

**VI Wykład im. Profesora Andrzeja Lasoty
Katowice, 11 stycznia 2013**

**Ergodyczność procesów filtracji
o wieloletnim błędzie i próbach jego poprawienia**

Łukasz Stettner, IMPAN

W modelowaniu matematycznym często nie mamy pełnej obserwacji interesującego nas procesu stanu. Wynika to z niedokładności pomiaru, nakładania się różnych szumów i zakłóceń. W konsekwencji mamy do dyspozycji proces obserwacji, z którego dopiero chcemy odszumić, odfiltrować informację dotyczącą procesu stanu. Co więcej chcielibyśmy by ta nasza informacja była tworzona rekurencyjnie z biegiem czasu. Jeżeli proces stanu jest liniowy z szumem normalnym i jego obserwacji też jest liniowa też z szumem normalnym, to praktycznie naszą obserwacją procesu stanu jest proces liniowej filtracji otrzymany w wyniku procedury zwanej filtrem Kalmana Bucy, stanowiącą podstawę edukacji inżynierskiej. Przeważnie jednak proces stanu nie jest liniowy, aczkolwiek standardowo zakłada się (co jest jakimś ograniczeniem), że jest procesem Markowa (tzn. jego przyszłość nie zależy od przeszłości, jedynie od stanu aktualnego). Wtedy naszą "obserwacją" procesu stanu staje się proces nieliniowej filtracji, tzn. proces warunkowych wartości oczekiwanych procesu stanu względem zgromadzonej do danej chwili obserwacji. Jest to proces Markowa o wartościach w przestrzeni miar probabilistycznych. Gdy mówimy o procesie Markowa i interesuje nas jego zachowanie się na długim okresie czasu, to naturalnym pojęciem jest miara niezmiennicza, czyli rozkład, dla którego proces Markowa startujący z tym rozkładem w każdej chwili ma ten sam rozkład. Problemy istnienia i jedności miar niezmienniczych były istotną dziedziną pracy naukowej prof. A. Lasoty. Istnienie jedynych miar niezmienniczych jest kluczowym elementem umożliwiającym nam przybliżanie miar niezmienniczych i oszacowywanie funkcjonałów od procesów Markowa na długim horyzoncie czasowym. W przypadku procesu nieliniowej filtracji to zagadnienie wydawało się być w pełni zbadane przez przełomową pracę H. Kunity z 1971 (wraz z późniejszymi uogólnieniami Ł. Stettnera (1989), H. Kunity (1991)). W swojej pracy H. Kunita podał warunek wystarczający i konieczny na istnienie jedynej miary niezmienniczej dla procesu nieliniowej filtracji. W początkach lat 90ch XX wieku pojawiły się pierwsze wątpliwości dotyczące pewnego przejścia granicznego stosowanego w pracy H. Kunity. W 2004 roku w pracy P.

Baxendale'a, P. Chigansky'ego i R. Liptsera (2004) pojawił się kontrprzykład obalający twierdzenie H. Kunity. Pierwotnie uznawane jako intuicyjne stwierdzenie, że dobre własności ergodyczne procesu są dziedziczone przez proces nieliniowej filtracji, okazało się błędne. Problem stał się otwartym i był jednym z ważniejszych wyzwań teorii systemów. Nie udało się do tej pory znaleźć tak eleganckich wyników jak te z (błędnej) pracy H. Kunity. Pewne wyniki otrzymał też Ł. Stettner wraz z prof. G. Di Masim z Padwy. Najbardziej zaawansowane (najpełniejsze) otrzymał młody doktorant, aktualnie Assistant Professor w Princeton, Ramon van Handel. W zanadrzu czeka jeszcze chyba trudniejszy problem: ergodycznych własności sterowanych procesów filtracji odpowiadających zagadnieniu sterowania z niepełną obserwacją.