

Zadania z Algebry liniowej 4

Semestr letni 2009

Ostatnie zmiany 23.05.2009 r.

1. Niech F będzie podciałem ciała K i niech $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że niepusty liniowo niezależny podzbiór S przestrzeni F^n jest także liniowo niezależny jako podzbiór przestrzeni K^n .
2. Niech V będzie skończone wymiarową przestrzenią wektorową na ciałem $\mathbb{R}$ i dla każdego $i \in \mathbb{N}$ niech U_i będzie właściwą podprzestrzenią przestrzeni V . Pokazać, że $V \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.
3. Pokazać, że nad żadnym ciałem F nie istnieje przestrzeń wektorowa, która ma dokładnie 15 wektorów.
4. Niech F będzie ciałem i niech $V = F[X]$. Udowodnić, że $V \cong V \times V$.
5. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech F będzie ciałem. Niech macierze $A, B \in M_n(F)$ spełniają $A + B = I$. Pokazać, że $AB = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $A = A^2$ i $B = B^2$.
6. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech F będzie ciałem. Niech $A \in M_n(F)$.
 - (a) Jeśli A spełnia $A = AA^T$, pokazać, że $A^2 = A$.
 - (b) Jeśli istnieje macierz $B \in M_n(F)$ taka, że $I + A + AB = O$, udowodnić, że macierz A jest nieosobliwa.
7. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą parzystą i niech F będzie ciałem. Niech $A, B \in M_n(F)$ spełniają $A = B^2$. Niech $p(X)$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A i niech $q(X)$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy B . Udowodnić, że $p(X^2) = q(X)q(-X)$.
8. Niech macierz $A \in M_3(\mathbb{Q})$ spełnia $A^5 = I$. Pokazać, że $A = I$.
9. Niech $\tau \in \text{End } V$ gdzie $\dim V < \infty$. Jeśli $\text{rank } \tau^2 = \text{rank } \tau$ pokazać, że $\text{im } \tau \cap \ker \tau = 0$.
10. Niech $\dim V < \infty$ i niech $\tau \in \text{End } V$ spełnia $\tau^2 = 0$. Pokazać, że $2 \text{rank } \tau \leq \dim V$.
11. Niech τ będzie endomorfizmem przestrzeni wektorowej V nad ciałem liczb rzeczywistych. Udowodnić, że jeśli τ nie ma wartości własnych, to każda podprzestrzeń τ –niezmiennicza ma wymiar parzysty (w szczególności przestrzeń V ma wymiar parzysty).
12. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K o wymiarze $n \geq 2$ i niech $\sigma \in \text{End}_K V$. Udowodnić następujące stwierdzenia.
 - (a) Jeśli każda podprzestrzeń o wymiarze $n-1$ jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu σ , to każdy niezerowy wektor v przestrzeni V jest wektorem własnym endomorfizmu σ .
 - (b) Jeśli każdy niezerowy wektor v przestrzeni V jest wektorem własnym endomorfizmu σ , to σ jest endomorfizmem skalarnym: $\sigma = a\mathbf{1}_V$ dla pewnego $a \in K$.
13. Wskazać przykład przestrzeni wektorowej V i endomorfizmu σ przestrzeni V , który ma tylko jedną właściwą ($\neq 0$ i $\neq V$) podprzestrzeń niezmienniczą.
14. Niech $K[X]_n$ będzie przestrzenią wektorową wielomianów stopnia $\leq n$ nad ciałem K i niech $D : K[X]_n \rightarrow K[X]_n$ będzie endomorfizmem różniczkowania wielomianów. Zauważyć, że dla $m \leq n$ podprzestrzeń $K[X]_m$ jest D –niezmiennicza. Udowodnić, że jeśli $m < n$ i charakterystyka ciała K jest bądź 0 bądź p takie, że $p \nmid m+1$, to nie istnieje podprzestrzeń D –niezmiennicza U przestrzeni $K[X]_n$ taka, że

$$K[X]_n = K[X]_m \oplus U.$$

15. Niech $\tau_1, \dots, \tau_n$ będą endomorfizmami przestrzeni wektorowej V nad ciałem liczb rzeczywistych i założmy, że istnieje baza przestrzeni V , w której każdy z nich ma macierz symetryczną. Udowodnić, że jeśli $\tau_1^2 + \dots + \tau_n^2 = 0_V$, to $\tau_1 = \dots = \tau_n = 0_V$.

