

### Zadania z Algebry liniowej 3

semestr zimowy 2008/2009

1. Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$  i niech  $0 \in K$  oraz  $\theta \in V$  będą elementem zerowym ciała  $K$  i wektorem zerowym przestrzeni  $V$ . Posługując się aksjomatami przestrzeni wektorowej udowodnić, że dla każdego skalaru  $a \in K$  i każdego wektora  $v \in V$  mamy

- (a)  $a\theta = \theta$ ,
- (b)  $0v = \theta$ ,
- (c)  $(-a)v = -(av)$ ,
- (d) Jeśli  $v \neq \theta$  i  $av = \theta$ , to  $a = 0$ .

*Uwaga.* W dalszym ciągu zawsze używamy tego samego symbolu  $0$  zarówno dla zera ciała  $K$  jak i dla wektora zerowego przestrzeni  $V$ .

2. Dla podzbioru  $S$  przestrzeni wektorowej  $V$  symbolem  $\text{lin}(S)$  oznaczamy podprzestrzeń przestrzeni  $V$  rozpiętą na zbiorze  $S$ . Udowodnić, że dla podzbiorów  $S, T \subset V$  przestrzeni wektorowej  $V$  zachodzi:

- (a)  $S \subset T \Rightarrow \text{lin}(S) \subset \text{lin}(T)$ .
- (b)  $\text{lin}(S \cup T) = \text{lin}(S) + \text{lin}(T)$ .
- (c)  $\text{lin}(\text{lin}(S)) = \text{lin}(S)$ .

3. Niech  $V$  będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$ . Udowodnić następujące stwierdzenia.

- (a) Jeśli  $\tau : V \rightarrow V$  jest monomorfizmem, to  $\tau$  jest izomorfizmem.
- (b) Jeśli  $\tau : V \rightarrow V$  jest epimorfizmem, to  $\tau$  jest izomorfizmem.

4. Niech  $U$  i  $V$  będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem  $K$ . Niech  $\{u_1, \dots, u_n\}$  będzie bazą  $U$  i niech  $v_1, \dots, v_n$  będzie układem  $n$  (niekoniecznie różnych) wektorów przestrzeni  $V$ .

- (a) Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $f : U \rightarrow V$  taki, że  $f(u_i) = v_i$  dla  $i = 1, \dots, n$ .
- (b) Udowodnić, że  $f$  jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy  $\{v_1, \dots, v_n\}$  jest bazą  $V$ .
- (c) Udowodnić, że  $U \cong V$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\dim U = \dim V$ .

5. Niech  $S$  i  $T$  będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $K$ .

- (a) Jeśli  $\dim S = \dim V$ , udowodnić, że  $S = V$ .
- (b) Jeśli  $\dim V = n$  i  $\{v_1, \dots, v_r\}$  jest bazą  $S$ , udowodnić, że istnieje układ wektorów  $v_{r+1}, \dots, v_n$  przestrzeni  $V$  taki, że  $\{v_1, \dots, v_n\}$  jest bazą przestrzeni  $V$ .
- (c) Jeśli  $V = S \oplus T$  oraz  $\{v_1, \dots, v_r\}$  i  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  są bazami odpowiednio  $S$  i  $T$ , to udowodnić, że  $\{v_1, \dots, v_n\}$  jest bazą przestrzeni  $V$ .

6. (a) Jeśli  $V$  jest przestrzenią skończenie wymiarową i  $W$  jest dowolną podprzestrzenią przestrzeni  $V$ , dowieść, że istnieje podprzestrzeń  $U$  przestrzeni  $V$  taka, że  $V = W \oplus U$ .

(b) Niech  $V = \mathbb{R}^2$  będzie dwuwymiarową przestrzenią wektorową (płaszczyzną) nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Niech  $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$  będzie przeliczalną rodziną jednowymiarowych podprzestrzeni (prostych na płaszczyźnie)  $V$ . Udowodnić, że istnieje prosta  $U$  na płaszczyźnie  $V$  taka, że  $V = W_n \oplus U$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

(c) Niech  $V = \mathbb{R}^3$  będzie trójwymiarową przestrzenią wektorową nad  $\mathbb{R}$  i niech  $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$  będzie przeliczalną rodziną podprzestrzeni  $V$  takich, że  $\dim W_n = 1$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  lub  $\dim W_n = 2$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ . Udowodnić, że istnieje podprzestrzeń  $U$  przestrzeni  $V$  taka, że  $V = W_n \oplus U$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ .

7. Udowodnić, że jeśli  $\dim V = n < \infty$ , to  $\dim \operatorname{Hom}(V, V) = n^2$ .

8. Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$ . Niech  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  będzie bazą  $V$  i niech  $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$  będzie skończonym zbiorem wektorów przestrzeni  $V$ . Załóżmy, że

$$w_i = p_{i1}v_1 + \dots + p_{in}v_n, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{gdzie } p_{ij} \in K.$$

Macierz  $P := [p_{ij}]$  nazywa się *macierzą przejścia* od bazy  $\mathcal{B}$  do zbioru  $\mathcal{B}'$ .

(a) Udowodnić, że zbiór  $\mathcal{B}'$  jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy  $\operatorname{rank} P = m$ .

(b) Jeśli  $m = n$ , udowodnić, że macierz przejścia  $P$  jest nieosobliwa ( $\det P \neq 0$ ) wtedy i tylko wtedy gdy  $\mathcal{B}'$  jest bazą przestrzeni  $V$ .

9\*. <sup>1</sup> Niech  $V$  będzie  $n$ -wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$  i niech  $\{v_1, \dots, v_n\}$  będzie bazą przestrzeni  $V$ . Niech  $K^n$  będzie przestrzenią wektorową, której wektorami są  $n$ -elementowe układy elementów ciała  $K$  a dodawanie wektorów i mnożenie wektorów przez skalary  $a \in K$  określone są następująco:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n).$$

Udowodnić, że odwzorowanie

$$V \rightarrow K^n, \quad x_1v_1 + \dots + x_nv_n \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych.

Zauważyć, że izomorfizm ten wektorowi  $v = \sum x_i v_i \in V$  przyporządkowuje wektor współrzędnych  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ . Dlatego przestrzeń  $K^n$  nazywa się *przestrzenią współrzędnych* przestrzeni  $V$ , lub krótko *przestrzenią współrzędnych*.

10\*. Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem. Rozpatrzmy układ  $m$  równań liniowych o  $n$  niewiadomych z macierzą  $A = [a_{ij}]$ :

$$a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1}$$

gdzie  $a_{ij}, b_i \in K$ . Twierdzenie Kroneckera-Capelliego orzeka, że układ (1) ma rozwiązanie  $x_1, \dots, x_n \in K$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} (A, \mathbf{b})$ , gdzie  $\mathbf{b}$  jest jednokolumnową macierzą o elementach  $b_1, \dots, b_m$ .

(a) Jeśli  $n = m$  i  $\det A \neq 0$ , udowodnić, że układ (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie  $x_1, \dots, x_n$  w ciele  $K$ .

(b) Jeśli  $n \geq m$  i  $\operatorname{rank} A = m$ , udowodnić, że układ (1) ma rozwiązanie.

(c) (Rozwiązalność układów jednorodnych). Jeśli  $b_1 = \dots = b_m = 0$  i  $n = m$ , udowodnić, że układ (1) ma rozwiązanie  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$  w ciele  $K$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\det A = 0$ .

(d) (Rozwiązalność układów jednorodnych). Jeśli  $b_1 = \dots = b_m = 0$  i  $n > m$ , udowodnić, że układ (1) ma *niezerowe* rozwiązanie w ciele  $K$ .

(e) (Przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego). Jeśli  $b_1 = \dots = b_m = 0$ , udowodnić, że rozwiązania  $(x_1, \dots, x_n)$  układu (1) tworzą podprzestrzeń wektorową  $S$  przestrzeni współrzędnych  $K^n$ . Udowodnić, że  $\dim S = n - \operatorname{rank} A$ .

---

<sup>1</sup>Zadania oznaczone gwiazdką należy uważnie przeczytać i rozwiązać, jeśli Czytelnik spotyka się z nimi po raz pierwszy.

