Sto lat teorii continuów

Jerzy Mioduszewski

Zaproszony do wygłoszenia odczytu na Sesji poświęconej Profesorowi Januszowi Charatonikowi, wiem, że nie będzie w nim niczego, co nie mieściłoby się w "History of the Theory of Continua", artykule encyklopedycznym Janusza Charatonika, który nie zawaham się nazwać dziełem. Ramy czasowe i miejsce pozwalają wszakże na odstępstwo od systematycznych ujęć na rzecz pewnych impresji, które narzucają się przy omawianiu tej bardzo żywej matematyki, jaką stworzyły zjawiska wokół continuów. W tytule odczytu pojawia się umownie sto lat, bo mniej więcej tyle lat ma teoria, a raczej zbiór faktów i pytań, które nawarstwiają się w sposób wewnętrznie logiczny jedne na drugich.

Wspólne brzegi obszarów

Minie niedługo dokładnie sto lat kiedy (1910) pojawiła się praca L. E. J. Brouwera z jego słynnym przykładem wspólnego brzegu trzech obszarów wypełniających płaszczyznę. Kazuhiro Yoneyama (1917) nadał tej konstrukcji formę znaną jako Jeziora Wady. Przed Brouwerem był Artur Schoenflies (1908), który sądził, że brzeg obszaru płaskiego musi być sumą dwu continuów różnych od całości, będących w analogii do dwu łuków składających się na okrąg. Wspólny brzeg trzech obszarów zbudowany przez Brouwera nie miał takiego rozkładu, był continuum nierozkładalnym.

Kilka uwag ogólnych

Zjawisko zaistniało wcześniej niż teoria. Wprawdzie praca Schoenfliesa z roku 1908 porządkowała pojęcia, to jednak były one jeszcze in statu nascendi. Pojęcie spójności – składnik pojęcia continuum – zaistniało w formie dojrzałej dopiero u Frederica Riesza (1907), a co do zwartości – drugiego składnika obecnie przyjętego określenia continuum – były wątpliwości, bo miano na uwadze jedynie podzbiory przestrzeni euklidesowych. Nie od razu więc decydowano się, czy nie poprzestać na domkniętości i spójności. Ale dodawano ograniczoność, i tak w końcu wyodrębniło się pojęcie.

Unikano pisowni "continuum" mającej zabarwienie ogólne - filozoficzne, związane ze spekulacjami Starożytnych i z continuum mnogościowo-arytmetycznym Dedekinda, które było jednym z "kontinuów". Był to zapewne wpływ języka niemieckiego. W języku polskim pisano nawet "kontynuum". Pod wpływem języka angielskiego i przyjętej w nim pisowni, wracamy do dawnej wersji "continuum".

Od kiedy pojęcie zwartości zostało ustalone przez Felixa Hausdorffa w "Mengenlehre" (1914), nie było już przeszkód, aby mówić o continuum abstrakcyjnym jako przestrzeni spójnej i zwartej, na razie jeszcze metrycznej, chociaż otwartej na uogólnienia.

Z zakończeniem I Wojny zbiegło się trwałe zainteresowanie topologią punktową, ogólnie na świecie, ale także i w Polsce, wcześniej jeszcze we Lwowie, a później przede wszystkim w Warszawie. Continua, obecne już wcześniej u Janiszewskiego, Mazurkiewicza i Sierpińskiego, stały się teraz głównym tematem zainteresowań, skoncentrowanoych przede wszystkim na continuach nierozkładalnych.

Kompozanty continuów nierozkładalnych

Jeśli w continuum każde jego podcontinuum właściwe jest nigdzie gęste, to jest ono w oczywisty sposób nierozkladalne (wkrótce okazało się, że jest i naodwrót). Biorąc w continuum ustalony punkt, rozważajmy wszelkie podcontinua właściwe, do których ten punkt należy, otrzymujemy w sumie zbiór spójny, gęsty w continuum, ale w przypadku continuum nierozkładalnego – wobec nigdzie gęstości składników – będący zbiorem I-ej kategorii Baire'a (nie myślano w tym czasie o continuach niemetrycznych). Jest to kompozanta punktu. To pojęcie pojawiło się w pracach tomu 1 Fundamenta Mathematicae (1920), najpierw inspirowane pracą Mazurkiewicza, a w formie wyraźnej – już nazwane – w pracy Janiszewskiego i Kuratowskiego. Z czasem stało się jednym z podstawowych pojęć powstającej teorii. Continuum nierozkładalne rozpada się na rozłączne ze sobą kompozanty, na nieprzeliczalnie wiele kompozant (zgodnie z twierdzeniem Baire'a). Jak pokazał później (1927) Mazurkiewicz, tych kompozant jest continuum.

