http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 1, 5 pp., *02.03.1998*

Zur Stabilität der Cauchyschen und der Hosszúschen Funktionalgleichung

Peter Volkmann

Zusammenfassung. Mit Hilfe eines Lemmas über die Stabilität der Cauchyschen Gleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

wird ein Beitrag zur Stabilität der Hosszúschen Gleichung

$$f(x+y-xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$$

gegeben.

1. Einleitung und Ergebnisse. Erste Untersuchungen zur Stabilität der Hosszúschen Funktionalgleichung stammen von Borelli [1]. Im Anschluß daran bewies Losonczi [5] ein Ergebnis, welches hier wie folgt verbessert wird: Die bei Losonczi auftretende Konstante 20ε wird in (2) auf 4ε verringert. Die Frage nach der besten Konstante wird dadurch nicht beantwortet. In [5] findet man auch weitere Informationen zur Hosszúschen Gleichung und deren Stabilität.

Satz. *Es sei* $\varepsilon \geq 0$, *und für* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *gelte*

$$(1) \qquad | f(x+y-xy) + f(xy) - f(x) - f(y) | \leq \varepsilon \quad (x, y \in \mathbb{R}) .$$

Dann gibt es eine additive Funktion $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *und ein* $b \in \mathbb{R}$, *so daß*

$$(2) \qquad | f(x) - a(x) - b | \leq 4\varepsilon \quad (x \in \mathbb{R})$$

ausfällt.

Zum Beweise wird das nachstehende Lemma über Stabilität der Cauchyschen Funktionalgleichung herangezogen.

Lemma. *Es seien $\varepsilon, \alpha \geq 0$, und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle*

$$| g(x+y) - g(x) - g(y) | \leq \varepsilon \quad (x + y \geq \alpha) \ . \tag{3}$$

Dann gilt mit einer additiven Funktion $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$| g(x) - a(x) | \leq \varepsilon \quad (x \in \mathbb{R}) \ . \tag{4}$$

In den folgenden Abschnitten 2, 3 werden das Lemma und der Satz bewiesen. Eine sinngemäße Übertragung auf die Situation $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow E$ mit einem Banachraum E ist nicht schwer.

Die hier vorgelegten Ergebnisse sind 1997 während eines Aufenthaltes in Debrecen entstanden. Für dessen Finanzierung durch die ungarischen Programme OTKA T-016846 und FKFP 0310/1997 danke ich sehr herzlich.

2. Beweis des Lemmas. Aus (3) folgt

$$| g(x+y) - g(x) - g(y) | \leq \varepsilon \quad (x, y \geq \frac{\alpha}{2}) \ .$$

Daher existiert nach dem Vorgehen von Hyers [3] (bzw. von Pólya und Szegő [6], Aufgabe I 99) der Grenzwert

$$a(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} g(2^n x) \quad (x \geq \frac{\alpha}{2}) \ ,$$

und $a : [\alpha/2, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine additive Funktion mit der Eigenschaft

$$| g(x) - a(x) | \leq \varepsilon \quad (x \geq \frac{\alpha}{2}) \ . \tag{5}$$

Nach additiver Fortsetzung von a auf ganz $\mathbb{R}$ haben wir

$$a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a(x+y) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \ ,$$

und es geht darum, von (3), (5) auf (4) zu schließen. Zur Abkürzung sei

$$h(x) = g(x) - a(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Dann folgt aus (3), (5)

$$| h(x+y) - h(x) - h(y) | \leq \varepsilon \quad (x + y \geq \alpha) \ , \tag{6}$$

$$| h(x) | \leq \varepsilon \quad (x \geq \frac{\alpha}{2}) \ , \tag{7}$$

und die Behauptung (4) erhält die Form

$$| h(x) | \quad \leq \varepsilon \quad (x \in \mathbb{R}) \ . \tag{8}$$

Wir fixieren $p \in \mathbb{R}$, und wir werden

$$h(p) \leq \varepsilon \tag{9}$$

beweisen. Wir setzen

$$h(p) = \varepsilon + \delta \ . \tag{10}$$

Dann folgt aus (6) mit $x = p$

$$-h(p + y) + \varepsilon + \delta + h(y) \leq \varepsilon \quad (y \geq \alpha - p) \ ,$$

und hieraus ergibt sich sukzessive

$$\begin{array}{ll} \delta \leq h(p + y) - h(y) & (y \geq \alpha - p) \ , \\ \delta \leq h(2p + y) - h(p + y) & (y \geq \alpha - 2p) \ , \\ \ldots & \\ \delta \leq h(np + y) - h((n - 1)p + y) & (y \geq \alpha - np) \ . \end{array}$$

Addition dieser n Ungleichungen liefert

$$n\delta \leq h(np + y) - h(y) \quad (y \geq \alpha + n \mid p \mid) \ .$$

Mit einem $y \geq \alpha + n \mid p \mid$ folgt dann nach (7)

$$n\delta \leq 2\varepsilon \ .$$

Diese Beziehung gilt für $n = 1, 2, 3, \ldots$, also ist $\delta \leq 0$, und aus (10) folgt somit (9). Mit demselben Beweise erhält man (9) auch für die Funktion $-h$ an Stelle von h, und insgesamt wird $\mid h(p) \mid \leq \varepsilon$ für beliebige $p \in \mathbb{R}$. Damit ist (8) gezeigt.