**11.** Niech  $\{M_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$ , będzie bazą standardową algebry macierzy  $M_n(K)$ .  
 (a) Jeśli  $M = [a_{ij}] \in M_n(K)$ , pokazać, że  $M = \sum_{i,j} a_{ij} M_{ij}$ .  
 (b) Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem i niech  $n > 1$ . Dla macierzy  $M = M_{11} + M_{12}$  i macierzy transponowanej  $M^t = M_{11} + M_{21}$ , pokazać, że  $MM^t \neq M^tM$ .  
 (c) Jeśli  $A$  jest  $m$ -wymiarową  $K$ -algebrą i  $\{a_1, \dots, a_m\}$  jest bazą  $A$  pokazać, że macierze  $a_k M_{ij}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , tworzą bazę  $K$ -algebry macierzy  $M_n(A)$ . Wywnioskować stąd, że  $\dim_K M_n(A) = n^2 \dim_K A$ .

**12\*.** Niech  $h : A \rightarrow B$  będzie izomorfizmem  $K$ -algebr. Sprawdzić następujące fakty.

- (a)  $h(Z(A)) = Z(B)$ .
- (b)  $h(U(A)) \subseteq U(B)$ .
- (c) Jeśli  $\mathcal{I}$  jest ideałem w  $A$ , to  $h(\mathcal{I})$  jest ideałem w  $B$ .
- (d) Algebra  $A$  jest centralna (prosta, z dzieleniem) wtedy i tylko wtedy, gdy  $B$  jest centralna (prosta, z dzieleniem).

**13.** Niech  $A$  będzie  $K$ -algebrą i niech  $a, b \in A$ . Jeśli  $1_A - ab$  jest elementem odwracalnym w  $A$ , udowodnić, że także  $1_A - ba$  jest elementem odwracalnym.

*Wskazówka.* Rozpatrzeć element  $1_A + b(1 - ab)^{-1}a$ .

**14.** Niech  $A$  będzie  $K$ -algebrą.

- (a) Pokazać, że  $K1_A$  jest ciałem izomorficznym z  $K$ .
- (b) Pokazać, że  $Z(A)$  jest przemienną podalgebrą algebry  $A$ .
- (c) Jeśli  $A$  jest algebrą z dzieleniem, pokazać, że  $Z(A)$  jest podciałem algebry  $A$ .
- (d) Niech  $A = M_2(\mathbb{R})$  będzie 4-wymiarową algebrą macierzy nad  $\mathbb{R}$ . Pokazać, że  $L = \{aM_{11} + bM_{12} - bM_{21} + aM_{22} : a, b \in \mathbb{R}\} \subset A$  jest podciałem algebry  $A$  oraz że  $L$  jest rozszerzeniem kwadratowym centrum  $Z(A)$ .

**15.** Udowodnić, że jeśli  $\dim_K V > 1$ , to algebra endomorfizmów  $\text{End}_K V$  jest nieprzemien-  
na.

**16.** Pokazać, że każdy z następujących wielomianów stopnia 2 ma *nieskończenie wiele* zer w algebrze kwaternionów Hamiltona  $\mathbb{H}$ . Znaleźć wszystkie zera tych wielomianów w  $\mathbb{H}$ .

- (a)  $X^2 + 1$ .
- (b)  $X^2 + aX + b1$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ .

**17.** Rozwiązać następujące układy równań liniowych w algebrze  $\mathbb{H}$ .

- (a)  $iX + jY = 1, \quad kX - Y = 0$ .
- (b)  $Xi + Yj = 1, \quad Xk - Y = 0$ .

**18.** Niech  $M = \begin{bmatrix} i & j \\ k & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{H})$ .

- (a) Sprawdzić, że macierz  $M$  jest odwracalna w algebrze macierzy  $M_2(\mathbb{H})$ .
- (b) Czy macierz transponowana  $M^t$  jest odwracalna w  $M_2(\mathbb{H})$ ?

**19.** Niech  $V$  będzie dowolną (niekoniecznie skończenie wymiarową) przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$ . Niech  $\tau \in \text{End}_K V$  będzie endomorfizmem jednoznacznie lewostronnie odwracalnym (to znaczy, istnieje dokładnie jeden endomorfizm  $\sigma \in \text{End}_K V$  taki, że  $\sigma\tau = 1_V$ ). Udowodnić, że  $\tau$  jest endomorfizmem odwracalnym.