Tu należy się dygresja do prac późniejszych. Dla dowodu twierdzenia Mazurkiewicza wystarczy umieścić w continuum nierozkładalnym zbiór Cantora tak, by miał z każdą z jego kompozant co najwyżej jeden punkt wspólny. Oryginalna konstrukcja Mazurkiewicza była później upraszczana – sprowadzana np. do pewnej ogólnej konstrukcji J. Mycielskiego (1964) z Marczewskiego teorii niezależności (K. Kuratowski, W. Dębski). Podał swój dowód H. Cook (1964), który dowiódł więcej, a mianowicie, że zbiór Cantora, a nawet żaden zbiór typu F_σ nigdy nie może umieszczony w continuum nierozkładalnym tak, by miał dokładnie po jednym punkcie w każdej kompozancie. Naturalnym stawało się pytanie, czy można w ten sposób, tj. jako selektor z kompozant, umieścić w continuum nierozkładalnym w ogóle jakiś zbiór borelowski. Pytanie nie było nowe. Jeszcze w latach 30-tych Kuratowski pokazał, że napewno nie można tego zrobić w przypadku najprostszego ze znanych wówczas kontinuów nierozkładalnych, continuum Knastera. Do problemu wrócił J. T. Roberts (1986), który zauważył związek tego problemu z problemem zbiorów będących sumami kompozant.

Sumy kompozant a selektory

Oto, jeszcze w latach trzydziestych Kuratowski wykazał, że zbiory będące sumami kompozant wspomnianego continuum Knastera, są same bądź ich dopełnienia zbiorami I-ej kategorii, jeśli mają własność Baire'a (są więc bądź pełne, bądź zerowe w sensie kategorii Baire'a). Późniejsze prace, wśrod nich prace L. Krasinkiewicza (1974) i A. Emeryka (1980) stwierdzały tę własność m.in. dla kompozant solenoidów i kompozant pseudołuku. Według Rogersa continua mające tę własność nie mają selektora borelowskiego z kompozant. Ostatnio (2001) S. Solecki, nawiązując do Rogersa, dowiódł tego w zakresie wszelkich continuów.

Continua dziedzicznie nierozkładalne

W warszawskich latach dwudziestych powstały jeszcze dwie ważne prace z ogólnej teorii continuów nierozkładalnych: Bronisław Knaster (1922) zbudował continuum dziedzicznie nierozkładalne, tj. takie, które samo i wszelkie jego podcontinua wielopunktowe są nierozkładalne, a Mazurkiewicz dowiódł, że w sensie kategorii Baire'a continua dziedzicznie nierozkładalne stanowią większość wśród continuów płaskich. Continuum zbudowane przez Knastera (pseudołuk) stało się jednym z ważniejszych obiektów wzorcowych teorii.

Problem Jezior Wady zainteresował P. Urysohna, który zauważył (1924), że nierozkładalność ich wspólnego brzegu wcale nie jest oczywista i podał pewne dodatkowe wymagania jakie ma dla tego celu spełniać konstrukcja Brouwera. Wyjaśniły problem prace Kuratowskiego i Knastera (z roku 1926): wspólny brzeg trzech obszarów jest albo continuum nierozkładalnym albo sumą dwu takich continuów i obie możliwości się realizują.

Źródła algebraiczne

W tych samych latach continua nierozkładalne odkryli algebraicy, których wzorcowym obiektem stał się solenoid 2-adyczny, opisany przez L. Vietorisa (1927) jako grupa topologiczna powstająca z grupy $E \times C$, gdzie E jest grupą liczb rzeczywistych, a C zbiorem Cantora z operacją dodawania 2-adycznego, przez identyfikację w niej elementów różniących się o jedność $(n, n \cdot e)$, gdzie n całkowite, a e jest jednością 2-adyczną. Ten sam solenoid został odkryty nieco później (1930) przez D. van Dantziga na drodze geometrycznej, jako rezultat sukcesywnego wpisywania w bryłę torusa torusów dwukrotnie weń wwiniętych.

Topologowie warszawscy posługiwali się – wspomnianym już wcześniej – continuum wzorcowym płaskim, które opisał w swojej tezie Janiszewski, a któremu wygodną formę arytmetyczną nadał Knaster, i które nazywawane jest continuum Knastera, lub – wobec pewnych po temu motywacji – najprostszym continuum nierozkładalnym. Powstaje ono przez identyfikację w solenoidzie Vietorisa elementów przeciwnych a i $-a$. Ten prosty związek był jednak zauważony i wykorzystany dość późno.