16. Niech σ i τ będą endomorfizmami przestrzeni wektorowej V nad ciałem K o charakterystyce $\neq 2$, takimi, że $\sigma^2 = \tau^2 = \mathbf{1}_V$.

(a) Udowodnić, że $V = \ker(\sigma - \mathbf{1}) \oplus \ker(\sigma + \mathbf{1})$ oraz $\sigma(\ker(\sigma \pm \mathbf{1})) \subseteq \ker(\sigma \pm \mathbf{1})$.

(b) Udowodnić, że jeśli $\dim \ker(\sigma \pm \mathbf{1}) \neq \dim \ker(\tau \pm \mathbf{1})$ dla jakiegokolwiek kombinacji znaków $\pm$, to istnieje wspólny wektor własny endomorfizmów σ i τ .

17. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych.

(a) Sprawdzić, że addytywna grupa przestrzeni V z mnożeniem zewnętrznym przez liczby rzeczywiste określonym tak jak w przestrzeni V jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. Tę przestrzeń oznaczamy $V_{\mathbb{R}}$ i nazywamy *urzeczywistnieniem* przestrzeni zespolonej V .

(b) Niech $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V . Udowodnić, że zbiór

$$\mathcal{B} \cup i\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$$

jest bazą przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$. Zatem

$$V_{\mathbb{R}} = \text{lin}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}) \oplus \text{lin}_{\mathbb{R}}(i\mathcal{B})$$

oraz $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$.

18. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych i niech $V_{\mathbb{R}}$ będzie urzeczywistnieniem przestrzeni V . Dla każdego endomorfizmu $\tau \in \text{End}_{\mathbb{C}} V$ określamy odwzorowanie

$$\tau_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}, \quad \tau_{\mathbb{R}}(v) = \tau(v).$$

(a) Udowodnić, że $\tau_{\mathbb{R}} \in \text{End}_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$. Endomorfizm $\tau_{\mathbb{R}}$ nazywamy *urzeczywistnieniem* endomorfizmu τ .

(b) Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V i niech $\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ będzie odpowiednią bazą przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$. Udowodnić, że dla każdego endomorfizmu $\tau \in \text{End}_{\mathbb{C}} V$ istnieje dokładnie jedna para endomorfizmów $\tau_1, \tau_2 \in \text{End}_{\mathbb{R}} \text{lin}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B})$ takich, że

$$\tau(v) = \tau_1(v) + i\tau_2(v)$$

dla każdego $v \in \text{lin}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B})$.

(c) Niech $A = \mathbf{m}(\tau_1, \mathcal{B})$ oraz $B = \mathbf{m}(\tau_2, \mathcal{B})$. Udowodnić, że

$$\mathbf{m}(\tau_{\mathbb{R}}, \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

19. W oznaczeniach zadania 18 udowodnić, że

$$\det \tau_{\mathbb{R}} = |\det \tau|^2.$$

Wskazówka. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy

$$\det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a+bi & -b+ai \\ b & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ b & a-bi \end{bmatrix} = |a+bi|^2.$$

20. Niech $\{v_1, \dots, v_r\}$ będzie zbiorem parami ortogonalnych wektorów nieizotropowych przestrzeni dwuliniowej V nad ciałem o charakterystyce $\neq 2$.

(a) Udowodnić, że wektory $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne.

