[Joram Lindenstrauss (1936–2012)]

Dnia 29 kwietnia 2012 r., po ciężkiej chorobie, zmarł Joram Lindenstrauss, światowej sławy matematyk izraelski, znany głównie ze swojego ogromnego wkładu w liniową i nieliniową teorię przestrzeni Banacha. Był profesorem Instytutu Matematyki im. Alberta Einsteina w Uniwersytecie Hebrajskim w Jerozolimie, na którym w 1954 r. rozpoczął studia a w 1962 r. obronił rozprawę doktorską, dotyczącą problematyki przedłużania operatorów zwartych, napisaną pod kierunkiem Aryeha Dvoretzky'ego i Branko Grünbauma. W latach 1962–65, tj. bezpośrednio po doktoracie, pracował

w Stanach Zjednoczonych (Uniwersytet Yale i Uniwersytet Waszyngtoński w Seattle). Resztę swojej kariery naukowej związał z Uniwersytetem Hebrajskim, wizytując jednak szereg uczelni zagranicznych, w tym Uniwersytet Kalifornijski w Berkeley i Uniwersytet Teksański w Austin.

W 1997 roku, jako pierwszy matematyk spoza Polski, został uhonorowany przez Polską Akademię Nauk Medalem im. Stefana Banacha. Wspólnie z Liorem Tzafririm był autorem zaliczanego dziś do klasyki podręcznika *Classical Banach Spaces* ([29], [30]). Truizmem jest stwierdzenie, że trudno spośród ponad stu artykułów naukowych Lindenstraussa wybrać kilka, których krótki opis mógłby w jakikolwiek sposób dać pełny obraz jego dorobku naukowego. Omówimy jednak kilka tych, jak się wydaje, najbardziej fundamentalnych, próbując choć trochę przybliżyć czytelnikowi sylwetkę tego wybitnego matematyka.

Nie sposób nie zacząć od najbardziej spektakularnego twierdzenia Lindenstraussa, udowodnionego wspólnie z Tzafririm [28] i opublikowanego w roku 1971. Rezultat ten był kompletnym rozwiązaniem problemu postawionego jeszcze przez Banacha i Mazura w roku 1930. Przypomnijmy, że domkniętą podprzestrzeń (liniową) Y przestrzeni Banacha X nazywamy *komplementarną*, jeżeli istnieje taka domknięta podprzestrzeń $Z \subset X$, że $X = Y + Z$ oraz $Y \cap Z = \{0\}$. Równoważnie – jeżeli istnieje ciągły rzut z X na Y, tj. liniowy i ograniczony operator surjektywny $\pi\colon X \to Y$, spełniający $\pi \circ \pi = \pi$. Jak wiadomo, specyficzna struktura przestrzeni Hilberta gwarantuje, że każda domknięta podprzestrzeń takiej przestrzeni jest komplementarna. Fakt ten znany jest jako twierdzenie o rzucie prostopadłym. Stosowną podprzestrzeń $\mathcal{Z}$, dopełniającą daną podprzestrzeń $\mathcal{Y}$ przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, można zdefiniować jawnie, wiedząc, że dowolną bazę ortonormalną $\{e_i\}_{i\in I}$ przestrzeni $\mathcal{Y}$ da się uzupełnić do bazy ortonormalnej $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{f_j\}_{j\in J}$ przestrzeni $\mathcal{H}$. Wystarczy oczywiście określić wtedy

$\mathcal{Z}$ jako domknięcie przestrzeni rozpiętej przez $\{f_j\}_{j\in J}$. Naturalne pytanie, postawione w tym kontekście przez Banacha i Mazura, można wysłowić następująco: czy istnieją przestrzenie Banacha, nieizomorficzne z przestrzeniami Hilberta (zauważmy, że własność komplementarności jest niezmiennicza względem izomorfizmów), których każda podprzestrzeń jest komplementarna? Okazuje się, że nie, ale na taką odpowiedź trzeba było czekać 40 lat.

Twierdzenie 1 (Lindenstrauss, Tzafriri 1971)**.** *Jeżeli każda domknięta podprzestrzeń przestrzeni Banacha X jest w niej komplementarna, to X jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta.*

Twierdzenie to nie jest łatwe dla większości – nawet bardzo szczególnych – przypadków, np. dla przestrzeni ℓ_p dla $p \neq 2$. Fakt, że każda z tych przestrzeni zawiera podprzestrzeń niekomplementarną został wykazany przez Murraya w 1937 r. Innym szczególnym przypadkiem jest twierdzenie Banacha-Mazura o tym, że żadna podprzestrzeń $C[0,1]$, izomorficzna z ℓ_1 bądź $L_1(0,1)$ (a takie istnieją, jako że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha zanurza się w $C[0,1]$), nie jest komplementarna.

Dowód twierdzenia Lindenstraussa-Tzafririego to efektowne połączenie zaawansowanych technik geometrii przestrzeni Banacha oraz ujęcia „lokalnego" teorii przestrzeni Banacha. Składa się zasadniczo z dwóch kroków.

Krok 1. Jeżeli X jest przestrzenią Banacha, której każda domknięta podprzestrzeń jest komplementarna, to istnieje taka stała $\lambda < \infty$, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni X jest λ-komplementarna (tzn. istnieje rzut o normie niewiększej od λ).

W dowodzie tego faktu kluczową rolę gra piękne, geometryczne twierdzenie Kadetsa-Snobara [17], wedle którego każda n-wymiarowa podprzestrzeń F dowolnej przestrzeni Banacha jest $\sqrt{n}$-komplementarna. Oszacowanie normy projekcji zależy, jak widać, tylko od wymiaru F i nie jest tu istotne, jak bardzo egzotyczny jest akurat kształt kuli jednostkowej B_F w przestrzeni F. Dzieje się tak za sprawą konstrukcji tzw. *elipsoidy Johna* (ogólnie przez *elipsoidę* rozumiemy kulę w skończenie wymiarowej przestrzeni Banacha wyznaczoną przez normę pochodzącą od jakiegoś iloczynu skalarnego), która jest elipsoidą o maksymalnej (n-wymiarowej) objętości, zawartą w kuli jednostkowej B_F. Oznaczmy tę elipsoidę przez $\mathcal{E}$. Jej istnienie wynika ze zwartości kuli jednostkowej w przestrzeniach skończenie wymiarowych, a najważniejszą jej własnością jest to, że generuje ona iloczyn skalarny – a przezeń także pewną normę euklidesową $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ – na przestrzeni F, która spełnia oszacowania $\|x\|_F \leqslant \|x\|_{\mathcal{E}} \leqslant \sqrt{n}\|x\|_F$. Stąd z kolei wynika, że wszystkie n-wymiarowe przestrzenie Banacha są bliskie przestrzeniom Hilberta z dokładnością do $\sqrt{n}$. Jeżeli bowiem rozważymy przestrzeń Hilberta $E = (F, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$, to izomorfizm identycznościowy $I\colon F \to E$ spełnia