W solenoidzie wszystkie kompozanty są ze sobą homeomorficzne jako warstwy względem podgrupy E solenoidu. Po identyfikacji dającej continuum Knastera, kompozanty solenoidu przechodzą w sposób ciągły i wzajemnie jednoznaczny na kompozanty continuum Knastera, po dwie na jedną, z wyjątkiem samej podgrupy E, której punkty po dwa przechodzą w jeden punkt wyjątkowej kompozanty continuum Knastera mającej kształt półprotej, w odróżnienieniu od pozostałych, te mają kształt pełnej prostej. Zgodnie z naturalną hipotezą, te drugie powinny być ze sobą homeomorficzne. Ma to potwierdzenie w pracy C. Bandta (1994) i w niedawnej pracy Sonji Stimac (2002), ale przychodzą nowe pytania o sposób w jaki te kompozanty dostaje się z kompozant solenoidu. David Bellamy (1979), wykorzystując autohomeomorfizmy continuum Knastera wynikające z jego struktury algebraicznej, wykazał, że realizują one homeomorfizm całej serii wyróznionych algebraicznie kompozant, a Wojciech Dębski (1982) dowiódł, że są to jedyne homeomorfizmy między kompozantami, które są restrykcjami homeomorfizmów continuum Knastera na siebie.

Mówiąc o solenoidzie i continuum Knastera nie trzeba ograniczać się do 2-adyczności. Wiele z powiedzianego przenosi się na p-adyczność i wielo-adyczność.

Jednorodność

Pytanie, czy okrąg jest jedynym continuum płaskim jednorodnym, pojawiło się w pracy Knastera i Kuratowskiego (1920). Jednorodność znaczy możliwość przeniesienia na siebie dowolnie danych dwu punktów za pomocą homeomorfizmu całej przestrzeni. W odpowiedzi na to pytanie, Mazurkiewicz (1924) dowiódł, że okrąg jest jedynym continuum jednorodnym wśród continuów lokalnie spójnych płaskich.

Wspólne modele

Continuum, którego każdy punkt ma dowolnie małe otoczenia spójne, nazywane jest lokalnie spójnym. Teoria continuów lokalnie spójnych, została w dużym stopniu zamknięta pracami Hansa Hahna, Stefana Mazurkiewicza, Wacława Sierpińskiego i R. L. Moore'a jeszcze we wczesnych latach dwudziestych: continua lokalnie spójne okazały się tym samym co obrazy ciągłe odcinka i tym samym co continua lokalnie łukowo spójne. Tematyka continuów, poszerzona na dowolne continua metryczne, przez lata trzydzieste rozwijana głównie w ośrodku warszawskim (Mazurkiewicz, Aronszajn, Zarankiewicz) i ośrodku topologicznym R. L. Moore'a w Texasie (Wilder, Whyburn), doprowadziła wkrótce do postawienia nowych zagadnień.

Hans Hahn (1930) zapytał o istnienie continuum metrycznego, z którego – podobnie jak z odcinka dostaje się continua lokalnie spójne – możnaby dostać jako obrazy ciągłe wszelkie continua metryczne. Problem rozstrzygnął (1934) Zenon Waraszkiewicz dowodząc, że nie istnieje continuum, z którego można jako obrazy ciągłe otrzymać każde spośród nieprzeliczalnie wielu continuów, które skonstruował, i które weszły do literatury jako spirale Waraszkiewicza. Inną osobliwością spiral Waraszkiewicza jest to, że nie są one obrazami ciągłymi jedna drugiej. Zjawiska, które odkrył Waraszkiewicz zostawiły trwały ślad w teorii continuów w postaci licznych rozwinięć i nawiązań znanych z lat siedemdziesiątych i późniejszych (Bellamy, Russo, J. T. Rogers, E. Pol).

W połowie lat trzydziestych Waraszkiewicz zaproponował klasyfikację continuów według ich podobieństwa do ustalonych continuów wzorcowych. W szczególności, przez continuum podobne do odcinka – obecnie przyjmujemy wygodny termin arc-like – rozumie się continuum mające dla każdego epsilon dodatniego epsilon odwzorowania na odcinek, tj. odwzorowania, dla których średnice przeciwobrazów punktów nie przekraczają liczby epsilon. Waraszkiewicz dowiódł (1935), że continua podobne do odcinka mają własność punktu stałego, że są spłaszczalne i że nie rozcinają płaszczyzny. W swojej rozprawie z roku 1936, nie przeczytanej dotąd krytycznie, wykazał że można je wszystkie otrzymać jako obrazy ciągłe z pewnego jednego continuum (nie twierdził, że jest to arc-like). Praca była opublikowana po polsku i jak się zdaje przeszła niezauważona. Zaproponowana przez Waraszkiewicza klasyfikacja continuów jest powszechnie stosowana od czasu pracy R. H. Binga (1951), który continua arc-like nazywał w tej pracy wężowymi. Continuum nazywane jest K-like, jeśli dla każdego epsilon dodatniego ma epsilon odwzorowania na K. Szczególnie badanymi continuami – poza arc-like – stały się continua circle-like i tree-like.