(b) Udowodnić, że istnieją wektory $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ takie, że $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ jest bazą ortogonalną przestrzeni V .

21. Niech V będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem o charakterystyce $\neq 2$. Udowodnić, że V jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy funkcjonal kwadratowy q ma następującą własność: Jeśli $y \in V$ i $q(x+y) = q(x) + q(y)$ dla wszystkich $x \in V$, to $y = 0$.

22. Niech V będzie przestrzenią dwuliniową i niech U będzie podprzestrzenią V . Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.

(a) Przestrzeń ilorazowa V/U jest przestrzenią dwuliniową z funkcjonalem dwuliniowym określonym formułą

$$(x+U, y+U) = (x, y) \quad \text{dla } x, y \in V.$$

(b) $U \subseteq \text{rad } V$.

23. Niech V będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową i niech $\Lambda : V \rightarrow V^*$ będzie homomorfizmem przestrzeni wektorowych określonym formułą

$$\Lambda(v) = \lambda_v \quad \text{gdzie } \lambda_v(x) = (v, x) \quad \text{dla } x \in V.$$

(a) Udowodnić, że dla każdej podprzestrzeni S przestrzeni V mamy

$$\Lambda(S^\perp) = \text{Ann } S,$$

gdzie *anihilator* $\text{Ann } S$ podprzestrzeni S jest zbiorem wszystkich funkcjonałów liniowych $\lambda \in V^*$ spełniających $\lambda(S) = 0$.

(b) Udowodnić, że $S^* \cong V^* / \text{Ann } S$.

(c) Udowodnić, że $\dim V = \dim S + \dim S^\perp$ (jest to tak zwane *twierdzenie o wymiarze*).

Wskazówka. Pokazać, że odwzorowanie $h : V^* \rightarrow S^*$, $h(\lambda) = \lambda|_S$ (zacieśnienie λ do podprzestrzeni S) jest surjektywnym homomorfizmem przestrzeni wektorowych oraz $\ker h = \text{Ann } S$.

24. Posługując się twierdzeniem o wymiarze podać dowody następujących twierdzeń.

(a) Twierdzenie o rzucie prostopadłym.

(b) $S^{\perp\perp} = S$ dla każdej podprzestrzeni S nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej V .

25. W przestrzeni euklidesowej V udowodnić

(a) *twierdzenie Pitagorasa*: Jeśli $u, v \in V$ są prostopadłe, to $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(b) *twierdzenie o równoległoboku*: Dla dowolnych $u, v \in V$,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

26. W przestrzeni euklidesowej V udowodnić

(a) *nierówność Cauchy'ego-Schwarza*: Dla dowolnych $u, v \in V$,

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy gdy wektory u, v są liniowo zależne.

(b) *nierówność trójkąta*: Dla dowolnych $u, v \in V$,

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy gdy wektory u, v są liniowo zależne i $(u, v) \geq 0$.

27. Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej V i niech $v \in V$. Pokazać, że

$$v = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_n)e_n \quad \text{oraz} \quad \|v\|^2 = (v, e_1)^2 + \dots + (v, e_n)^2.$$

28. Sprawdzić, że następujące wektory tworzą układ ortonormalny

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i znaleźć bazę ortonormalną $\mathbb{R}^4$ zawierającą ten układ.

29. Niech $A_1, \dots, A_n$ będą wierszami macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ i założymy, że $A_1, \dots, A_n$ traktowane jako wektory przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym są parami ortogonalne. Udowodnić, że

$$|\det A| = \|A_1\| \cdots \|A_n\|.$$

30. Niech τ^* będzie endomorfizmem przestrzeni dwuliniowej V sprzężonym z endomorfizmem τ tej przestrzeni. Udowodnić następujące stwierdzenia.