$\|x\|_F \leqslant \|I(x)\|_E \leqslant \sqrt{n}\|x\|_F$. Zamiast E możemy w istocie wziąć kanoniczną przestrzeń euklidesową ℓ_2^n, bowiem każde dwie przestrzenie Hilberta, tego samego wymiaru, są izometryczne. W konsekwencji, jeżeli $d(X,Y)$ oznacza *odległość Banacha-Mazura* między dwiema izomorficznymi przestrzeniami Banacha X i Y, określoną wzorem

$$d(X,Y) = \inf\big\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \;\mid\; T\colon X \to Y \text{ jest izomorfizmem}\big\},$$

to twierdzenie o elipsoidzie Johna mówi dokładnie tyle, że $d(F,\ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$ dla każdej n-wymiarowej przestrzeni Banacha F. W skrajnych przypadkach $F = \ell_\infty^n$ (norma maksimum) oraz $F = \ell_1^n$ (norma sumy modułów) nierówność ta staje się równością. Ogólniej, dla nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha X, symbolem d_X oznaczymy odległość $d(X,\mathcal{H})$ (być może równą ∞), gdzie $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta o tej samej gęstości (topologicznej), co przestrzeń X. Oszacowanie wartości d_X to drugi krok w dowodzie twierdzenia Lindenstraussa-Tzafririego.

Krok 2. Jeżeli X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha, dla której istnieje taka stała λ, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni X jest w niej λ-komplementarna, to X jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta, przy czym $d_X \leqslant 2^9\lambda^4$.

Takie właśnie oszacowanie było podane w oryginalnej pracy Lindenstraussa i Tzafririego [28]. Zostało ono dwa lata później ulepszone do $8\lambda^2$ przez M.I. Kadetsa i Mitjagina [17], po czym Figiel [10] zauważył, że można w istocie uzyskać $d_X \leqslant 4\lambda^2$. Z drugiej strony, Kakutani [18] już w 1939 roku udowodnił, że jeżeli $\dim X \geqslant 3$ oraz każda dwuwymiarowa podprzestrzeń X jest 1-komplementarna, to X jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią Hilberta, tzn. $d_X = 1$. Wynik ten umotywował hipotezę postawioną przez Kadetsa i Mitjagina, mówiącą, że d_X, traktowana jako funkcja zmiennej λ, jest ciągła w punkcie $\lambda = 1$. Innym pytaniem było, czy prawdziwe jest oszacowanie $d_X \leqslant \lambda^2$. Dowód hipotezy Kadetsa-Mitjagina, a także negatywną odpowiedź na pytanie przez nich postawione, uzyskał Kalton [19] w roku 2008. Pokazał on, że dla $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$, i przy warunkach opisanych powyżej, zachodzi nierówność $d_X \leqslant 1 + C\sqrt{\lambda - 1}$, gdzie $C < \infty$ jest pewną stałą uniwersalną. Co więcej postać tego oszacowania jest najlepsza z możliwych, więc przynajmniej dla $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$ nie można żądać, aby $d_X \leqslant \lambda^2$.

Dowód nierówności podanej przez Lindenstraussa i Tzafririego zasadza się na ujęciu lokalnym, które polega na wykazaniu, że X jest $2^9\lambda^4$-reprezentowalna (ang. *crudely finitely representable*) w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ w tym sensie, że dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $F \subset X$ istnieje taka podprzestrzeń $E \subset \mathcal{H}$, że $d(E,F) \leqslant 2^9\lambda^4$. Kluczową rolę pełni tu twierdzenie Dvoretzky'ego, mówiące, że ℓ_2 jest skończenie reprezentowalna (ang. *finitely representable*; tzn. jest α-reprezentowalna dla każdego $\alpha > 1$) w dowolnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha.

Rozwój teorii przestrzeni Banacha przez ostatnie kilkadziesiąt lat pokazał, że wiele naturalnych hipotez, których potwierdzenie miałoby szansę dać fundament pod w miarę prostą teorię strukturalną, ma w istocie rozstrzygnięcie negatywne. Można tu wymienić choćby konstrukcję Enflo przestrzeni bez bazy Schaudera (1973), przestrzeń Tsirelsona niezawierającą kopii żadnej z przestrzeni c_0 bądź ℓ_p dla $1 \leqslant p < \infty$ (1974), dziedzicznie nierozkładalną przestrzeń Gowersa-Maureya, która nie ma żadnego bezwarunkowego ciągu bazowego (1993), czy w końcu także dziedzicznie nierozkładalną przestrzeń Argyrosa-Haydona, na której nie ma żadnych operatorów liniowych i ograniczonych innych niż te postaci $K+\lambda I$, gdzie K jest operatorem zwartym, a I identycznością. Wszystkie te konstrukcje są jednak technicznie skomplikowane i dalekie od „naturalnych" (dotyczy to zwłaszcza dwóch ostatnich, które są bardzo trudne). Twierdzenie Lindenstraussa-Tzafririego jest jednym z najważniejszych przykładów, w których problem stawiany jeszcze w czasach Banacha ma pozytywne rozwiązanie w tym sensie, że nie istnieje żaden horrendalny kontrprzykład, zaburzający poczucie symetrii, które chcielibyśmy wiązać z przestrzeniami Banacha.

Gdyby chcieć wybrać jedno z osiągnięć Jorama Lindenstraussa, które przysporzyło mu największej sławy poza środowiskiem matematyków, zajmujących się analizą funkcjonalną, i które znalazło największe, bezpośrednie zastosowania w różnych dziedzinach (nie tylko matematyki), nie byłoby raczej żadnych wątpliwości – byłby to lemat Johnsona-Lindenstraussa.

Lemat (Johnsona-Lindenstraussa (1984))**.** *Niech $\varepsilon \in (0,1)$ oraz $d \in \mathbb{N}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją stałe naturalne $k_n = O(\varepsilon^{-2}\log n)$ o następującej własności: dla dowolnych punktów $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^d$ istnieje takie odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{k_n}$, że*

$$(1-\varepsilon)\|x_i - x_j\|^2 \leqslant \|f(x_i) - f(x_j)\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\|x_i - x_j\|^2$$

dla wszelkich $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Lemat ten pojawił się w artykule [16], gdzie został wyprowadzony w celu uzyskania pewnej wariacji twierdzenia Kirszbrauna, które mówi, że każdą funkcję lipschitzowską f określoną na dowolnym podzbiorze przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_1$, i przyjmującą wartości w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_2$, można przedłużyć do funkcji lipschitzowskiej $\widetilde{f}\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ z zachowaniem stałej Lipschitza, tj. $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(\widetilde{f})$. Twierdzenie Johnsona-Lindenstraussa opisuje podobny efekt dla funkcji o wartościach w przestrzeniach Hilberta, ale określonych na dowolnym skończonym podzbiorze przestrzeni metrycznej.