Zenon Waraszkiewicz

Wśród matematyków, którzy zaznaczyli swój ślad w teorii continuów, Zenonowi Waraszkiewiczowi należy się wyjątkowa uwaga. Spirale Waraszkiewicza i nieistnienie wspólnego modelu ciągłego dla continuów metrycznych, stały się inspiracją dla wielu istotnych wyników teorii. D. P. Bellamy (1971,1) dowiódł nieistnienia wspólnego modelu dla continuów nierozkładalnych, skonstruował rodzinę nieprzeliczalną continuów arc-like nieporównywalnych przez obrazy ciągłe (1971, 2). Spirale Waraszkiewicza pojawiają się w pracy Elżbiety Pol dotyczącej analogicznego problemu w zakresie continuów wymiaru nieskończonego (2002). Szereg twierdzeń o nieistnieniu wspólnego modelu dowiódł Russo (1979). Są to tylko wybrane – w pewnym sensie losowo – wyniki nawiązujące do idei Waraszkiewicza.

Nieznany jest powód odsunięcia się Waraszkiewicza od głównego nurtu badań warszawskich w późnych latach trzydziestych. Pewne nieudane jego prace z tego późnego okresu sprawiły zapewne, że jego problemy nie były podjęte w Warszawie, w szczególności jego idee dotyczące continuów arc-like.

Zenon Waraszkiewicz zmarł wkrótce po Wojnie.

Jednorodność

W latach bezpośrednio po II Wojnie nastąpił przełom w teorii continuów. Edwin E. Moise (1948) odkrył na nowo continua dziedzicznie nierozkładalne. Jak się później okazało, skonstruował nieznane w kręgu R. L. Moore'a continuum Knastera, o którym dowiódł, że jest homeomorficzne z każdym ze swoich (wielopunktowych) podcontinuów. F. B. Jones pisał po latach, że – mając pewne własne przemyślenia – zapytał Moise'a o jednorodność jego continuum. Problem podjął Bing (1948) odpowiadając na to pytanie twierdząco. Przeczyło to anonsowi Waraszkiewicza z CR Paryskich (1937), który podejmując problem jednorororodności continuów płaskich, wykluczał od razu na wstępie jednorodność continuów nie zawierających łuków, a więc także znanego mu continuum Knastera. Dowód Binga – kwestionowany przez jakiś czas przez I. Kapuano – krytycznie przejrzany również na Seminarium Knastera – był jednak niepodważalny.

Continuum Knastera-Moise'a okazało się – jak dowiódł Bing (1951) – jedynym jednorodnym płaskim wśród continuów arc-like. Wśród continuów płaskich zawierających łuki jedynym jednorodnym okazał się okrąg – Bing (1960) – co potwierdzało pozytywną część wspomnianego anonsu Waraszkiewicza. Rozwijając swoje dawniejsze idee, F. B. Jones zbudował continuum rozcinające płaszczyznę – nazywane okręgiem pseudołuków – o którym wspólnie z Bingiem dowiódł (1959), że jest jednorodne. Najprostsze spośród rozcinających płaszczyznę continuów circle-like, nazywane pseudookręgiem, okazało się – jak pokazał J. T. Rogers (1970, 1981), wbrew oczekiwaniom, niejednorodne. Problem jednorodności continuów płaskich jest dotąd otwarty.

Jest rozstrzygnięty w zakresie continuów arc-like, ale nie w zakresie wszystkich continuów nierozcinających płaszczyzny (tj. wśród continuów tree-like). F. B. Jones dowiódł, że continuum jednorodne nie rozcinające płaszczyzny musi być nierozkładalne, a według Binga, powinno być pseudołukiem. P. Krupski i J. Prajs (1990) dowiedli, że musi być dziedzicznie nierozkładalne.

W zakresie continuów rozcinających płaszczyznę jednorodnymi są okrąg i wspomniany okrąg pseudołuków Binga-Jonesa. Jest to continuum rozkładalne (topologicznie, jest tylko jeden okrąg pseudołuków), a J. T. Rogers (1981) dowiódł, że continua jednorodne rozcinające płaszczyznę muszą być rozkładalne. Zatem, wobec wcześniejszego twierdzenia F. B. Jonesa (1951), muszą być okręgami continuów jednorodnych nierozcinających płaszczyzny (jednym z nich jest okrąg pseudołuków).

Według hipotezy Janusza Prajsa (2004) krzywe jednorodne (niekoniecznie płaskie) powinny zawierać bądź łuk bądź pseudołuk. Niewykluczone, że jedynymi continuami jednorodnymi płaskimi mogą okazać się continuum jednopunktowe i pseudołuk, wśród continuów nierozcinających płaszczyzny, oraz okręgi wyżej wspomnianych.