**20.** Niech  $\dim_K V = n$  i niech  $\{v_1, \dots, v_n\}$  będzie bazą przestrzeni  $V$ . Dla każdej pary liczb naturalnych  $i, j$  niewiększych od  $n$  obieramy endomorfizm  $\tau_{ij}$  przestrzeni  $V$  taki, że

$$\tau_{ij}(v_k) = \delta_{jk}v_i, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdzie  $\delta_{kj}$  jest "delta Kroneckera,"  $\delta_{kj} = 1$  gdy  $k = j$  oraz  $\delta_{kj} = 0$  gdy  $k \neq j$ .

(a) Pokazać, że endomorfizmy  $\tau_{ij}$  tworzą bazę  $K$ -algebry  $\text{End}_K V$ .

(b) Sprawdzić następującą tabelę mnożenia dla tej bazy:

$$\tau_{ij}\tau_{jl} = \tau_{il}, \quad \tau_{ij}\tau_{kl} = 0_V \quad \text{gdy } j \neq k.$$

(c) Pokazać, że jeśli endomorfizm  $\sigma$  przestrzeni  $V$  jest przemienny z każdym endomorfizmem  $\tau_{ij}$ , to  $\sigma = a(\tau_{11} + \dots + \tau_{nn}) = a\mathbf{1}_V$ , dla pewnego  $a \in K$ .

(d) Udowodnić, że centrum  $Z(\text{End}_K V)$  algebry endomorfizmów składa się ze skalarnych wielokrotności endomorfizmu tożsamościowego  $\mathbf{1}_V$ :

$$Z(\text{End}_K V) = K\mathbf{1}_V.$$

**21.** Niech  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , gdzie  $n = 2m$ , będzie bazą przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $K$  i niech  $\tau$  będzie endomorfizmem przestrzeni  $V$  działającym na bazie  $\mathcal{B}$  następująco:

$$\tau(v_{2i-1}) = -v_{2i}, \quad \tau(v_{2i}) = v_{2i-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Znaleźć wielomian minimalny  $p_\tau$  endomorfizmu  $\tau$  gdy

$$1. K = \mathbb{R}, \quad 2. K = \mathbb{F}_5, \quad 3. K = \mathbb{F}_2.$$

**22.** Niech  $A$  będzie macierzą endomorfizmu  $\tau$  przestrzeni  $n$ -wymiarowej  $V$  w dowolnej bazie tej przestrzeni. Udowodnić, że  $A \in M_n(K)$  oraz  $\tau \in \text{End}_K V$  mają ten sam wielomian minimalny:  $p_A = p_\tau$ .

**23.** Udowodnić, że każdy endomorfizm przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem o charakterystyce  $\neq 2$  można przedstawić w postaci sumy endomorfizmów odwracalnych.

**24.** Niech  $\tau$  będzie endomorfizmem przestrzeni wektorowej  $V$  i niech  $A$  będzie macierzą  $\tau$  w pewnej bazie przestrzeni  $V$ . Nie wykorzystując pojęcia wyznacznika macierzy udowodnić dwa następujące stwierdzenia.

(a) Jeśli macierz  $A$  ma kolumnę lub wiersz złożony z zer, to  $\tau$  nie jest odwracalny.

(b) Jeśli macierz  $A$  ma dwie kolumny lub dwa wiersze proporcjonalne, to  $\tau$  nie jest odwracalny.

**25.** Pokazać, że jeśli macierze rzeczywiste  $A$  i  $B$  są podobne nad ciałem liczb zespolonych, to są także podobne nad ciałem liczb rzeczywistych.

**26\*.** Podajemy szkic dowodu twierdzenia, że nie istnieje trójwymiarowa algebra z dzieleniem nad ciałem  $\mathbb{R}$  liczb rzeczywistych.

Przypuśćmy, że istnieje taka  $\mathbb{R}$ -algebra  $D$ .

(a) Pokazać, że  $Z(D) = \mathbb{R}\mathbf{1}_D$ .

Zauważyć, że centrum  $D$  jest ciałem izomorficznym z  $\mathbb{R}$ . Można zatem identyfikować centrum  $D$  z  $\mathbb{R}$  (sprowadza się to do identyfikacji  $\mathbf{1}_D = 1 \in \mathbb{R}$ ).

Udowodnić, że  $\mathbb{R}$  jest jedynym podciałem  $D$  zawierającym  $Z(D)$ .