- (a) $\ker \tau^* = (\operatorname{im} \tau)^\perp$, $\operatorname{im} \tau^* = (\ker \tau)^\perp$, $\ker \tau = (\operatorname{im} \tau^*)^\perp$, $\operatorname{im} \tau = (\ker \tau^*)^\perp$.
- (b) Endomorfizm τ jest injektywny wtedy i tylko wtedy gdy τ^* jest surjektywny.
- (c) Endomorfizm τ jest surjektywny wtedy i tylko wtedy gdy τ^* jest injektywny.

31. Niech σ, τ będą endomorfizmami samosprzężonymi przestrzeni euklidesowej. Udowodnić, że endomorfizm $\sigma\tau$ jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy gdy $\sigma\tau = \tau\sigma$.

32. Niech σ będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej V .

- (a) Udowodnić, że jeśli $(\sigma(u), v) = 0$ dla każdych $u, v \in V$, to $\sigma = 0$.
- (b) Udowodnić, że jeśli σ jest samosprzężony i $(\sigma(v), v) = 0$ dla każdego $v \in V$, to $\sigma = 0$.
- (c) Wskazać przykład endomorfizmu σ przestrzeni euklidesowej V takiego, że $(\sigma(v), v) = 0$ dla każdego $v \in V$ i $\sigma \neq 0$.

33. Endomorfizm σ przestrzeni euklidesowej V nazywa się *skośny*, jeśli $\sigma^* = -\sigma$. Udowodnić, że σ jest skośny wtedy i tylko wtedy gdy macierz A endomorfizmu σ względem dowolnej bazy ortonormalnej przestrzeni V jest *skośnie symetryczna*, to znaczy $A^T = -A$.

34. Niech σ będzie endomorfizmem skośnym przestrzeni euklidesowej V .

- (a) Udowodnić, że każdy endomorfizm τ podobny do σ jest także skośny.
- (b) Wskazać przykład endomorfizmu skośnego σ , takiego, że σ^2 nie jest skośny.
- (c) Udowodnić, że σ^3 jest skośny.

35. (a) Sprawdzić, że endomorfizm σ przestrzeni euklidesowej jest izometrią wtedy i tylko wtedy gdy zachowuje długości wektorów: $\|v\| = \|\sigma(v)\|$ dla każdego $v \in V$.

(b) Udowodnić, że endomorfizm samosprzężony, którego wszystkie wartości własne są równe ± 1 , jest izometrią.

36. Niech σ będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej V . Udowodnić, że następujące zdania są równoważne.

- (a) σ jest izometrią.
- (b) $\sigma^*\sigma = \mathbf{1}_V$.
- (c) Jeśli $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni V to $\{\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_n)\}$ jest także bazą ortonormalną przestrzeni V .
- (d) σ^* jest izometrią.

- 37.** Niech τ będzie endomorfizmem nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej V .
- (a) Udowodnić, że jeśli τ jest monomorfizmem, to $\tau^*\tau$ jest automorfizmem przestrzeni V .
- (b) Udowodnić, że jeśli τ jest epimorfizmem, to $\tau\tau^*$ jest automorfizmem przestrzeni V .
- 38.** Udowodnić, że istnieje liczba rzeczywista dodatnia c taka, że dla każdej pary $\{u, v\}$ wektorów ortonormalnych standardowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ mamy $\|u - v\| = c$.
- 39.** Niech V będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową i niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Pokazać, że $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
- 40.** Niech $n > k$ będą liczbami naturalnymi i niech $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o k wierszach i n kolumnach, której wiersze tworzą układ ortonormalny standardowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Udowodnić, że $(A^T A)^2 = A^T A$.
- 41.** Niech V będzie nieizotropową przestrzenią dwuliniową i niech $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \text{End}(V)$ spełniają $\alpha^* \alpha \beta_1 = \alpha^* \alpha \beta_2$. Udowodnić, że $\alpha \beta_1 = \alpha \beta_2$.
- 42.** Niech V będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową i niech $\tau \in \text{End}(V)$. Pokazać, że jeśli W jest podprzestrzenią τ -niezmienniczą to $W^\perp$ jest τ^* -niezmiennicza.
- 43.** Endomorfizm σ przestrzeni euklidesowej V nazywa się *dodatnio określony* jeśli jest samosprzężony oraz $(\sigma(v), v) > 0$ dla każdego niezerowego $v \in V$.
- (a) Udowodnić, że dodatnio określony endomorfizm przestrzeni euklidesowej V jest automorfizmem V .
- (b) Udowodnić, że endomorfizm τ przestrzeni euklidesowej V jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy gdy odwzorowanie $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ określone następująco: $s(u, v) = (\tau(u), v)$ jest także iloczynem skalarnym na V .
- 44.** Udowodnić, że endomorfizm σ przestrzeni euklidesowej V jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy gdy istnieje automorfizm τ przestrzeni V taki, że $\sigma = \tau^* \tau$.
- 45.** Udowodnić, że endomorfizm samosprzężony σ przestrzeni euklidesowej V jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy gdy każda wartość własna endomorfizmu σ jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