F. Burton Jones

Mówiąc o problemach i rozstrzygnięciach, trzeba powiedzieć i o ich autorach. Mary Ellen Rudin pisze (1997), że spośród uczestników Seminarium Moore'a najwięcej zawdzięcza F. B. Jonesowi. Musi to samo powiedzieć każdy, kto chce widzieć w continuach nie tylko zbiór faktów, lecz konsekwentnie rozwijaną i przewidujące swoje wyniki teorię. Nazwać należy esejem naukowym, a nie komunikatem czy pracą, traktat F. B. Jonesa (1952) zatytułowany "Aposyndesis".

Aposyndetyczność jest wielce przemyślanym pojęciem uogólniającym lokalną spójność. Aposyndetyczność w punkcie nie wyklucza osobliwości jaką mają continua nie lokalnie spójne, tj. leżenia tego punktu na tzw. continuum konwergencji, nie dopuszcza wszakże osobliwości globalnej. Wymaga się mianowicie, by w dopełnieniu każdego innego punktu znalazło się podcontinuum zawierające dany punkt w swoim wnętrzu. Nie wgłębiając się w dość złożoną logicznie sytuację, F. B. Jones zwraca uwagę na to, że wobec tego, że aposyndetyczność jest związana z punktem, to podobnie, jak w przypadku lokalnej spójności, można mówić o aposyndetyczności wszędzie i aposyndetyczności nigdzie (jest wiele przy tym relatywizacji). Jednorodności można się spodziewać jedynie we wspomnianych skrajnych przypadkach. To pozwoliło F. B. Jonesowi wypowiedzieć domysł zaistnieniu okręgu pseudołuków jako continuum jednorodnego. F. B. Jones dowiódł (1951), że continua jednorodne nie rozcinające płaszczyzny (są nigdzie nie aposyndetyczne) muszą być nierozkładalne. Według wspomnianego już wyniku P. Krupskiego i J. Prajsa, są dziedzicznie nierozkładalne.

Rozbicia płaszczyzny

Na kierunek rozwoju teorii continuów wpłynęły w dużym stopniu prace J. H. Robertsa, który dowiódł (1936) niemożliwości rozbicia półciągłego górnie płaszczyzny na łuki. Zapoczątkował w ten sposób serie twierdzeń o rozbiciach płaszczyzny na continua. R. D. Anderson (1952) dowiódł, że niemożliwe jest rozbicie ciągłe płaszczyzny na continua lokalnie spójne nie rozcinające płaszczyzny, a Eldon Dyer (1955) dowiódł wspomnianej niemożliwości dla continuów rozkładalnych. R. D. Anderson (1950) anonsował przykład rozbicia ciągłego płaszczyzny na pseudołuki. Wcześniej (1941) B. Knaster anonsował rozbicia ciągłe płaszczyzny na (nieograniczone) homeomorficzne ze sobą continua nierozkładalne. Te przykłady doczekały się dokładnych rekonstrukcji w pracach W. Lewisa i J. J. Walsha (1978) oraz J. Prajsa (2002).

Granice odwrotne

Teorię continuów wzbogaciła z początkiem lat sześćdziesiątych metoda granic odwrotnych. Continua K-like mogły być rozpatrywane jako granice odwrotne continuów K z odwzorowaniami ciągłymi continuów K na siebie. Można było korzystać z motywacji czysto arytmetycznych dla kreowania continuów granicznych oraz z pewnych środków teorii funkcji rzeczywistych. Twierdzenie znane z prac K. Zarankiewicza i T. Hommy (lata pięćdziesiąte) posłużyło autorowi tego opracowania do opisu pseudołuku (1964) i pseudookręgów (1972). Znane z lat trzydziestych twierdzenie V. Jarnika i V. Knichala pozwala ograniczyć się w opisie continuów arc-like do pewnych dwu funkcji. Dla opisu pseudołuku, jak wykazał G. W. Henderson, wystarczy jedna funkcja. Każdy taki opis daje pewien określony homeomorfizm na pseudołuku. Funkcja znaleziona przez P. Minca i W. R. R. Transue (1999) wyznacza na pseudołuku homeomorfizm z orbitą gęstą.

Kilka uwag ogólnych

Teoria continuów nigdy nie zerwała więzów ze swoimi początkowymi motywacjami wywodzącymi się z topologii przestrzeni euklidesowych, których przykładem są Jeziora Wady. Wpływy są tu obustronne, widoczne w podstawowej w tym zakresie książki P. S. Aleksandrowa poświęconej topologii kombinatorycznej. Te obustronne związki łączą teorię continuów z osobliwościami jakie napotyka się w teorii funkcji analitycznych, znanymi z książek Gołuzina, Saksa i Zygmunda, oraz Stoiłowa. Metody analizy zespolonej odżywają obecnie w zagadnieniach topologii dynamicznej, która od innej strony odkrywa osobliwości znane klasycznemu nurtowi teorii continuów. Od strony teorii continuów omawia ten nurt Judy A. Kennedy (1995), a od strony środków analitycznych R. L. Devaney (1993).