(b) Dla każdego  $x \in D$  pokazać, że elementy  $1, x, x^2$  są liniowo zależne nad  $\mathbb{R}$ .

(c) Pokazać, że istnieje element  $x \in D$  taki, że  $x^2 = a$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  oraz  $x \notin \mathbb{R}$ .

Jeśli  $a > 0$ , pokazać, że  $D$  ma dzielniki zera wbrew założeniu, że jest algebrą z dzieleniem. Jeśli  $a < 0$ , pokazać, że  $D$  ma podciało zawierające  $Z(D)$  izomorficzne z ciałem  $\mathbb{C}$  liczb zespolonych, wbrew (a).

(d) Wywnioskować, że nie istnieje 3-wymiarowa algebra z dzieleniem nad ciałem  $\mathbb{R}$  liczb rzeczywistych.

**27.** Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową z bazą  $\{v_1, \dots, v_n\}$  i niech  $\tau$  będzie endomorfizmem przestrzeni  $V$  takim, że

$$\tau(v_1) = v_2, \quad \tau(v_2) = v_3, \dots, \tau(v_{n-1}) = v_n, \quad \tau(v_n) = -a_n v_1 - a_{n-1} v_2 - \dots - a_1 v_n.$$

(a) Udowodnić, że  $f(\tau) = 0 \in \text{End}_K V$  dla wielomianu

$$f = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in K[X].$$

(b) Udowodnić, że  $f$  jest wielomianem minimalnym endomorfizmu  $\tau$ .

**28.** Niech  $\tau \in \text{End}_K V$ . Udowodnić, że jeśli  $(X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_k)^{m_k}$  jest wielomianem minimalnym endomorfizmu  $\tau$ , to  $(X - aa_1)^{m_1} \dots (X - aa_k)^{m_k}$  jest wielomianem minimalnym endomorfizmu  $a\tau$ .

**29.** Udowodnić, że jeśli  $\tau$  jest idempotentnym endomorfizmem przestrzeni  $V$ , to znaczy jeśli  $\tau^2 = \tau$ , to istnieją podprzestrzenie  $U$  i  $W$  przestrzeni  $V$  takie, że

(a)  $V = U \oplus W$ ,

(b)  $\tau(u) = 0$  dla  $u \in U$ ,

(c)  $\tau(w) = w$  dla  $w \in W$ .

**30.** Niech  $V$  będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$  o charakterystyce  $\neq 2$ . Załóżmy, że endomorfizm  $\tau$  przestrzeni  $V$  spełnia tożsamość  $\tau^3 = \tau$ . Udowodnić, że istnieją podprzestrzenie  $U$ ,  $W$ ,  $Z$  przestrzeni  $V$  takie, że

(a)  $V = U \oplus W \oplus Z$ , (b)  $\tau(u) = 0$  dla  $u \in U$ ,

(c)  $\tau(w) = w$  dla  $w \in W$ , (d)  $\tau(z) = -z$  dla  $z \in Z$ .

**31.** Endomorfizm  $\nu$  przestrzeni  $V$  nazywa się *nilpotentnym*, jeśli istnieje liczba naturalna  $m$  taka, że  $\nu^m = 0_V$ . Pokazać, że endomorfizm nilpotentny ma wektory własne i ma tylko jedną wartość własną  $a = 0$ .

**32.** Udowodnić, że jeśli  $\nu$  jest endomorfizmem nilpotentnym oraz  $f \in K[X]$  jest dowolnym wielomianem takim, że  $f(0) \neq 0$ , to endomorfizm  $f(\nu)$  jest odwracalny.

**33.** Udowodnić, że endomorfizm nilpotentny  $\nu$  przestrzeni  $n$ -wymiarowej spełnia  $\nu^n = 0_V$ .

**34.** Niech  $\sigma, \tau \in \text{End}_K V$ . Niech  $0 \neq v \in V$  będzie wektorem własnym endomorfizmu  $\tau$  należącym do wartości własnej  $a \in K$ . Udowodnić, że jeśli endomorfizmy  $\sigma$  i  $\tau$  są przemienne oraz  $\sigma(v) \neq 0$ , to  $\sigma(v)$  jest także wektorem własnym endomorfizmu  $\tau$  należącym do wartości własnej  $a$ .