Bemerkung. Ist E ein (reeller) Banachraum und interessiert man sich für den Fall $g : \mathbb{R} \longrightarrow E$ des Lemmas, so kann die (8) entsprechende Formel geschrieben werden als

$$\| h(p) \| \leq \varepsilon \quad (p \in \mathbb{R}) \ . \tag{11}$$

Zu ihrem Nachweise werde zu $p \in \mathbb{R}$ ein lineares, stetiges Funktional $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\| \varphi \| = 1, \quad \varphi(h(p)) = \| h(p) \|$$

herangezogen. Dann läßt sich (9) mit h ersetzt durch $\varphi \circ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zeigen:

$$\varphi(h(p)) \leq \varepsilon \ ,$$

und das beweist (11).

3. Beweis des Satzes. Wir folgen dem Vorgehen von Daróczy [2] (vgl. auch Kuczma [4]) zur Lösung der Hosszúschen Funktionalgleichung (das ist der Fall $\varepsilon = 0$ unseres Satzes): Wir schreiben (1) als

$$G(x,y) := f(x) + f(y) - f(xy) = f(x+y-xy) + s \tag{12}$$

mit $s = s(x,y)$, $\mid s \mid \leq \varepsilon$. Für G gilt

$$G(uv, w) + G(u,v) = G(u, vw) + G(v,w) \ ,$$

und aus (12) folgt dann

$$\begin{aligned} & f(uv + w - uvw) + s_1 + f(u+v-uv) + s_2 \\ = \ & f(u + vw - uvw) + s_3 + f(v+w-vw) + s_4 \ , \end{aligned}$$

wobei $s_j = s_j(u,v,w)$, $\mid s_j \mid \leq \varepsilon$ $(j = 1,2,3,4)$. Mit $w = 1/v$ folgt weiter (für $v \neq 0$)

$$\begin{aligned} & f(uv + \frac{1}{v} - u) + f(u+v-uv) \\ & \quad = f(1) + f(v + \frac{1}{v} - 1) + \sigma(u,v) \ , \quad \mid \sigma \mid \leq 4\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$. Dann gibt es $u, v \in \mathbb{R}$ mit

$$uv + \frac{1}{v} - u = x + 1, \quad u + v - uv = y + 1$$

(vgl. Daróczy oder Kuczma, loc. cit.), und man erhält so

$$f(x+1) + f(y+1) = f(1) + f(x+y+1) + \tau \quad (x + y > 0)$$

mit $\tau = \tau(x,y)$, $\mid \tau \mid \leq 4\varepsilon$. Für

$$g(x) = f(x+1) - f(1) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{13}$$

gilt demnach

$$g(x) + g(y) = g(x+y) + \tau, \quad \mid \tau \mid \leq 4\varepsilon \quad (x+y > 0) \ ,$$

und speziell ist

$$| g(x+y) - g(x) - g(y) | \leq 4\varepsilon \quad (x+y \geq 1) .$$

Das Lemma liefert

$$| g(x) - a(x) | \leq 4\varepsilon \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit einer additiven Funktion $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Nach (13) ist dann

$$| f(x+1) - f(1) - a(x) | \leq 4\varepsilon \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

und $x-1$ statt x führt auf

$$| f(x) - f(1) - a(x) + a(1) | \leq 4\varepsilon \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

d.h. es gilt (2), wenn $b = f(1) - a(1)$ gesetzt wird.

Literatur

[1] Borelli Costanza: *On Hyers-Ulam stability of Hosszú's functional equation.* Results Math. **26**, 221-224 (1994).

[2] Daróczy Zoltán: *On the general solution of the functional equation* $f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y)$. Aequationes Math. **6**, 130-132 (1971).

[3] Hyers D. H.: *On the stability of the linear functional equation.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **27**, 222-224 (1941).

[4] Kuczma Marek: *An introduction to the theory of functional equations and inequalities.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa 1985.

[5] Losonczi László: *On the stability of Hosszú's functional equation.* Results Math. **29**, 305-310 (1996).

[6] Pólya G., Szegő G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I.* Springer Berlin 1925.

Adresse des Autors: Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Deutschland.