Jest również nurt arytmetyczny i algebraiczny w teorii continuów, który najbardziej koncentruje się na teorii grup topologicznych.

Continua niemetryczne

Teoria continuów nie pozostała obojętna na rozwój pojęć topologii ogólnej, której przestrzenie nie muszą mieć pochodzenia metrycznego. Połączenie obu punktów widzenia – dawnego geometrycznego i nowego mnogościowego – prowadzi do ciekawych zderzeń, które są nie tylko ciekawe, ale pozwalają lepiej rozumieć sytuacje klasyczne.

Problem stanowią już łuki niemetryczne (hausdorffowskie). Zainicjował problemy Sibe Mardesic, który dowiódł, że odcinki niemetryczne nie mają odwzorowań ciągłych na swój kwadrat, wykorzystując do tego celu jedno z twierdzeń Djuro Kurepy dotyczące własności Suslina. Zjawisko Peany nie dotyczy więc odcinków niemetrycznych. Ogólności temu kręgowi twierdzeń nadał L. B. Treybig (1964). Stąd inne niż w zakresie metrycznym usytuowanie continuów lokalnie spójnych wśród continuów niemetrycznych, bo nie wszystkie continua lokalnie spójne niemetryczne są obrazami ciągłymi łuków, ale jak dowiódł J. Nikiel (1989) są nimi napewno continua dziedzicznie lokalnie spójne. Lokalna spójność continuum niemetrycznego nie zapewnia zawierania się w nich łuków - Mardesic (1967). Istnieje pełna charakteryzacja topologiczna (wewnętrzna) obrazów ciągłych łuków niemetrycznych dana przez Jacka Nikiela (1988).

Szczególnie osobliwa sytuacja zaistniała w problemie kompozant continuów nierozkładalnych (hausdorffowskich) niemetrycznych. David Bellamy (1980) zbudował continuum nierozkładalne niemetryczne o jednej kompozancie. Osobliwa sytuacja zaistniała wokół continuum nierozkładalnego będącego narostem kompaktyfikacji Cecha-Stone'a półprostej, dla którego liczebności kompozant nie da się ustalić środkami ZFC (D. P. Bellamy, M. E Rudin, prace autora tego opracowania (1974)). Całkiem niedawno Taras Banakh (2005) ustalił, że ta liczebność jest 2^c, jeśli nie jest skończona, ale znanymi dotąd możliwymi liczebnościami skończonymi są 1 i 2. Istnieją continua niemetryczne dziedzicznie nierozkładalne: Emeryk (1976), K. P. Hart, J. van Mill i R. Pol (2000).

Odwzorowania

Jest wiele twierdzeń i pojęć, które pojawiły się w pracach Seminarium Topologii we Wrocławiu, i które na trwałe weszły do teorii continuów. Ale niech za ich symbol posłużą odwzorowania konfluentne. O ile pamiętam, była to idea Bronisława Knastera, ale krystalizowała się dość długo zanim przyjęła określony kształt w pracy Janusza Charatonika (1964). Odwzorowanie continuum X na continuum Y jest konfluentne, jeśli każde podcontinuum continuum Y jest obrazem każdej składowej swojego przeciwobrazu. Ale zastanawiano się, czy nie lepiej jest wymagać, by było ono obrazem pewnej składowej. Ten wariant nazwano słabą konfluentnością. Każda z konfluentności jest ogólniejsza zarówno od otwartości jak i monotoniczności odwzorowania. Wydaje się, że słaba konfluentność jest bardziej elastycznym środkiem teorii continuów niż wcześniej pomyślana konfluentność. Niezależnie od użyteczności tych pojęć – p. ich przegląd w książce Nadlera (1992) – ciekawa okazała się klasyfikacja continuów – zainicjowana przez Andrzeja Lelka – i rozwinięta w Seminarium Profesora Janusza Charatonika – ze względu na ich rolę w kwestiach dotyczących konfluentności i słabej konfluentności. Jeśli continuum ma tę własność, że każde odwzorowanie na nie (rozważa się, co jest zrozumiałe, jedynie odwzorowania między continuami) jest konfluetne, zalicza się je do klasy (C). Podobnie określa się klasę (W) dla odwzorowań słabo (weakly) konfluetnych. Continua klasy (C) okazały się tym samym, co continua dziedzicznie nierozkładalne. Continua arc-like, a więc i odcinek, są w klasie (W), do której nie należy na przykład żaden triod, w szczególności continuum w kształcie litery T.