46. Niech u i w będą wektorami nieizotropowymi przestrzeni dwuliniowej V nad ciałem o charakterystyce $\neq 2$. Udowodnić następujące stwierdzenia.

- (a) $\sigma_u^{-1} = \sigma_u$.
- (b) $\sigma_u^{-1} \circ \sigma_w^{-1} \circ \sigma_u \circ \sigma_w = (\sigma_u \circ \sigma_w)^2$.
- (c) $\sigma_u = \sigma_w$ wtedy i tylko wtedy gdy $Ku = Kw$.
- (d) $\sigma_u(x) = x - 2 \cdot \frac{(x, u)}{(u, u)} \cdot u$ dla każdego $x \in V$.
- (e) Dla każdej izometrii τ przestrzeni V mamy $\tau \sigma_u \tau^{-1} = \sigma_{\tau(u)}$.

47. Niech σ będzie izometrią nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej V nad ciałem o charakterystyce $\neq 2$. Udowodnić, że $\sigma^2 = \mathbf{1}_V$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje podprzestrzeń $U < V$ taka, że $\sigma = \sigma|_U$ jest symetrią względem $U^\perp$.

48. Niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej V , $\dim U = k \leq \ell = \dim W$. Udowodnić, że istnieją bazy ortonormalne $\{u_1, \dots, u_k\}$ podprzestrzeni U oraz $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ podprzestrzeni W takie, że $(u_i, w_j) = 0$ dla $i \neq j$ oraz $(u_i, w_i) \geq 0$ dla $i = 1, \dots, k$.

49. Endomorfizm σ przestrzeni euklidesowej V nazywa się endomorfizmem *normalnym* jeśli $\sigma\sigma^* = \sigma^*\sigma$. Udowodnić, że σ jest normalny wtedy i tylko wtedy gdy $\|\sigma(v)\| = \|\sigma^*(v)\|$ dla każdego $v \in V$.

50. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, $V = U \oplus W$ i niech $\pi : V \rightarrow U$ będzie rzutowaniem V na U w kierunku W (to znaczy, $\pi(u + w) = u$ dla $u \in U, w \in W$). Udowodnić, że π jest endomorfizmem samosprzężonym wtedy i tylko wtedy gdy podprzestrzenie U i W są prostopadłe.

51. Niech $\{u_1, \dots, u_k\}$ oraz $\{w_1, \dots, w_k\}$ będą dwoma układami wektorów przestrzeni euklidesowej V . Udowodnić, że istnieje izometria τ przestrzeni V taka, że $\tau(u_i) = w_i$ dla $i = 1, \dots, k$ wtedy i tylko wtedy gdy $(u_i, u_j) = (w_i, w_j)$ dla wszystkich $i, j \leq k$.