**35.** Niech  $\sigma, \tau \in \text{End}_K V$ . Udowodnić, że endomorfizmy  $\sigma$  i  $\tau$  są odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy endomorfizmy  $\sigma\tau$  i  $\tau\sigma$  są odwracalne.

**36.** Niech  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \text{End}_K V$ . Udowodnić, że jeśli endomorfizmy  $\alpha + \beta$  i  $\alpha - \beta$  są odwracalne, to istnieją endomorfizmy  $\sigma, \tau \in \text{End}_K V$  takie, że

$$\alpha\sigma + \beta\tau = \gamma, \quad \beta\sigma + \alpha\tau = \delta.$$

**37.** Niech  $\sigma$  i  $\tau$  będą endomorfizmami przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $\mathbb{C}$  liczb zespolonych. Udowodnić, że jeśli  $\sigma^2 = \tau^2 = \mathbf{1}_V$ , to przestrzeń  $V$  zawiera podprzestrzeń  $U$  o wymiarze 1 lub 2, która jest podprzestrzenią niezmienniczą obydwu endomorfizmów  $\sigma$  i  $\tau$ .

*Wskazówka.* Rozpatrzeć wektor własny  $u$  endomorfizmu  $\rho := \sigma - \tau$  oraz podprzestrzeń  $U := \text{lin}(u, \sigma(u))$ .

**38.** Niech  $\tau \in \text{End}_K V$  spełnia  $\tau^m = \mathbf{1}_V$  dla pewnej liczby naturalnej  $m$ .

- (a) Udowodnić, że jeśli  $K$  jest ciałem algebraicznie domkniętym o charakterystyce zero to  $\tau$  jest diagonalizowalny (to znaczy ma macierz diagonalną w pewnej bazie przestrzeni  $V$ ).  
 (b) Niech  $K = \mathbb{R}$  i niech  $m$  będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że  $\tau^m = \mathbf{1}_V$ . Udowodnić, że  $\tau$  jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy gdy  $m \leq 2$ .

**39.** Niech  $\tau$  będzie endomorfizmem diagonalizowalnym przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Udowodnić, że jeśli  $\tau^m = \mathbf{1}_V$  dla pewnej liczby naturalnej  $m$ , to także  $\tau^2 = \mathbf{1}_V$ .

**40.** Pokazać, że jeśli  $a^2$  jest wartością własną endomorfizmu  $\tau^2$  to  $a$  lub  $-a$  jest wartością własną endomorfizmu  $\tau$ .

**41.** Niech  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  będzie bazą przestrzeni  $V$  nad ciałem  $K$  o charakterystyce  $\neq 2$  i niech  $\tau$  będzie endomorfizmem przestrzeni  $V$  takim, że

$$\tau(v_1) = v_2, \quad \tau(v_2) = v_3, \quad \tau(v_3) = -v_2 - 2v_3.$$

- (a) Znaleźć wielomian minimalny  $p_\tau$  oraz wszystkie wartości własne endomorfizmu  $\tau$ .  
 (b) Dla każdej wartości własnej  $a$  endomorfizmu  $\tau$  znaleźć bazę podprzestrzeni  $U_a = \{v \in V : \tau(v) = av\}$  wektorów własnych endomorfizmu  $\tau$  należących do wartości własnej  $a$ .

**42.** Niech  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  będzie bazą przestrzeni  $V$  nad ciałem  $K$  o charakterystyce  $\neq 2$  i niech  $\tau$  będzie endomorfizmem przestrzeni  $V$  takim, że

$$\tau(v_1) = v_2, \quad \tau(v_2) = v_3, \quad \tau(v_3) = -v_2 - 2v_3.$$

- (a) Udowodnić, że istnieją nietrywialne podprzestrzenie  $\tau$ -niezmiennicze  $V_1, V_2$  takie, że  $V = V_1 \oplus V_2$ .  
 (b) Znaleźć bazy podprzestrzeni  $V_1, V_2$ .

