

## O stabilności równań funkcyjnych o jednej zmiennej

Peter Volkmann<sup>1</sup>

**Zusammenfassung.** Es sei  $E$  ein Banachraum,  $Z$  eine Menge und  $\varphi : Z \rightarrow Z$ . Bei vorgelegten  $f : Z \rightarrow E$  und  $\varepsilon \geq 0$  ist die Zerlegbarkeit

$$f = h + r \text{ mit } h(\varphi(x)) = 2h(x), \|r(x)\| \leq \varepsilon \ (x \in Z)$$

dazu äquivalent, daß mit einer reellen Zahl  $\eta$  gilt:

$$\|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| \leq 2^n \varepsilon + \eta \ (x \in Z; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Es folgt ein Stabilitätssatz für die Funktionalgleichung  $f(\varphi(x)) = 2f(x)$  und anschließend eine Anwendung auf Gleichungen der Form  $f(x \circ y) = f(x) + f(y)$  (dabei ist  $\circ$  eine innere Verknüpfung auf  $Z$ ).

1. Niech  $E$  będzie przestrzenią Banacha,  $Z$  - zbiorem, a  $\varphi : Z \rightarrow Z$  daną funkcją. Symbolem  $\varphi^n$  oznaczamy  $n$ -tą iteratę funkcji  $\varphi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Rozważamy równanie funkcyjne

$$(1) \quad f(\varphi(x)) = 2f(x) \quad (x \in Z)$$

dla funkcji  $f : Z \rightarrow E$ . Możemy rozważać też równanie ogólniejsze  $f(\varphi(x)) = \omega f(x)$ , gdzie  $\omega > 1$ , ale później - w paragrafie trzecim - będziemy potrzebować jedynie przypadku  $\omega = 2$ . Pewne rezultaty dotyczące tego ogólniejszego równania podamy na końcu pracy.

W dalszym ciągu  $f$  będzie oznaczało raczej zaburzenia rozwiązania równania (1). Następujące twierdzenie jest w duchu prac [1], [5], [12]; zasadniczym krokiem jego dowodu jest granica (3), znana w literaturze (Pólya i Szegő [9], zadanie I 99; Hyers [6]; Forti [4], prop.1).

**Twierdzenie 1.** Załóżmy, że dana jest funkcja  $f : Z \rightarrow E$  i liczba  $\varepsilon \geq 0$ . Wówczas następujące dwa warunki są równoważne:

$$(P) \quad f = h + r, \text{ gdzie } h(\varphi(x)) = 2h(x), \|r(x)\| \leq \varepsilon \ (x \in Z).$$

(Q) Istnieje taka liczba rzeczywista  $\eta$ , że

$$(2) \quad \|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| \leq 2^n \varepsilon + \eta \ (x \in Z; n = 1, 2, 3, \dots).$$

<sup>1</sup>Praca powstała w czasie pobytu na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach wiosną 2001 roku na zaproszenie Instytutu Matematyki tego uniwersytetu.

*Dowód.* Jeśli spełniony jest warunek (P), to  $h(\varphi^n(x)) = 2^n h(x)$ , skąd

$$\begin{aligned} \|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| &= \|h(\varphi^n(x)) + r(\varphi^n(x)) - 2^n h(x) - 2^n r(x)\| \\ &\leq \|r(\varphi^n(x))\| + 2^n \|r(x)\| \leq (2^n + 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

tj. zachodzi (Q) z liczbą  $\eta$  równą  $\varepsilon$ . Na odwrót, z warunku (Q) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{2^n} f(\varphi^n(x)) - \frac{1}{2^{n+m}} f(\varphi^{n+m}(x)) \right\| \\ &= \frac{1}{2^{n+m}} \|2^m f(\varphi^n(x)) - f(\varphi^m(\varphi^n(x)))\| \leq \frac{1}{2^{n+m}} (2^m \varepsilon + \eta) \leq \frac{1}{2^n} (\varepsilon + |\eta|). \end{aligned}$$

Tak więc  $\frac{1}{2^n} f(\varphi^n(x))$  jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha  $E$ , a zatem istnieje granica

$$(3) \quad h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(\varphi^n(x)) \quad (x \in Z).$$

Dla dowodu warunku (P) wystarczy sprawdzić, że dla tak określonej funkcji  $h : Z \rightarrow E$  mamy

$$(4) \quad h(\varphi(x)) = 2h(x) \quad (x \in Z),$$

$$(5) \quad \|h(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad (x \in Z).$$