52. Pokazać, że każdy endomorfizm przestrzeni euklidesowej można przedstawić w postaci sumy endomorfizmu samosprzężonego i endomorfizmu skośnego.

53. (a) Pokazać, że jedynym endomorfizmem skośnym prostej euklidesowej jest endomorfizm zerowy.

(b) Pokazać, że endomorfizm σ przestrzeni euklidesowej V jest skośny wtedy i tylko wtedy gdy $(v, \sigma(v)) = 0$ dla każdego $v \in V$.

54. Pokazać, że macierz endomorfizmu skośnego płaszczyzny euklidesowej w dowolnej bazie ortonormalnej tej płaszczyzny ma postać $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

55. Pokazać, że dla endomorfizmu skośnego σ parzysto-wymiarowej przestrzeni euklidesowej V istnieje baza ortonormalna przestrzeni V , w której σ ma macierz postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{bmatrix} 0 & -a_k \\ a_k & 0 \end{bmatrix},$$

dla pewnych $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$.

Definicje. *Przestrzeń hermitowska:* przestrzeń wektorowa V nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych z półtoraliniowym odwzorowaniem spełniającym warunek hermitowskiej symetrii: $(u, v) = \overline{(v, u)}$ dla każdych $u, v \in V$.

Przestrzeń unitarna: przestrzeń hermitowska z dodatnio określonym odwzorowaniem półtoraliniowym: $(v, v) > 0$ dla $v \in V, v \neq 0$. Wtedy $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

56. (a) Sprawdzić, że w przestrzeni euklidesowej dwa wektory u, v są ortogonalne wtedy i tylko wtedy gdy $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(b) Sprawdzić, że (a) staje się fałszywe jeśli przestrzeń euklidesową zamienimy na przestrzeń unitarną.

(c) Udowodnić, że dwa wektory u, v przestrzeni unitarnej są ortogonalne wtedy i tylko wtedy gdy $\|au + bv\|^2 = \|au\|^2 + \|bv\|^2$ dla wszystkich par skalarów a, b .

57. (a) Sprawdzić, że w przestrzeni euklidesowej dla każdych wektorów u, v zachodzi równość

$$4(u, v) = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2.$$

(b) Sprawdzić, że w przestrzeni unitarnej dla każdych wektorów u, v zachodzi równość

$$4(u, v) = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2.$$

58. Niech τ będzie endomorfizmem nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej V lub nieosobliwej przestrzeni hermitowskiej V .

(a) Udowodnić, że jeśli $(\tau(v), w) = 0$ dla wszystkich $v, w \in V$, to $\tau = 0_V$.

(b) Jeśli V jest nieosobliwą przestrzenią hermitowską i $(\tau(v), v) = 0$ dla wszystkich $v \in V$, to $\tau = 0_V$.

(c) Pokazać, że stwierdzenie (b) jest fałszywe jeśli V jest przestrzenią euklidesową.

59. Niech $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zauważyć, że na podstawie nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

(b) Udowodnić silniejszą nierówność

$$(|x_1 y_1| + \dots + |x_n y_n|)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

60. Niech S będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarnej V . Niech $\{u_1, \dots, u_k\}$ będzie bazą ortonormalną S i dla $v \in V$ niech

$$\hat{v} = (v, u_1)u_1 + \dots + (v, u_k)u_k.$$

(a) Udowodnić, że jeśli $S = V$, to $\hat{v} = v$ dla każdego $v \in V$.

(b) Jeśli $S \neq V$ udowodnić, że dla każdego $v \in V$ mamy $v - \hat{v} \in S^\perp$.

(c) Udowodnić, że $V = S \oplus S^\perp$.

61. W oznaczeniach zadania **60** udowodnić, że następujące stwierdzenia są równoważne.

(a) $S = V$.

(b) $\hat{v} = v$ dla każdego $v \in V$.

(c) $\|\hat{v}\| = \|v\|$ dla każdego $v \in V$.