Uwagi końcowe

Na początku zeszłego wieku teoria continuów była teorią osobliwości pojawiających się na obrzeżach teorii funkcji analitycznych. Środki, którymi opisywane były continua ograniczały się do geometrii poszerzonej o metody topologii punktowej podzbiorów przestrzeni euklidesowych jak u Schoenfliesa (loco cit.). Jeszcze w latach trzydziestych środki dowodowe i źródła pojęć ograniczały się do geometrycznych środków topologii metrycznej takich jak u Karla Mengera w "Kurventheorie" (1932). Ale już w tych latach pojawiały się problemy wymagające metod opisowej teorii mnogości, które znalazły wyraz w końcowych rozdziałach "Topologie I" Kazimierza Kuratowskiego, i w "General Topology" Wacława Sierpińskiego. Zakres środków rozszerzył się na teorię grup topologicznych, tak jak przedstawia to książka E. Hewitta i K. Rossa "Abstract harmonic analysis I", oraz na teorię przestrzeni funkcyjnych. Do teorii continuów wkroczyły środki teorii funkcji rzeczywistych. Obecnie, zajmując się continuami, trzeba dysponować środkami z bogatego zasobu dyscyplin matematycznych. Jeśli nawet wymienione wyżej nie wyczerpują wszystkiego, co matematyka mogłaby dać do ręki, bo na przykład zrzadka pojawia się w istotny sposób całka i pochodna, to jednak wielce urozmaicony sposób ich wykorzystania czyni z teorii continuów sztukę będąca w paraleli do teorii liczb. Być może powodowane jest to często świadomym ograniczaniem środków. Ostatnio nowych środków dostarcza topologia dynamiczna w postaci fraktali i atraktorów. Dawne obiekty widzimy teraz od strony konstrukcji analitycznych i algebraicznych. Przed teorią continuów stanęło pytanie, czy nowa konwencja nie zmienia natury pięknej dotąd teorii. Przewidywanie, że nastąpi pochłonięcie dawnej konwencji przez nowe, czy też ich zmieszanie się, nie sprawdzają się. Zarówno siła tradycyjnej konwencji jak i źródła problemów o naturalnej geometrycznej motywacji wydają się dalekie od wyczerpania.

Bibliografia

Christoph Bandt
Composants of the horseshoe, Fund. Math. 144 (1994), 231 - 241,

D. P. Bellamy
1. *An uncountable collection of chainable continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 297-304;
2. *Indecomposable continua with one and two composants*, Fund. Math. 101 (1978), 129 - 134;
3. *Homeomorphisms of composants,* Houston J. Math. 5 (1979), 313 - 319,

R. H. Bing
1. *A homogeneous indecomposable plane continuum*, Duke Math. J. 15 (1948), 729 - 742;
2. *Snake-like continua*, Duke Math. J. 18 (1951), 653 - 663,

R. H. Bing, F. Jones
Another homogeneous plane continuum, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 171 - 192,

L. E. J. Brouwer
Zur Analysis Situs, Math. Ann. 68 (1910), 422 - 434,

J. J. Charatonik
1. *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math. 56 (1964), 213 - 220;

2. *History of continuum theory*, Handbook of the History of General Topology, Volume 2, 703 - 786, 1998 Kluwer Academic Publishers,

H. Cook
On subsets of indecomposable continua, Coll. Math. 13 (1964), 37 - 63,

D. van Dantzig
Uber topologisch homogene Kontinua, Fund. Math. 15 (1930), 102 - 125,

R. L. Devaney
Knaster-like continua and complex dynamics, Ergodic Theory and Dynamical Systems 13d (1993), 627 - XXX,

W. Dębski
Rozprawa doktorska, Katowice 1982,

A. Emeryk
1. *On hereditarily indecomposable non-metric Hausdorff continua*, Fund. Math. 72 (1976), 63 - 64;
2. *Partitions of indecomposable continua into composants*, Proceedings of the International Conference on Geometric Topology, Warszawa 1980, 137 - 140,

H. Hahn
Probleme 52, Fund. Math. 15 (1930), 357,

K. P. Hart, J. van Mill, R. Pol
Remarks on hereditarily indecomposable continua, Topology Proceedings 25 (2000), 179 - 206,

Z. Janiszewski, K. Kuratowski
Sur les continus indecomposables, Fund. Math. 1 (1920), 210 - 222,

F. Burton Jones
1. *Certain homogeneous unicoherent indecomposable continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 855 - 859;
2. *Concerning aposyndetic and non-aposyndetic continua*, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 137 - 151;
3. *On a certain type of homogeneous plane continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 735 - 740;
4. *Aposyndesis, homogeneity and a bit more history*, Proceedings Conference on Metric Spaces, Generalized Metric Spaces and Continua (Guilford College, Greensboro NC 1979), Guilford College, Greensboro NC 1980, 74 - 84,