**43.** Niech  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  będzie bazą przestrzeni  $V$  nad ciałem  $K$  o charakterystyce  $\neq 2$  i niech  $\tau$  będzie endomorfizmem przestrzeni  $V$  takim, że

$$\tau(v_1) = v_2, \quad \tau(v_2) = v_3, \quad \tau(v_3) = v_4, \quad \tau(v_4) = -v_1 + 2v_3.$$

- (a) Znaleźć wielomian minimalny  $p_\tau$  oraz wszystkie wartości własne endomorfizmu  $\tau$ .  
 (b) Dla każdej wartości własnej  $a$  endomorfizmu  $\tau$  znaleźć bazę podprzestrzeni  $U_a = \{v \in V : \tau(v) = av\}$  wektorów własnych endomorfizmu  $\tau$  należących do wartości własnej  $a$ .

**44.** Niech  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  będzie bazą przestrzeni  $V$  nad ciałem  $K$  o charakterystyce  $\neq 2$  i niech  $\tau$  będzie endomorfizmem przestrzeni  $V$  takim, że

$$\tau(v_1) = v_2, \quad \tau(v_2) = v_3, \quad \tau(v_3) = v_4, \quad \tau(v_4) = -v_1 + 2v_3.$$

- (a) Udowodnić, że istnieją nietrywialne podprzestrzenie  $\tau$ -niezmiennicze  $V_1, V_2$  takie, że  $V = V_1 \oplus V_2$ .  
 (b) Znaleźć bazy podprzestrzeni  $V_1, V_2$ .

**45.** Niech  $A, B \in M_n(K)$  będą macierzami idempotentnymi ( $A^2 = A$  oraz  $B^2 = B$ ). Udowodnić, że macierze  $A$  i  $B$  są podobne wtedy i tylko wtedy gdy mają równe rzędy.

**46.** Pokazać, że macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna nad ciałem liczb zespolonych, ale nie jest diagonalizowalna nad ciałem liczb rzeczywistych.

- 47.** Niech  $\tau \in \text{End}_K V$  i niech  $f, g \in K[X]$  będą dowolnymi wielomianami. Udowodnić, że
- (a) Jeśli  $f \mid g$ , to  $\ker f(\tau) \subseteq \ker g(\tau)$ .
  - (b) Jeśli  $\text{NWD}(f, g) = 1$ , to  $\ker f(\tau) \cap \ker g(\tau) = 0$ .

**48.** Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

będą macierzami nad dowolnym ciałem  $K$ .

- (a) Pokazać, że macierz  $A$  jest nilpotentna i znaleźć jej ciąg niezmienników i postać Jordana.
- (b) Pokazać, że macierze  $A$  i  $B$  nie są podobne.

**49.** (a) Sprawdzić, że każda z następujących macierzy jest nilpotentna:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Dla każdej z macierzy punktu (a) znaleźć jej postać kanoniczną Jordana.

**50.** Dla każdej z macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

znaleźć jej wielomian minimalny i postać kanoniczną Jordana.

**51.** Wyznaczyć wszystkie możliwe postaci Jordana macierzy w  $M_8(K)$ , których wielomianem minimalnym jest  $p = X^2(X - 1)^3$ .

**52.** Niech  $K$  będzie ciałem o charakterystyce  $\neq 2$ . Wyznaczyć wszystkie możliwe postaci Jordana macierzy w  $M_{10}(K)$ , których wielomianem minimalnym jest

$$p = X^2(X - 1)^2(X + 1)^3.$$

**53.** Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

będą macierzami stopnia  $n$  nad dowolnym ciałem  $K$ .

- (a) Znaleźć wielomiany minimalne macierzy  $A$  i  $B$ .
- (b) Udowodnić, że jeśli  $\text{char } K = 0$  lub  $\text{char } K = p \neq 0$  i  $p \nmid n$ , to macierze  $A$  i  $B$  są podobne.

**54.** Niech  $V$  będzie 10-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{Q}$  liczb wymiernych. Udowodnić, że każde dwa endomorfizmy przestrzeni  $V$ , których wielomian minimalny jest równy

$$(X^2 + 1)^2 \cdot (X^3 + 2X + 2)$$

są podobne.

**55.** Niech  $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$  będzie macierzą trójkątną. Udowodnić, że

$$A^n = 0 \iff a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0.$$

**56.** Niech  $\tau \in \text{End}_K V$  gdzie  $\dim_K V = 2$ . Niech  $\mathcal{B}$  będzie bazą  $V$  i niech  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  będzie macierzą endomorfizmu  $\tau$  w bazie  $\mathcal{B}$ . Niech  $f = (X - a)(X - d) - bc \in K[X]$ . Udowodnić dwa następujące stwierdzenia.