Otóż (4) wynika z (3), a (5) stąd, że

$$\left\| \frac{1}{2^n} f(\varphi^n(x)) - f(x) \right\| = \frac{1}{2^n} \|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{2^n} \eta \rightarrow \varepsilon \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Uwaga.** Funkcje  $h$  oraz  $r$  występujące w warunku (P) są wyznaczone jednoznacznie: Jeśli mamy dwa takie rozkłady

$$f = h_1 + r_1 = h_2 + r_2$$

funkcji  $f$ , to dla funkcji  $g = h_1 - h_2 = r_2 - r_1$  dostajemy  $g(\varphi(x)) = 2g(x)$  oraz  $\|g(x)\| \leq 2\varepsilon$ . Stąd

$$2^n \|g(x)\| = \|g(\varphi^n(x))\| \leq 2\varepsilon \quad (x \in Z; n = 1, 2, 3, \dots)$$

i wobec tego  $g$  znika identycznie.

**2. Stabilność.** Podzbiór  $W$  przestrzeni Banacha  $E$  jest *idealnie wypukły* (Lifšic [7]), gdy dla każdego ograniczonego ciągu  $d_1, d_2, d_3, \dots$  jego elementów i dla takich liczb  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \geq 0$ , że  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$  mamy  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n d_n \in W$ .

Następujący rezultat jest pewną wersją twierdzenia Jacka Tabora [10] o stabilności w sensie Pólyi-Szegő-Hyersa-Ulama.

**Twierdzenie 2.** Niech  $W$  będzie ograniczonym i idealnie wypukłym podzbiorem przestrzeni  $E$ , a funkcja  $f : Z \rightarrow E$  spełnia

$$(6) \quad f(\varphi(x)) - 2f(x) \in W \quad (x \in Z).$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna taka funkcja  $h : Z \rightarrow E$ , że

$$(7) \quad h(\varphi(x)) = 2h(x), \quad h(x) - f(x) \in W \quad (x \in Z).$$

*Dowód.* Wybierzmy tak  $\varepsilon \geq 0$ , żeby

$$(8) \quad W \subseteq K(\varepsilon) := \{x | x \in E, \|x\| \leq \varepsilon\}.$$

(6) implikuje  $\|f(\varphi(x)) - 2f(x)\| \leq \varepsilon$  ( $x \in Z$ ), a stosując zasadę indukcji matematycznej z łatwością otrzymujemy

$$\|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| \leq (2^n - 1)\varepsilon \quad (x \in Z; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Tak więc (2) zachodzi dla  $\eta = -\varepsilon$ . Możemy zatem zastosować twierdzenie 1 i dostajemy (dokładnie jedną) taką funkcję  $h : Z \rightarrow E$ , że

$$h(\varphi(x)) = 2h(x), \quad h(x) - f(x) \in K(\varepsilon) \quad (x \in Z).$$

Funkcja ta dana jest wzorem (3). Zgodnie z (6), dla  $x \in Z$  mamy

$$\begin{aligned} d_1(x) &:= f(\varphi(x)) - 2f(x) \in W, \\ d_2(x) &:= f(\varphi^2(x)) - 2f(\varphi(x)) \in W, \\ d_3(x) &:= f(\varphi^3(x)) - 2f(\varphi^2(x)) \in W \text{ itd.} \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem

$$h(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x) \in W$$

i tym samym (7) jest w pełni wykazane.

**3. Działania kwadratowo symetryczne.** Mając dane (dowolne) działanie  $\circ : Z \times Z \rightarrow Z$  założmy, że nasza funkcja  $\varphi : Z \rightarrow Z$  dana jest wzorem

$$\varphi(x) = x^2 := x \circ x \quad (x \in Z).$$

Równanie (1) ma teraz postać

$$f(x^2) = 2f(x) \quad (x \in Z).$$

Dla  $x \in Z$  określamy indukcyjnie potęgi  $x^{2^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) przyjmując  $x^{2^{n+1}} = (x^{2^n})^2$  ( $n \geq 1$ ). Tym samym  $\varphi^n(x) = x^{2^n}$  i wobec tego (2) przybiera postać

$$(9) \quad \|f(x^{2^n}) - 2^n f(x)\| \leq 2^n \varepsilon + \eta \quad (x \in Z; n = 1, 2, 3, \dots),$$

a (3) to

$$(10) \quad h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(x^{2^n}) \quad (x \in Z).$$