Mówiąc dokładniej, jeżeli Z jest przestrzenią metryczną, $M \subset Z$ jest zbiorem skończonym, $m \in \mathbb{N}$, a $f\colon M \to \ell_2^m$ jest dowolną funkcją, to istnieje taka funkcja lipschitzowska $\widetilde{f}\colon Z \to \ell_2^m$, że

$$\mathrm{Lip}\big(\widetilde{f}\big) \leqslant O\big(\sqrt{\log|M|}\big)\mathrm{Lip}\big(f\big).$$

Lemat Johnsona-Lindenstraussa znalazł szereg zastosowań, tak w czystej matematyce (np. do problemu zanurzania struktur grafowych w przestrzenie unormowane), jak i w praktycznych aspektach informatyki (np. do kompresji danych wielowymiarowych czy do algorytmów, pozwalających reprezentować wyniki analizy składowych głównych na rozmaitościach). Zastosowania tego typu raczej nie dziwią wobec faktu, że lemat Johnsona-Lindenstraussa jest konstruktywnym sposobem zredukowania liczby wymiarów potrzebnych do przechowania próbki danych wielowymiarowych. Odwzorowanie liniowe f, pojawiające się w tezie lematu, jest w istocie ortogonalną projekcją z przestrzeni $\mathbb{R}^d$ na pewną mniejszą jej podprzestrzeń.

Dowód lematu wykorzystuje metodę probabilistyczną; rozważa się projekcje ortogonalne na wybierane losowo podprzestrzenie wymiaru k_n i pokazuje, że wybór odpowiedniej projekcji f, spełniającej warunki tezy, występuje z prawdopodobieństwem dodatnim (zobacz też [7]). Alon [2] wykazał, że rząd oszacowania wymiaru k_n jest niemal optymalny; istnieją układy n punktów w $\mathbb{R}^d$, dla których każda kompresja do wymiaru $k = c(\varepsilon)\log n$ z dystorsją równą co najwyżej ε wymaga, aby $c(\varepsilon)$ było równe co najmniej $\Omega(\varepsilon^{-2}\log(1/\varepsilon)^{-1})$.

Jedno z najsłynniejszych, wciąż otwartych pytań analizy funkcjonalnej, leżące na pograniczu geometrii przestrzeni Banacha, teorii miar i martyngałów wektorowych, i być może czegoś, z czego nikt nie zdaje sobie jeszcze sprawy, brzmi: czy dla dowolnej przestrzeni Banacha własność Kreina-Milmana jest równoważna własności Radona-Nikodýma?

Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *własność Kreina-Milmana*, jeżeli każdy ograniczony, domknięty i wypukły zbiór $A \subset X$ jest domknięciem otoczki wypukłej swoich punktów ekstremalnych, który to zbiór oznaczymy, jak zwykle, symbolem $\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ext}(A)$. Oznacza to, że teza klasycznego twierdzenia Kreina-Milmana ma pozostać w mocy po zastąpieniu założenia zwartości danego zbioru założeniem ograniczoności i domkniętości. W roli zbioru A można więc zawsze wziąć kulę jednostkową, co od razu nas przekonuje, że np. przestrzenie c_0 i $L_1[0,1]$ nie mają własności Kreina-Milmana, jako że ich kule jednostkowe nie mają żadnych punktów ekstremalnych. Jest rzeczą dość zaskakującą, że własność Kreina-Milmana jest równoważna następującemu, formalnie słabszemu, warunkowi: każdy niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły zbiór $A \subset X$ ma choć jeden punkt ekstremalny. Fakt ten udowodnił Lindenstrauss [23], choć – do czego za chwilę przejdziemy – nie to (a przynajmniej nie tylko to) jest powodem, dla którego poruszamy tutaj ten temat. Dowód jest tak prosty, że warto go w tym miejscu przytoczyć.

Ustalmy taki zbiór $A \subset X$, jak wyżej. Chcemy wykazać, że A jest równy zbiorowi $B := \overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ext}(A)$, zakładając, że każdy niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły podzbiór przestrzeni X ma choć jeden punkt ektremalny. Oczywiście $B \subseteq A$. Jeżeli $B \subsetneq A$, to twierdzenie Hahna-Banacha o oddzielaniu gwarantuje, że istnieje taki funkcjonał $x^* \in X^*$, że $\sup x^*(B) < \sup x^*(A)$, podczas gdy twierdzenie Bishopa-Phelpsa (mówiące, że dla dowolnego zbioru $A \subset X$ o takich własnościach, jak u nas, zbiór tych funkcjonałów z X^*, które przyjmują w pewnym punkcie maksimum na zbiorze A, jest gęsty w X^*) pozwala założyć, że kres górny po prawej stronie tej nierówności jest równy $x^*(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in A$. Wówczas zbiór $C = \{x \in A\colon x^*(x) = x^*(x_0)\}$ jest niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły, więc na mocy założenia istnieje punkt $y \in \mathrm{ext}(C)$. Wtedy jednak $y \in \mathrm{ext}(A)$, gdyby bowiem $y = \alpha t + (1-\alpha)u$ dla pewnych $\alpha \in (0,1)$ oraz $t, u \in A$, to z definicji zbioru C mielibyśmy $t, u \in C$, skąd $t = u = y$. Z drugiej strony mamy oczywiście $y \notin B$, co jest niemożliwe z uwagi na inkluzję $\mathrm{ext}(A) \subseteq B$.

Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *własność Radona-Nikodýma*, jeżeli dla każdej przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ, μ), z nieujemną miarą skończoną μ, i każdej σ-addytywnej miary wektorowej $m\colon \Sigma \to X$ o ograniczonej wariacji, absolutnie ciągłej względem μ (tzn. $\mu(E) \to 0$ implikuje $m(E) \to 0$) istnieje taka μ-całkowalna w sensie Bochnera funkcja $g\colon \Omega \to X$, że

$$m(E) = \int_E g\,\mathrm{d}\mu \quad \text{dla każdego } E \in \Sigma. \tag{1}$$

Oznacza to, że teza klasycznego twierdzenia Radona-Nikodýma, w wersji skalarnej, ma pozostać w mocy dla miar o wartościach w przestrzeni X, przynajmniej na tyle, na ile jest to możliwe (absurdalnym byłoby np. żądanie, aby miary o nieograniczonej wariacji reprezentowały się według powyższego wzoru). Podanie natychmiastowych przykładów negatywnych nie jest tu niestety tak proste, jak w przypadku własności Kreina-Milmana. Odnotujmy jednak, że jeżeli $\Omega = [0,1]$, Σ jest σ-ciałem podzbiorów borelowskich $[0,1]$, a μ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$, to ani miara $m_1\colon \Sigma \to c_0$ określona wzorem

$$m_1(E) = \Big(\int_E \sin\big(2^n \pi t\big)\,\mathrm{d}\mu(t)\Big)_{n=1}^{\infty}$$

(jej wartości leżą w c_0 na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a), ani miara $m_2\colon \Sigma \to L_1[0,1]$ dana jako $m_2(E) = \mathbb{1}_E$, nie dadzą się zapisać w postaci (1), mimo że obie mają ograniczone wariacje i są μ-absolutnie ciągłe. Wynika stąd, że przestrzenie c_0 i $L_1[0,1]$ nie mają własności Radona-Nikodýma.

