytnych — uniwersum liczb. Możliwy stał się dowód postul~~t~~u a Calculatorów: $f^{\cdot} = g^{\cdot} \Rightarrow f = g + \mathrm{const}$. Oddane zostało to „co pożyczył rozum od przyrody". Na przykładzie tego szczegółu widzimy jak zamyka się historia przeszło dwu tysiącleci. Newton nadaje przedostatni impuls temu zamknięciu, które po przez fizykę tworzy teorię mnogości.

* * *

Jeszcze przed przystąpieniem do pisania *Principiów* ma miejsce kilka zdarzeń zmieniających bieg życia Newtona. Umiera matka. Umiera Barrow. Newton zostaje samotny zarówno w kręgu rodzinnym jak i w środowisku uczonych. Płonie jego pracownia w Cambridge. Ma stany depresji. Bywa w Londynie, ale — mimo że po napisaniu *Optyki* jest już uznanym uczonym — niekoniecznie spotyka się z członkami Towarzystwa Królewskiego. Zabiega u króla o utrzymanie się w Trinity College. Są z tym kłopoty, bo nie jest duchownym; co więcej, jego poglądy religijne odbiegają od ortodoksji.

Principia przynoszą sławę. Ta sława jest wręcz nieprawdopodobna — w odzie na jego cześć, Halley nazywa go *ozdobą narodu*. Jeszcze raz pokazuje „lwi pazur" stając do konkursu na rozwiązanie zadania o brachistochronie [17]) i nie daje się zdystansować: Bernoulliemu (Jakubowi), Leibnizowi i de l'Hospitalowi. Ale gdzieś komuś powie, by mu nie przeszkadzano matematyką. Swój czas poświęca teraz chemii i chronologii biblijnej. Jest rok 1692, kiedy dosięga go nowy atak depresji. Musi być z nim naprawdę coś złego, skoro zaniepokojeni są Locke i Huyghens i w listach radzą się nad sposobem pomocy.

W roku 1688 Anglia przeżywa rewolucję, którą historycy nazywają „wspaniałą", bo nikt nie ginie. Napięcie wewnątrzspołeczne jednak nie maleje. Trzeba być zdeklarowanym religijnie. Oczywiście, człowiekowi o pozycji Newtona nic nie może grozić, ale trudno uwolnić się od niepokoju. W jakimś pamflecie wypomina mu się arianizm. Jest już wtedy osobą publiczną, będąc członkiem parlamentu. Jest anegdota, według której tylko raz się w parlamencie odezwał, prosząc o otwarcie okna. Jeśli to byłoby prawdą, to jak wytłumaczyć, że jest ceniony jako polityk, że decyduje się opuścić katedrę Lucasa, Trinity College i Cambridge, aby resztę życia spędzić w kręgach władzy w Londynie?

W roku 1696 Newton przenosi się do Londynu i obejmuje stanowisko strażnika mennicy królewskiej. Wielu uczonych obejmuje wtedy stanowiska rządowe i Newton nie jest wyjątkiem. W roku 1703 Newton zostaje prezesem Królewskiego Towarzystwa Naukowego. Nie są to synekury. Anglia przeżywa wtedy okres reform, w tym i reformę skarbu, a nauka patronuje przedsięwzięciom na skalę państwową.

Życie domowe Newtona także przestaje być puste. Rządy w jego domu obejmuje energiczna siostrzenica Katarzyna, żona arystokraty mającego duże wpływy w Londynie. Prowadzi teraz życie zamożnego londyńskiego mieszczanina. Poza domem, miejscem gdzie chętnie przebywa jest gmach Towarzystwa Królewskiego.

---

[17]) Rok 1696. Inicjatorem konkursu był Jan Bernoulli. Rozwiązaniem okazał się łuk cykloidy.

Spokoju wewnętrznego jednak całkowicie nie odzyskuje. Nawet w trzecim wydaniu *Principiów* nie oddaje sprawiedliwości Hooke'owi — chociaż ten już nie żyje — w jego zasłudze sformułowania prawa grawitacji. Zraża do siebie Fleamsteeda — astronoma — ważąc lekko jego zasługi w zebraniu materiału obserwacyjnego, które posłużyło do wydania dzieła *Historia Coelestis* — encyklopedii ówczesnej wiedzy astronomicznej. I wreszcie, nie zapobiega wstydliwemu dla siebie i środowiska brytyjskiego zakończeniu sporu z Leibnizem: komisja złożona z samych stronników Newtona oskarża Leibniza o plagiat.

Umiera w roku 1727. W Westminster Abbey ma nagrobek godny królów.

* * *

Dzieło Newtona jest jak mozaika. O każdą jego część wiodą spór inni odkrywcy: Hooke o grawitację, Leibniz o fluksje i całki, o prawa dynamiki mógłby się upomnieć Buridan, a o szeregi potęgowe Mercator. Obliczenie fluksji z x^n mógł zawdzięczać Barrowowi, a pojęcie liczby uniwersalnej było pomyślane już przeszło dwa tysiące lat przedtem. Ale Newton był tym, który elementy tej mozaiki zobaczył w pewnej chwili naraz.

Czy było koniecznością, by ktoś taki się pojawił? Odkrycia potoczyłyby się wolniej, ale suma odkryć byłaby ta sama.

Ten wywód byłby poprawny, jeśli chodziłoby jedynie o sumę odkryć, a nie o sposób ich widzenia i kształt, który może zaistnieć lub nie.

Śledziliśmy źródła odkryć Newtona. Są wśród nich dzieła Arystotelesa i Euklidesa, ale jest i Biblia oraz może wiersz pisany pokolenie wcześniej, ale czytany właśnie przez niego. Należy do nich sceneria miasteczka, w którym szanuje się szkołę i którego życiu nadają ton ludzie wykształceni, ale także czas wojny i rewolucji nadający życiu koloryt, pobudzający do zwrócenia się ku tematom zasadniczym. A poza tym jest też Anglia, kraj z którego nie trzeba wyjeżdżać, aby zdobyć wykształcenie, w którego stolicy trzej uczeni mogą spotkać się w kawiarni, by postanowić, co robić dalej z hipotezą o torach planet. Newton gdzieś kiedyś powiedział, że stał na ramionach olbrzymów. Kiedy się patrzy na bieg jego życia, nie wydaje się, by trzeba ich było szukać dalej niż na dwudniowej trasie dyliżansu z Grantham do Londynu z postojem w Cambridge.

To stwierdzenie jest jednak trudne do dowodu. Z łatwością śledzimy jak idee przechodzą z kraju do kraju, przekształcając się w tzw. prądy myślowe i mody. W jaki sposób czyny, odkrycia i dzieła wyrastają z rodzimego podłoża, właściwie nie wiemy, stwierdzamy jedynie fakty. Życie Newtona jest tak angielskie, że aż prowincjonalne i nie wyobrażamy sobie Newtona bez tego angielskiego prowincjonalnego podłoża. Ale dzieło Newtona jest tak wielkie, że gdybyśmy chcieli powiedzieć, że jest światowe, powiedzielibyśmy rzecz śmieszną.