(a)  $f(\tau) = 0_V$ .

(b) Jeśli  $\tau$  nie ma wartości własnych, to dla każdego wielomianu  $g = X^2 + \alpha X + \beta \in K[X]$  różnego od  $f$ , endomorfizm  $g(\tau)$  jest odwracalny.

**57.** Niech  $V$  będzie przestrzenią  $\tau$ -cykliczną. Udowodnić, że każdy endomorfizm  $\sigma$  przestrzeni  $V$  przemienny z  $\tau$  ma postać  $\sigma = f(\tau)$ , gdzie  $f \in K[X]$ .

**58.** Endomorfizm  $\tau$  przestrzeni  $V$  nazywa się *półprostym*, jeśli dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej  $U$  endomorfizmu  $\tau$  istnieje dopełniająca podprzestrzeń niezmiennicza, to znaczy taka podprzestrzeń  $\tau$ -niezmiennicza  $U_1$  przestrzeni  $V$ , że

$$V = U \oplus U_1.$$

(a) Udowodnić, że zacieśnienie endomorfizmu półprostego  $\tau$  do jego podprzestrzeni niezmienniczej  $U$  jest endomorfizmem półprostim przestrzeni  $U$ .

(b) Udowodnić, że jeśli przestrzeń  $V$  jest sumą prostą  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$  podprzestrzeni niezmienniczych  $U_i$  endomorfizmu  $\tau$  i każdy endomorfizm  $\tau_i$  indukowany przez  $\tau$  na  $U_i$  jest półprostim, to  $\tau$  jest półprostim endomorfizmem przestrzeni  $V$ .

**59.** Udowodnić, że dla endomorfizmu  $\tau$  przestrzeni  $V$  nad ciałem  $K$  następujące warunki są równoważne.

(a) Endomorfizm  $\tau$  jest półprostim.

(b) Przestrzeń  $V$  można przedstawić w postaci sumy prostej minimalnych (w sensie inkluzji) podprzestrzeni niezmienniczych endomorfizmu  $\tau$ .

(c) Wielomian minimalny endomorfizmu  $\tau$  nie dzieli się przez kwadrat żadnego wielomianu nierozkładalnego nad ciałem  $K$ .

**60.** Niech  $K$  będzie ciałem o charakterystyce zero. Udowodnić, że jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są endomorfizmami półprostymi przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $K$  oraz  $\sigma\tau = \tau\sigma$ , to  $\sigma + \tau$  jest także endomorfizmem półprostim przestrzeni  $V$ .

**61.** (a) Niech  $V$  będzie skończone wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. Udowodnić, że nie istnieją endomorfizmy  $\sigma$  i  $\tau$  przestrzeni  $V$  takie, że

$$\sigma\tau - \tau\sigma = \mathbf{1}_V.$$

(b) Niech  $K$  będzie ciałem o charakterystyce 2 i niech  $V$  będzie 2-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem  $K$ . Wskazać endomorfizmy  $\sigma$  i  $\tau$  przestrzeni  $V$  takie, że

$$\sigma\tau - \tau\sigma = \mathbf{1}_V.$$

(c) Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem i niech  $V = K[X]$  będzie przestrzenią wektorową wielomianów nad  $K$ . Niech  $\sigma$  będzie endomorfizmem różniczkowania względem  $X$ , natomiast  $\tau$  niech będzie endomorfizmem mnożenia wielomianu przez  $X$ . Sprawdzić, że

$$\sigma\tau - \tau\sigma = \mathbf{1}_V.$$

**62.** (a) Udowodnić, że nad każdym ciałem klatka Jordana  $J_n(a)$  jest podobna do macierzy transponowanej  $J_n(a)^T$ .

(b) Udowodnić, że nad ciałem algebraicznie domkniętym  $K$  każda macierz  $A \in M_n(K)$  jest podobna do macierzy transponowanej  $A^T$ .

(c) Udowodnić, że nad każdym ciałem  $K$  każda macierz  $A \in M_n(K)$  jest podobna do macierzy transponowanej  $A^T$ .