Pytanie o równoważność własności Kreina-Milmana oraz własności Radona-Nikodýma zostało postawione *explicite* przez Diestela w 1973 r. Choć na pierwszy rzut oka te dwie własności nie mają wiele wspólnego (pierwsza zdaje się mieć charakter geometryczny, druga – pozornie nie), dzisiejszy stan wiedzy pokazuje, jak silnie są ze sobą związane i że owa równoważność zachodzi praktycznie dla wszystkich „naturalnych" przestrzeni Banacha. Pierwszą motywacją do sformułowania hipotezy Diestela był zaskakujący rezultat Lindenstraussa [23]:

Twierdzenie 2 (Lindenstrauss, 1966)**.** *Własność Radona-Nikodýma implikuje własność Kreina-Milmana.*

Chcąc być precyzyjnym, należy powiedzieć, że Lindenstrauss wykazał własność Kreina-Milmana jedynie dla przestrzeni ℓ_1, jednak jego metoda była na tyle uniwersalna, że w świetle dalszych wyników, otrzymanych przez Namiokę, Maynarda, Davisa i Phelpsa w latach 1967-74, było jasne, że dowód Lindenstraussa pokazuje, że brak punktów ekstremalnych implikuje brak własności Radona-Nikodýma. Prace czterech wymienionych tu autorów pokazały związek między własnością Radona-Nikodýma, a geometrią przestrzeni. Wynika z nich w szczególności, że każdy ograniczony podzbiór D przestrzeni X o własności Radona-Nikodýma spełnia następujący warunek:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{x\in D} \qquad x \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \smallsetminus B(x,\varepsilon)\big) \tag{2}$$

(ang. *dentable set*). Ideą dowodu Lindenstraussa było zaś pokazanie, że zaprzeczenie własności Kreina-Milmana prowadzi do konstrukcji ograniczonego zbioru D, dla którego (2) nie zachodzi.

Dziś wiadomo, że implikacja odwrotna do tej z twierdzenia 2 zachodzi dla wszystkich dualnych przestrzeni Banacha (Huff, Morris, 1975), wszystkich krat Banacha (Bourgain, Talagrand, 1981) oraz wszystkich przestrzeni Banacha X, zawierających izomorficzną kopię swojego kwadratu $X \oplus X$ (Schachermayer, 1985). Wiele szczegółowych, a także przeglądowych informacji na temat problemu Diestela można znaleźć w [8, rozdział 7]. Kończąc ten wątek, zaznaczmy, że choć problem ma pozytywne rozstrzygnięcie dla bardzo szerokiej klasy przestrzeni, całkowite rozwiązanie wydaje się obecnie poza zasięgiem. Przytoczmy tu jedno zdanie z książki [1]: *It is probably fair to say that the subject has received relatively little attention since the 1980s and some really new ideas seem to be necessary to make further progress.*

Nawet najbardziej wpływowe dzieła muszą czasem przeczekać długie lata, by dotrzeć do ogólnej świadomości, a często potrzebują wręcz kogoś, kto na nowo zauważy ich prawdziwy potencjał i odkryje go przed światem. W roku 1953 Alexander Grothendieck opublikował w języku francuskim, w słabo dostępnym czasopiśmie brazylijskim, genialny artykuł [12], dotyczący iloczynów tensorowych przestrzeni Banacha. Dziś znaczenie tej pracy i namaszczenie, z jakim jest słusznie traktowana, jest tak wielkie, że powszechnie nazywana jest „résume Grothendiecka”, co jest lakoniczną wersją jej oryginalnego tytułu. Z matematycznego punktu widzenia brak zainteresowania tą pracą, jaki miał miejsce aż do roku 1968, można tłumaczyć skupieniem się Grothendiecka wyłącznie na przestrzeniach Banacha (*vide:* „la théorie métrique” w tytule) i pominięciem modnego w tamtym czasie ujęcia ogólnego, tj. lokalnie wypukłych przestrzeni liniowo-topologicznych. Najważniejszym wynikiem pracy był pewien zaskakujący, silny związek między trzema fundamentalnymi przestrzeniami Banacha: L_1, L_2 i L_∞, nazwany przez samego Grothendiecka mianem „Théorème fondamental de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques”. Dziś wynik ten jest powszechnie znany jako

Nierówność Grothendiecka. *Istnieje absolutna stała $K_{\mathcal{G}} < \infty$ o następującej własności: Jeżeli $n \in \mathbb{N}$, a $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ jest rzeczywistą macierzą wymiaru $n \times n$, która dla wszelkich $(\alpha_i)_{i=1}^n, (\beta_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ spełnia nierówność*

$$\Big|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\alpha_i\beta_j\Big| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|\cdot\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\beta_j|,$$

to dla dowolnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i dowolnych ciągów $(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \subset \mathcal{H}$ mamy

$$\Big|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\Big| \leqslant K_{\mathcal{G}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|\cdot\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|y_j\|.$$

Nierówność ta jest prawdziwa także dla macierzy i skalarów zespolonych, przy czym zwiększeniu może ulec stała $K_{\mathcal{G}}$. Niech więc $K_{\mathcal{G}}^{\mathbb{R}}$ i $K_{\mathcal{G}}^{\mathbb{C}}$ oznaczają optymalne stałe w przypadku, odpowiednio, rzeczywistym i zespolonym. Nietrudno zauważyć, że $K_{\mathcal{G}}^{\mathbb{C}} \leqslant 2K_{\mathcal{G}}^{\mathbb{R}}$, ale dowód tego, że $K_{\mathcal{G}}^{\mathbb{R}}$ jest skończona, wymaga niezwykłej pomysłowości. Grothendieck pokazał, że

$$\frac{\pi}{2} \leqslant K_{\mathcal{G}}^{\mathbb{R}} \leqslant \sinh\frac{\pi}{2} = \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2}.$$

Artykuł Grothendiecka był bardzo trudny w odbiorze i przez piętnaście lat dla środowiska matematycznego w zasadzie nie istniał. Sytuacja diametralnie zmieniła się, kiedy w roku 1968 Joram Lindenstrauss i Aleksander Pełczyński opublikowali pracę [25], której zasadniczym celem było, mówiąc po prostu, przedstawienie światu niezauważonych dotąd idei zawartych w „résume”. Istotnie uprościli oni oryginalną prezentację, pozbywając się całkowicie aparatury iloczynów tensorowych. Ich praca nie składała się jednak tylko z uproszczenia czy przeformułowania rozumowań Grothendiecka.