(d) Dla każdych $v, w \in V$ zachodzi

$$(v, w) = (v, u_1)(u_1, w) + \dots + (v, u_k)(u_k, w).$$

Definicje. Endomorfizm τ przestrzeni unitarnej nazywa się

- (a) *normalny*, jeśli jest przemienny ze swoim endomorfizmem sprzężonym: $\tau\tau^* = \tau^*\tau$,
- (b) *skośny*, jeśli $\tau^* = -\tau$,
- (c) *unitarny*, jeśli $\tau^*\tau = \tau\tau^* = \mathbf{1}$.

62. Niech σ będzie endomorfizmem skośnym przestrzeni unitarnej V . Udowodnić, że wartości własne endomorfizmu σ są *czysto urojone* (tzn. należą do $i\mathbb{R}$).

63. Endomorfizm samosprzężony σ przestrzeni unitarnej V nazywa się *dodatni* jeśli $(\sigma(u), u) \geq 0$ dla każdego $u \in V$ i nazywa się *ściśle dodatni* jeśli $(\sigma(u), u) > 0$ dla każdego niezerowego $u \in V$.

Piszemy wtedy $\sigma \geq 0$ i odpowiednio $\sigma > 0$. Udowodnić następujące stwierdzenia.

- (a) Jeśli $\sigma = \tau^2$ i τ jest samosprzężony, to $\sigma \geq 0$.
- (b) Jeśli $\sigma = \tau^*\tau$ gdzie τ jest dowolnym endomorfizmem V , to $\sigma \geq 0$.
- (c) Jeśli $\sigma \geq 0$ i σ jest odwracalny, to $\sigma^{-1} \geq 0$.
- (d) $\sigma \geq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy σ jest samosprzężony i wszystkie wartości własne endomorfizmu σ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi.

64. Niech V będzie przestrzenią unitarną oraz $u, v \in V$. Udowodnić, że $(u, v) > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dodatni endomorfizm σ przestrzeni V taki, że $\sigma(u) = v$.

65. Niech σ będzie ściśle dodatnim endomorfizmem przestrzeni unitarnej V .

Udowodnić, że jeśli τ jest endomorfizmem samosprzężonym, to endomorfizm $\sigma + i\tau$ jest nieosobliwy.

66. Niech σ i τ będą endomorfizmami samosprzężonymi przestrzeni unitarnej V .

Udowodnić następujące stwierdzenia:

- (a) Jeśli $\sigma \geq 0$ oraz $(\sigma(u), u) = 0$, to $\sigma(u) = 0$.
- (b) Jeśli $\sigma \geq 0$, $\tau \geq 0$ i $\sigma\tau = \tau\sigma$, to $\sigma\tau \geq 0$.
- (c) Jeśli $\sigma \geq 0$ i $\sigma^2\tau = \tau\sigma^2$, to $\sigma\tau = \tau\sigma$.
- (d) Udowodnić (c) bez założenia, że τ jest samosprzężony.

67. Udowodnić, że

- (a) Endomorfizm normalny jest skośny wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jego wartości własne są czysto urojone (to znaczy, należą do $i\mathbb{R}$).
- (b) Endomorfizm normalny jest unitarny wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jego wartości własne mają wartość bezwzględną równą 1.

68. Niech τ będzie endomorfizmem normalnym przestrzeni unitarnej V i niech σ będzie dowolnym endomorfizmem przestrzeni V . Udowodnić, że jeśli $\tau\sigma = 0$, to także $\tau^*\sigma = 0$.

69. Niech $\tau_1, \dots, \tau_\ell$ będą endomorfizmami przestrzeni unitarnej V . Udowodnić, że

$$\operatorname{tr}\left(\sum \tau_i^* \tau_i\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \dots = \tau_\ell = 0.$$

70. Udowodnić, że

- (a) Każdy endomorfizm normalny jest kwadratem pewnego endomorfizmu normalnego.
- (b) Każdy endomorfizm unitarny jest kwadratem pewnego endomorfizmu unitarnego.