J. A. Kennedy
A brief history of indecomposable continua, Lecture Notes in Pure and applied Mathematics 170, Continua with the Houston Problem Book 1995, 103 - 126,

B. Knaster, K. Kuratowski
Problem 2, Fund. Math. 1 (1920), 223,

J. Krasinkiewicz
On a class of indecomposable continua, Coll. Math, 32 (1974), 71 - 75,

P. Krupski. J. R. Prajs

Outlet points and homogeneous continua, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 123 - 141,

K. Kuratowski
Sur un probleme du choix concernant les continus indecomposables, CR Varsovie, 18. II. 1927,

W. Lewis, J. J. Walsh
A continuous decomposition of the plane into pseudo-arcs, Houston J. Math. 4(1978), 209 - 222,

S. Mardesic
1. *Mapping ordered continua onto product spaces*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astronom. 15 (1960), 85 - 89;
2. *A locally connected continuum which contains no proper locally connected subcontinuum*, Glasnik Mat. 2 (1967), 167 - 178,

S. Mazurkiewicz
1. *Un theoreme sur les continus indecomposables*, Fund. Math. 1 (1920), 35 - 39;
2. *Sur les continus homogenes*, Fund. Math. 5 (1924),

P. Minc, W. R. R. Transue
A transitive map on $[0,1]$ *whose inverse limit is the pseudo-arc*, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), 1165 - 1170,

E. E. Moise
An indecomposable continuum which is homeomorphic to each of its non-degenerate subcontinua, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 581 - 564,

J. Mycielski
Independent sets in topological algebras, Fund. Math. 55 (1964), 139 - 147,

S. B. Nadler, Jr.
Continuum Theory, Marcel Dekker Inc. 1992,

J. Nikiel
1. *The Hahn-Mazurkiewicz theorem for hereditarily locally connected continua*, Topology Appl. 32 (1989), 307 - 323;
2. *Images of arcs - a nonseparable version of the Hahn-Mazurkiewicz theorem*, Fund. Math. 129 (1988), 91 - 120,

E. Pol
On hereditarily indecomposable continua, Henderson compacta and a question by Yohe, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 2789 - 2795,

J. Prajs
1. *A continuous collection of pseudo-arcs filling up the annulus*, Trans, Amer, Math. Soc. 352 (2000), 1743 - 1757;
2. *Question 7*, Topology Proceedings 28 (2004), 304,

J. H. Roberts
Collections filling the plane, Duke Math. J. 2 (1936), 10 - 19,

J. T. Rogers, Jr.
1. *The pseudo-circle is not homogeneous*, Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 417 - 428;
2. *Homogeneous separating plane continua are decomposable*, Michigan J. Math. 28 (1981), 317 -

321;
3. *Borel transversals and ergodic measures on indecomposable continua*, Topology Appl. 24 (1986), 217 - 227,

R. L. Russo
Universal continua, Fund. Math, 105 (1979), 41 - 60,

A. Schoenflies
Die Entwickelung der Lehre von den Punktmanningfaltigkeiten, Leipzig 1908,

S. Solecki
The space of composants of an indecomposable continuum, Advances in Mathematics 166 (2002), 149 - 192,

S. Stimac
Homeomorphisms of composants of Knaster continua, Fund. Math. 171 (2002), 267 - 278,

P. Urysohn
Memoire sur les multiplicites Cantoriennes, Fund. Math. 7 (1925), 30 - 137, Fund. Math. 8 (1926), 225 - 359;
wersja ros. z komentarzami, *Trudy po topołogii i drugim obłast'jam matiematiki I*, Moskwa - Leningrad 1951, 229 - 512; o Jeziorach Wady, str. 355 i dalsze,

L. Vietoris
Uber den hoheren Zusammenhang kompakten Raume und eine Klasse von zusammenhangenden Abbildungen, Math. Ann. 97 (1927), 454 - 472,

L. B. Treybig
Concerning continuous images of compact ordered spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 866 - 871,

Z. Waraszkiewicz
1. *Une famille indenombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre*, Fund. Math. 18 (1932), 118 - 137;
2. *Sur un probleme de M. H. Hahn*, Fund. Math. 22 (1934), 180 - 205;
3. Protokoły Seminarium z Topologii w Warszawie (18. II. 1935, o punktach stałych w continuach arc-like);
4. *O pokrewieństwie kontynuów*, Wiad. Mat. 24 (1936), 1 - 52,

K. Yoneyama
Theory of continuous sets of points, Tohoku Math, J. 12 (1917), 43 - 158.