Lindenstrauss i Pełczyński zauważają, że większość wniosków, wypływających z twierdzeń Grothendiecka, ma w istocie charakter lokalny. Z tego powodu definiują klasy $\mathscr{L}_p$-przestrzeni (dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$), wyodrębniając te przestrzenie Banacha, których skończenie wymiarowe podprzestrzenie są podobne do tych zawartych w przestrzeniach typu $L_p(\mu)$. Formalna definicja jest następująca: przestrzeń Banacha X nazywamy *$\mathscr{L}_{p,\lambda}$-przestrzenią* (dla pewnych $\lambda \geqslant 1$ oraz $1 \leqslant p \leqslant \infty$), jeżeli dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $E \subset X$ istnieje taka skończenie wymiarowa podprzestrzeń $F \subset X$, zawierająca E, że $d(F, \ell_p^n) \leqslant \lambda$, gdzie $n = \dim F$ (przypomnijmy, że d oznacza odległość Banacha-Mazura). Powiemy zaś, że X jest *$\mathscr{L}_p$-przestrzenią*, jeżeli jest $\mathscr{L}_{p,\lambda}$-przestrzenią dla pewnej liczby $\lambda \geqslant 1$. Przestrzenie Banacha, należące jednocześnie do wszystkich klas $\mathscr{L}_{\infty,1+\varepsilon}$ przy każdym $\varepsilon > 0$, były rozważane *implicite* przez Lindenstraussa już w jego rozprawie doktorskiej [21]. Posługiwał się on tam wprawdzie klasą *L_1-preduali*, tj. takich przestrzeni Banacha, których dual jest izometryczny do $L_1(\mu)$ dla pewnej miary μ, ale – jak się okazało ze wspólnej pracy z Pełczyńskim – jest ona dokładnie równa przekrojowi rodzin $\mathscr{L}_{\infty,1+\varepsilon}$, przy $\varepsilon > 0$. Dzisiaj takie przestrzenie nazywane są *przestrzeniami Lindenstraussa*. Jeden z najważniejszych rezultatów jego pracy doktorskiej brzmi następująco:

Twierdzenie 3 (Lindenstrauss, 1964)**.** *Dla każdej przestrzeni Banacha X następujące warunki są równoważne:*

(i) *X jest L_1-predualem;*

(ii) *dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$ i każdego liniowego operatora zwartego $T \colon Y \to X$ istnieje taki liniowy i zwarty operator $\widetilde{T} \colon Z \to X$, że $\widetilde{T}|_Y = T$ oraz $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$;*

(iii) *dowolna rodzina parami przecinających się kul w przestrzeni X, których środki tworzą podzbiór relatywnie zwarty, ma niepusty przekrój;*

(iv) *dowolna czteroelementowa rodzina parami przecinających się kul w przestrzeni X ma niepusty przekrój.*

Należy odnotować, że twierdzenie to było uzupełnieniem wcześniejszych wyników Grothendiecka [13] (tym razem opublikowanych w Kanadzie, więc nieco lepiej), który prawdopodobnie jako pierwszy uzyskał pozytywne rezultaty, dotyczące przedłużania operatorów zwartych. Chwila refleksji pokazuje, że warunek (iv) nie jest spełniony dla przestrzeni euklidesowej ℓ_2^2, zachodzi natomiast dla ℓ_1^2 oraz ℓ_∞^2. Oczywiście $(\ell_\infty^2)^* = \ell_1^2$ (izometrycznie), zaś $(\ell_1^2)^* = \ell_\infty^2$ (izometrycznie), co także jest izometryczne z ℓ_1^2 (obrót wokół środka układu o kąt $\pi/4$ złożony z jednokładnością o skali $1/\sqrt{2}$ jest izometrią z ℓ_∞^2 na ℓ_1^2).

Jak już wspomnieliśmy, Lindenstrauss i Pełczyński wykazali, że klasa przestrzeni Lindenstraussa jest równa rodzinie L_1-preduali. Wymieńmy teraz kilka dalszych rezultatów ich pracy [25], które zainicjowały rozwój teorii $\mathscr{L}_p$-przestrzeni:

- Przede wszystkim każda przestrzeń $L_p(\mu)$, dla dowolnej miary μ, jest $\mathscr{L}_{p,1+\varepsilon}$-przestrzenią dla każdego $\varepsilon > 0$. Podobnie każda przestrzeń $C(K)$, dla dowolnej zwartej przestrzeni Hausdorffa K, jest przestrzenią Lindenstraussa.
- Każda $\mathscr{L}_p$-przestrzeń jest izomorficzna z pewną podprzestrzenią przestrzeni $L_p(\mu)$, przy czym dla $1 < p < \infty$ podprzestrzeń ta może być nawet komplementarna. W szczególności każda $\mathscr{L}_2$-przestrzeń jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta, co oznacza, mówiąc nieprecyzyjnie, że przestrzenie Hilberta charakteryzują się lokalnie.
- Jeżeli X jest $\mathscr{L}_1$-przestrzenią, to X^* jest injektywna, tzn. każdy ograniczony operator liniowy, działający na podprzestrzeni Y dowolnej przestrzeni Banacha Z, i przyjmujący wartości w X, ma przedłużenie do ograniczonego operatora liniowego $Z \to X$.
- Dla $1 \leqslant p < \infty$ każda nieskończenie wymiarowa $\mathscr{L}_p$-przestrzeń ma komplementarną podprzestrzeń izomorficzną z ℓ_p.

Zatrzymajmy się na chwilę przy problemie klasyfikacji przestrzeni $\mathscr{L}_p$. O ile dla $p = 2$ są to jedynie izomorficzne kopie przestrzeni Hilberta, o tyle dla każdego $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ Lindenstrauss z Pełczyńskim wykazali, że klasa $\mathscr{L}_p$ jest istotnie bogatsza od klasy wszystkich izomorficznych kopii przestrzeni $L_p(\mu)$. Warto przyjrzeć się następującemu przykładowi opartemu na eleganckim pomyśle, pochodzącym z wcześniejszej pracy Lindenstraussa [22]:

Przykład 1 ($\mathscr{L}_1$-przestrzeni, która nie jest komplementarna w żadnej przestrzeni $L_1(\mu)$). Potraktujmy liczby naturalne jako etykiety drzewa binarnego, tzn. j-temu w kolejności węzłowi drzewa, leżącemu na k-tym poziomie (dla $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leqslant j < 2^k$), odpowiada numer $n = 2^k + j$. Każdy poziom tego drzewa naturalnie wyznacza podział odcinka $[0, 1]$ na przedziały postaci $I_n = [j/2^k, (j+1)/2^k]$; przedział I_n odpowiada węzłowi o numerze n. Niech $(e_n)_{n=1}^\infty$ będzie kanoniczną bazą Schaudera przestrzeni ℓ_1. Określmy operator liniowy $T\colon \ell_1 \to L_1[0, 1]$ wzorem $T(e_n) = 2^k \mathbb{1}_{I_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, przy czym $n = 2^k + j$ dla takich j i k, jak wyżej. Dość łatwo zauważyć, że T jest operatorem ograniczonym i surjektywnym. Ponadto jego jądrem jest podprzestrzeń $X \subset \ell_1$, będąca domknięciem przestrzeni rozpiętej na wektorach

$x_n = e_n - \frac{1}{2}(e_{2n} + e_{2n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Przyjmując $Y_n = \mathrm{span}\{x_j\}_{j=1}^n$, można sprawdzić, że $d(Y_n, \ell_1^n) \leqslant 2$ dla $n \in \mathbb{N}$, skąd wynika, że X jest $\mathscr{L}_{1,2+\varepsilon}$-przestrzenią dla każdego $\varepsilon > 0$. Nieco trudniej wykazać, że X nie jest komplementarna w swoim bidualu, co z kolei implikuje, że nie jest komplementarna w żadnej dualnej przestrzeni Banacha. Stąd zaś wynika, że nie jest ona izomorficzna z żadną komplementarną podprzestrzenią żadnej przestrzeni $L_1(\mu)$, jako że każda tego typu przestrzeń jest komplementarna w swoim bidualu*.

Uzasadnienie tego, że w powyższym przykładzie X nie jest komplementarna w X^{**}, nie jest bynajmniej natychmiastowe i wymaga sprytnego rozumowania opartego na zwartości. Lindenstrauss w swojej pracy [22] dowodzi przy tej okazji pewnej niezwykle użytecznej „własności podniesienia” dla przestrzeni ℓ_1. Przytoczymy ją tutaj w ulepszonej wersji podanej przez Kaltona i Pełczyńskiego [20], która pasuje zresztą świetnie do naszego kontekstu, gdyż akcentuje rolę, jaką pełnią tutaj przestrzenie z klasy $\mathscr{L}_1$.

Lindenstrauss lifting principle (1964). *Załóżmy, że $Q\colon X \to Y$ jest ograniczonym operatorem liniowym, odwzorowującym przestrzeń Banacha X na przestrzeń Banacha Y, przy czym $\ker(Q)$ jest przestrzenią komplementarną w swoim bidualu. Wówczas dla każdej $\mathscr{L}_1$-przestrzeni Z dowolny ograniczony operator liniowy $T\colon Z \to Y$ dopuszcza podniesienie, tj. taki ograniczony operator liniowy $S\colon Z \to X$, że $T = QS$.*

Dla $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$ Lindenstrauss i Pełczyński eksponują cztery następujące $\mathscr{L}_p$-przestrzenie: ℓ_p, $L_p[0,1]$, $\ell_p \oplus \ell_2$ i $(\ell_2 \oplus \ell_2 \oplus \ldots)_p$, dowodząc, że są one parami nieizomorficzne, przy czym dwie ostatnie to również przykłady $\mathscr{L}_p$-przestrzeni nieizomorficznych z żadną $L_p(\mu)$-przestrzenią. W swojej pracy stawiają m.in. następujące pytania:

(1) Czy każda ośrodkowa $\mathscr{L}_p$-przestrzeń, dla $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$, jest izomorficzna z jedną z czterech wyżej wymienionych $\mathscr{L}_p$-przestrzeni?

(2) Czy każda $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeń jest izomorficzna z przestrzenią $C(K)$ dla pewnej zwartej przestrzeni Hausdorffa K?

(3) Niech X będzie $\mathscr{L}_p$-przestrzenią ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). Czy X^* musi być $\mathscr{L}_q$-przestrzenią, gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$?

W ciągu kilkunastu lat od opublikowania pracy Lindenstraussa i Pełczyńskiego zrozumienie struktury $\mathscr{L}_p$-przestrzeni ogromnie się rozwinęło. Lata

*Jeżeli μ jest miarą semi-skończoną (tzn. dla każdego mierzalnego zbioru A, spełniającego $\mu(A) = \infty$ istnieje taki mierzalny zbiór $B \subset A$, że $0 < \mu(B) < \infty$), to projekcję $L_1(\mu)^{**} \to L_1(\mu)$ można zadać jawnie; zobacz np. [11, §367U]. Z kolei twierdzenie Luthera [32] daje rozkład dowolnej miary nieujemnej μ na sumę $\mu_1 + \mu_2$, gdzie μ_1 jest semi-skończona, a μ_2 zdegenerowana (tzn. przyjmuje tylko wartości 0 i ∞), z czego wynika, że $L_1(\mu)$ jest izometrycznie izomorficzna z $L_1(\mu_1)$.

1969-1981 dały bardzo daleko idące odpowiedzi na takie pytania, jak powyżej; w szczególności odpowiedzi na pytania (1) i (2) okazały się „mocno" negatywne. Przytoczmy tu kilka najbardziej efektownych rezultatów:

- W 1972 r. Benyamini i Lindenstrauss [4] udowodnili, że istnieje przestrzeń Banacha X, będąca $\mathscr{L}_{\infty,1+\varepsilon}$-przestrzenią dla każdego $\varepsilon > 0$ (czyli przestrzenią Lindenstraussa), dla której $X^* \simeq \ell_1$ izometrycznie, i która nie jest izomorficzna z żadną komplementarną podprzestrzenią $C[0,1]$. Klasa przestrzeni Lindenstraussa jest więc bogatsza od klasy $C(K)$-przestrzeni*.
- W 1980 r. Johnson i Lindenstrauss [15] pokazali, że istnieje $2^{\aleph_0}$ wzajemnie nieizomorficznych $\mathscr{L}_1$-przestrzeni, z których każda ma własność Radona-Nikodýma.
- W 1981 r. Bourgain, Rosenthal i Schechtman [6] udowodnili, że dla każdego $1 \leqslant p \leqslant \infty$ istnieje nieprzeliczalnie wiele wzajemnie nieizomorficznych $\mathscr{L}_p$-przestrzeni. Oczywiście dla $p = \infty$ wynika to bezpośrednio ze znacznie starszego twierdzenia Bessagi-Pełczyńskiego (zobacz [33]), które mówi, że rodzina przestrzeni $C[0, \omega^{\omega^\alpha}]$, gdzie $\alpha \geqslant 0$ przebiega zbiór przeliczalnych liczb porządkowych, wyczerpuje (z dokładnością do izomorfizmu) całą klasę przestrzeni $C(K)$ dla zwartych, metrycznych i przeliczalnych K, a także – że żadne dwie przestrzenie z tej rodziny nie są izomorficzne.
- Przykład, który podali Benyamini i Lindenstrauss pokazał, że przestrzenie $C(K)$ nie charakteryzują się lokalnie poprzez podobieństwo swoich skończenie wymiarowych podprzestrzeni do przestrzeni postaci ℓ_∞^n. W 1981 r. Bourgain i Delbaen [5] pokazali jak naprawdę daleko jest ogólnym $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeniom do przestrzeni typu $C(K)$, konstruując $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeń nasyconą przestrzeniami refleksywnymi (tzn. której każda nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń zawiera nieskończenie wymiarową podprzestrzeń refleksywną), a zatem jest to $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeń, która nie zawiera nawet kopii c_0**.