71. Udowodnić, że jeśli τ jest endomorfizmem normalnym, to $\ker \tau = \ker \tau^*$.

72. Udowodnić, że jeśli endomorfizm τ przestrzeni unitarnej jest przemienny z $\tau^*\tau$, lub jest przemienny z $\tau^*\tau - \tau\tau^*$, to τ jest normalny.

W zadaniach **73** – **79** zakładamy, że τ jest endomorfizmem przestrzeni unitarnej V .

73. Niech τ będzie endomorfizmem normalnym, $v \in V$ i $k \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że

(a) $\tau(v) = 0 \Rightarrow \tau^*(v) = 0$,

(b) $\tau^k(v) = 0 \Rightarrow \tau(v) = 0$.

(c) Wielomian minimalny endomorfizmu τ nie ma pierwiastków wielokrotnych.

74. Sprawdzić, że jeśli $\|\tau(v)\| = \|\tau^*(v)\|$ dla każdego $v \in V$, to τ jest endomorfizmem normalnym.

75. Udowodnić, że endomorfizm τ przestrzeni unitarnej jest normalny wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej podprzestrzeni τ –niezmienniczej U także podprzestrzeń $U^\perp$ jest τ –niezmiennicza.

76. Niech τ będzie endomorfizmem normalnym.

(a) Jeśli τ jest idempotentny, to τ jest samosprężony.

(b) Jeśli τ jest nilpotentny, to $\tau = 0$.

(c) Jeśli $\tau^2 = \tau^3$, to τ jest idempotentny.

77. Niech τ będzie endomorfizmem idempotentnym przestrzeni unitarnej. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.

(a) τ jest normalny.

(b) τ jest samosprężony.

(c) $\ker \tau = (\operatorname{im} \tau)^\perp$.

78. Niech τ będzie endomorfizmem normalnym. Udowodnić, że jeśli dla endomorfizmu σ każda podprzestrzeń τ –niezmiennicza jest także σ –niezmiennicza, to $\sigma\tau = \tau\sigma$.

79. Niech τ będzie endomorfizmem normalnym. Udowodnić, że $\ker \tau \cap \operatorname{im} \tau = 0$.

80. Niech τ będzie endomorfizmem diagonalizowalnym przestrzeni wektorowej V nad dowolnym ciałem K . Udowodnić, że macierz diagonalna endomorfizmu τ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do porządku elementów na głównej przekątnej.

81. Niech τ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej V .

Udowodnić, że jeśli $\tau^*\tau = 0_V$, to $\tau = 0_V$.

82. Niech τ będzie endomorfizmem standardowej przestrzeni unitarnej $V = \mathbb{C}^3$, który w bazie standardowej ma macierz

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Udowodnić, że τ jest endomorfizmem normalnym.

(b) Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{C}^3$ złożoną z wektorów własnych endomorfizmu τ .

83. Niech σ, τ będą endomorfizmami normalnymi przestrzeni unitarnej V . Udowodnić, że jeśli $\sigma\tau = \tau\sigma$, to dla każdych $a, b \in \mathbb{C}$ endomorfizm $a\sigma + b\tau$ jest normalny.

84. Niech $V = \mathbb{C}^2$ będzie standardową przestrzenią unitarną z bazą standardową $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$. Niech σ i τ będą endomorfizmami V takimi, że

$$\sigma(e_1) = e_1, \quad \sigma(e_2) = ie_2, \quad \tau(e_1 + e_2) = e_1 + e_2, \quad \tau(e_1 - e_2) = 2(e_1 - e_2).$$

(a) Udowodnić, że σ i τ są endomorfizmami normalnymi.

(b) Udowodnić, że $\sigma + 2\tau$ nie jest endomorfizmem normalnym.