Odpowiedź na pytanie (3) już w 1969 r. uzyskali Lindenstrauss i Rosenthal [33], pokazując, że dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant \infty$ przestrzeń X jest $\mathscr{L}_p$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy X^* jest $\mathscr{L}_q$-przestrzenią, przy czym $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Odkryli przy tej okazji głęboki i bardzo często dziś przytaczany fakt, mówiący, że dla dowolnej przestrzeni Banacha X jej drugi dual

*Przestrzeń X jest ośrodkowa jako predual ℓ_1. Gdyby więc była postaci $C(K)$, wtedy K byłaby zwartą przestrzenią metryczną. Jednak każda taka przestrzeń jest izomorficzna z komplementarną podprzestrzenią $C[0,1]$; zobacz np. [33].

**Przestrzeń c_0 nie zawiera żadnej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni refleksywnej, gdyż jest c_0-nasycona, co udowodnił Pełczyński w roku 1960 (zob. np. [1, §2.2]).

X^{**} jest skończenie reprezentowalny w X, nawet jeśli z globalnego punktu widzenia X^{**} jest dużo większa od X. Dziś jest on powszechnie znany pod nazwą zasady lokalnej refleksywności (ang. *local reflexivity principle*).

Zasada lokalnej refleksywności (Lindenstraussa-Rosenthala, 1969). *Niech X będzie przestrzenią Banacha (utożsamioną w sposób kanoniczny z podprzestrzenią X^{**}), a $F \subset X^{**}$ oraz $G \subset X^*$ przestrzeniami skończenie wymiarowymi. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje różnowartościowy operator liniowy $T\colon F \to X$, spełniający warunki:*

(a) $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$,

(b) $T(x) = x$ *dla wszelkich* $x \in F \cap X$,

(c) $x^*(Tx^{**}) = x^{**}x^*$ *dla wszelkich* $x^* \in G$ *oraz* $x^{**} \in F$.

Z pracy Lindenstraussa i Rosenthala warto również wymienić następujące rezultaty:

- Dla $1 < p < \infty$ każda komplementarna podprzestrzeń $\mathscr{L}_p$-przestrzeni jest $\mathscr{L}_p$-przestrzenią lub izomorficzną kopią przestrzeni Hilberta.

- Przestrzeń Banacha X jest $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy X^{**} jest injektywna.

- Przestrzeń Banacha X jest $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$ i każdego liniowego operatora zwartego $T\colon Y \to X$ istnieje taki liniowy i zwarty operator $\widetilde{T}\colon Z \to X$, że $\widetilde{T}|_Y = T$. Dowód odwoływał się do wyników z pracy doktorskiej Lindenstraussa (porównaj z twierdzeniem 3).

Wróćmy teraz do artykułu Lindenstraussa i Pełczyńskiego [25], który jest prezentacją siły i znaczenia nierówności Grothendiecka dla teorii przestrzeni Banacha. Jak piszą we wstępie autorzy, (...) *by using these results some problems which were posed by various authors in the last decade can be easily solved.* Omówmy zatem pokrótce, jakiego typu były to problemy, stawiane po (!) roku 1953, a których rozwiązanie już tkwiło ukryte na stronach brazylijskiego czasopisma.

Aby zrozumieć, w jaki sposób nierówność Grothendiecka wiąże przestrzenie typu L_1, L_2 i L_∞, należy odwołać się do pojęcia operatora p-bezwzględnie sumującego (ang. *p-absolutely summing*), wprowadzonego przez Pietscha w roku 1967. Dla dowolnego ograniczonego operatora liniowego

$T\colon X \to Y$, działającego między przestrzeniami Banacha X i Y, oraz dowolnej liczby $p \in [1, \infty)$, niech

$$a_p(T) = \inf\Big\{ C > 0\colon \Big(\sum_{j=1}^n \|Tx_j\|^p\Big)^{1/p} \leqslant C \cdot \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \Big(\sum_{j=1}^n |x^* x_j|^p\Big)^{1/p} \\ \text{dla wszelkich } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } x_1, \ldots, x_n \in X \Big\}$$

Operator T nazywamy *p-bezwzględnie sumującym*, jeżeli $a_p(T) < \infty$. Następujący rezultat tłumaczy nierówność Grothendiecka na język takich właśnie operatorów.

Twierdzenie 4 (Lindenstrauss, Pełczyński 1968)**.** *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, a $T\colon X \to Y$ ograniczonym operatorem liniowym. Wówczas:*

(a) *jeżeli X jest $\mathscr{L}_1$-przestrzenią, a Y jest przestrzenią Hilberta, to T jest 1-bezwzględnie sumujący oraz $a_1(T) \leqslant \lambda K_{\mathcal{G}} \|T\|$, gdzie $\lambda \geqslant 1$ jest taką liczbą, że $X \in \mathscr{L}_{1,\lambda}$;*

(b) *jeżeli X jest $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenią, a Y jest $\mathscr{L}_p$-przestrzenią dla pewnego $p \in [1, 2]$, to T jest 2-bezwzględnie sumujący oraz $a_2(T) \leqslant \lambda\rho K_{\mathcal{G}} \|T\|$, gdzie $\lambda, \rho \geqslant 1$ są takimi liczbami, że $X \in \mathscr{L}_{\infty,\lambda}$ oraz $Y \in \mathscr{L}_{p,\rho}$.*

Teza (a) powyższego twierdzenia niejako charakteryzuje przestrzenie Hilberta. Jeżeli bowiem przestrzeń X ma bezwarunkową bazę Schaudera oraz każdy ograniczony i liniowy operator $X \to Y$ jest 1-bezwzględnie sumujący, to $X \simeq \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ oraz $Y \simeq \mathcal{H}$ dla pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Operatory bezwzględnie sumujące są niezwykle skutecznym narzędziem teorii przestrzeni Banacha i pozwalają często uzyskiwać wyniki pozornie zupełnie niezwiązane z teorią operatorów. Dwa przykłady z pracy Lindenstraussa i Pełczyńskiego:

- Każda bezwarunkowa baza przestrzeni c_0 i ℓ_1 jest równoważna bazie kanonicznej (w tym sensie, że istnieje izomorfizm, przekształcający tę bazę na bazę kanoniczną). Analogiczny wynik jest prawdziwy dla ℓ_2, ale dowód w tym przypadku jest znacznie prostszy – wymaga jedynie tożsamości równoległoboku. Już w 1969 r. Lindenstrauss wspólnie z Zippinem [31] udowodnili, że przestrzenie c_0, ℓ_1 i ℓ_2 są jedynymi (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzeniami Banacha, które mają własność jednoznaczności bazy bezwarunkowej.
- Przestrzeń Hardy'ego H_1, definiowana tutaj jako L_1-domknięcie przestrzeni wielomianów zespolonych na okręgu jednostkowym z miarą Lebesgue'a μ, nie jest komplementarna w $L_1(\mu)$. Wynik ten był uzyskany wcześniej przez Newmana, jednak Lindenstrauss i Pełczyński

podali elegancki dowód, wskazując po prostu ograniczony operator liniowy $T\colon H_1 \to \ell_2$, który nie jest 1-bezwzględnie sumujący:

$$T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Omówiliśmy tu ledwie niewielką częśc dorobku naukowego Jorama Lindenstraussa. Do innych jego najważniejszych osiągnięć zaliczyć można: wykazanie, że każda nieskończenie wymiarowa, komplementarna podprzestrzeń ℓ_∞ jest izomorficzna z ℓ_∞ ([24]), głębokie badania nad przestrzeniami Eberleina i wprowadzenie pojęcia WCG (ang. *weakly compactly generated*) przestrzeni Banacha ([3], wspólnie z Amirem), wykazanie, że $C[0,1]$ jest prymarna ([26], wspólnie z Pełczyńskim), istotny wkład w teorię „problemu trzech przestrzeni" ([9], wspólnie z Enflo i Pisierem), w tym konstrukcja *przestrzeni Johnsona-Lindenstraussa* ([14]). Wymieniać można długo.

We wspomnieniu Jorama Lindenstraussa, opublikowanym w internecie w dzień jego śmierci przez Nassifa Ghoussouba, przytoczona jest historia sprzed ponad trzydziestu lat, kiedy w prywatnej rozmowie Lindenstrauss miał powiedzieć o swoim synu, że jest „dobry" (użyte zostało właśnie słowo „good"). Ghoussoub oczywiście zrozumiał, że chodziło tu o zdolności matematyczne, a znając sposób formułowania sądów przez Lindenstraussa, można było wnioskować, że jego syn ma szansę pewnego dnia otrzymać Medal Fieldsa. Tak też się stało. 19 sierpnia 2010 roku Elon Lindenstrauss odebrał Medal Fieldsa za badania nad teorią ergodyczną i jej zastosowaniami w teorii liczb.

[Literatura]

[1] F. Albiac, N.J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Grad. Texts in Math. 233, Springer 2006.

[2] N. Alon, *Problems and results in extremal combinatorics I*, Discrete Math. 273 (2003), 31–53.

[3] D. Amir, J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Annals of Math. 88 (1968), 35–46.

[4] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *A predual of ℓ_1 which is not isomorphic to a $C(K)$-space*, Israel J. Math. 13 (1972), 246–259.

[5] J. Bourgain, F. Delbaen, *A class of special $\mathscr{L}_\infty$ spaces*, Acta Math. 145 (1981), 155–176.

[6] J. Bourgain, H.P. Rosenthal, G. Schechtman, *An ordinal L^p-index for Banach spaces, with applications to complemented subspaces of L^p*, Annals of Math. 114 (1981), 193–228.

[7] S. Dasgupta, A. Gupta, *An elementary proof of a theorem of Johnson and Lindenstrauss*, Random Structures & Algorithms 22 (2003), 60–65.

[8] J. Diestel, J.J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, Mathematical Surveys and Monographs 15, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1977.

[9] P. Enflo, J. Lindenstrauss, G. Pisier, *On the "three-space problem"*, Math. Scand. 36 (1975), 199–210.

[10] T. Figiel, *Review of* [*17*], Math. Rev. 53 (1977), #3649.

[11] D.H. Fremlin, *Measure Theory*, vol. 3: *Measure Algebras*, Torres Fremlin 2002.

[12] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boll. Soc. Mat. São-Paulo 8 (1953), 1-79.

[13] A. Grothendieck, *Une caractérisation vectorielle métrique des espace* L^1, Canadian J. Math. 7 (1955), 552–561.

[14] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces*, Israel J. Math. 17 (1974), 219–230.

[15] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Examples of* $\mathscr{L}_1$ *spaces*, Ark. Mat. 18 (1980), 101–106.

[16] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz maps into a Hilbert space*, Contemp. Math. 26 (1984), 189–206.

[17] M.I. Kadets, B.S. Mitjagin, *Complemented subspaces in Banach spaces*, Uspekhi Mat. Nauk 28 (1973), 77–94 (po rosyjsku); tłumaczenie angielskie: Russian Math. Surveys 28 (1973), 77–95.

[18] S. Kakutani, *Some characterizations of Euclidean space*, Japan J. Math. 16 (1939), 93–97.

[19] N.J. Kalton, *The complemented subspace problem revisited*, Studia Math. 188 (2008), 223–257.

[20] N.J. Kalton, A. Pełczyński, *Kernels of surjections from* $\mathscr{L}_1$*-spaces with an application to Sidon sets*, Math. Ann. 309 (1997), 135–158.

[21] J. Lindenstrauss, *Extensions of compact operators*, Memoirs Amer. Math. Soc. 48 (1964).

[22] J. Lindenstrauss, *On a certain subspace of* ℓ_1, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math., Astr. et Phys. 12 (1964), 539–542.

[23] J. Lindenstrauss, *On extreme points in* ℓ_1, Israel J. Math. 4 (1966), 59–61.

[24] J. Lindenstrauss, *On complemented subspaces of* m, Israel J. Math. 5 (1967), 153–156.

[25] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in* $\mathscr{L}_p$*-spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), 275–326.

[26] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, *Contributions to the theory of the classical Banach spaces*, J. Funct. Anal. 8 (1971), 225–249.

[27] J. Lindenstrauss, H.P. Rosenthal, *The* $\mathscr{L}_p$ *spaces*, Israel J. Math. 7 (1969), 325–349.

[28] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. 9 (1971), 263–269.

[29] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin 1977.

[30] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin 1979.

[31] J. Lindenstrauss, M. Zippin, *Banach spaces with a unique unconditional basis*, J. Funct. Anal. 3 (1969), 115–125.

[32] N.Y. Luther, *A decomposition of measures*, Canadian J. Math. 20 (1968), 953–958.

[33] H.P. Rosenthal, *The Banach spaces* $C(K)$; w *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, vol. 2, 1547–1602, North-Holland, Amsterdam 2001.

Tomasz Kochanek

Autor artykułu jest adiunktem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, a także Opiekunem Koła Naukowego Matematyków UŚ.