Załóżmy teraz, że  $\circ$  jest działaniem *kwadratowo symetrycznym* (por. [8]), tzn.

$$(x \circ y) \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ (y \circ y) \quad (x, y \in Z),$$

czy też krótko

$$(11) \quad (x \circ y)^2 = x^2 \circ y^2 \quad (x, y \in Z).$$

Użyteczność tej własności w problematyce stabilnościowej znana jest z pracy Fortiego [3] (por. też pracę Borelli i Fortiego [2]). Zauważmy, że (11) pociąga

$$(12) \quad (x \circ y)^{2^n} = x^{2^n} \circ y^{2^n} \quad (x, y \in Z; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Z twierdzenia 1 jako prosty wniosek otrzymujemy zatem równoważność następujących dwóch warunków (dla danej funkcji  $f : Z \rightarrow E$  i liczby  $\varepsilon \geq 0$ ):

$$(P') \quad f = h + r, \text{ gdzie } h(x \circ y) = h(x) + h(y), \|r(x)\| \leq \varepsilon \quad (x, y \in Z).$$

(Q') Istnieją takie liczby rzeczywiste  $\delta, \eta$ , że zachodzi (9) oraz

$$(13) \quad \|f(x \circ y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \quad (x, y \in Z).$$

(Tę równoważność (P')  $\iff$  (Q') można znaleźć też w [12]; implikacja (P')  $\implies$  (Q') nie wymaga kwadratowej symetryczności (11). Przedstawione poniżej rozumowanie pokazuje, że (13) pociąga równość  $h(x \circ y) = h(x) + h(y)$ .)

Ciekawiej jest popatrzeć na twierdzenie 2: warunek (6) oznacza teraz, że  $f(x^2) - 2f(x) \in W$  ( $x \in Z$ ). Zastąpmy go przez

$$(14) \quad f(x \circ y) - f(x) - f(y) \in W \quad (x, y \in Z).$$

Dla liczby  $\varepsilon$  spełniającej (8) mamy

$$\|f(x \circ y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \quad (x, y \in Z),$$

a zastępując  $x, y$  przez  $x^{2^n}, y^{2^n}$ , zgodnie z (12) otrzymujemy

$$(15) \quad \|f((x \circ y)^{2^n}) - f(x^{2^n}) - f(y^{2^n})\| \leq \varepsilon.$$

Dzieląc tę nierówność przez  $2^n$  i uwzględniając (10), dostajemy

$$(16) \quad h(x \circ y) = h(x) + h(y) \quad (x, y \in Z).$$

**Konkluzja.** Jeżeli w twierdzeniu 2 warunek (6) zastąpimy przez (14), gdzie  $\circ : Z \times Z \rightarrow Z$  jest działaniem kwadratowo symetrycznym, to w (7) równość  $h(\varphi(x)) = 2h(x)$  można zastąpić przez (16).

Ta wersja twierdzenia 2 podana jest w [13]. Przypomnijmy także uwagę Józefa Tabora [11]: Aby otrzymać (16) z (14), założenie kwadratowej symetryczności można osłabić; wystarczy zażądać co następuje:

(T) Dla  $x, y \in Z$  istnieje przynajmniej jedna taka liczba całkowita  $n \geq 1$ , że

$$(x \circ y)^{2^n} = x^{2^n} \circ y^{2^n}.$$

Wówczas bowiem

$$(x \circ y)^{2^{n_k}} = x^{2^{n_k}} \circ y^{2^{n_k}}$$

dla pewnego (zależnego od  $x, y$ ) ciągu  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots \rightarrow \infty$ . Mamy (15) dla  $n = n_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), dzielimy przez  $2^{n_k}$ , przechodzimy do granicy, gdy  $k \rightarrow \infty$  i dostajemy (16). Mamy więc uogólnienie - w sensie uwagi Józefa Tabora [11] - twierdzenia stabilnościowego Jacka Tabora [10]:

**Twierdzenie 3.** Niech  $W$  będzie ograniczonym i idealnie wypukłym podzbiorem przestrzeni  $E$ , a  $\circ : Z \times Z \rightarrow Z$  niech spełnia warunek (T). Załóżmy też (14) o funkcji  $f : Z \rightarrow E$ , tj.

$$f(x \circ y) - f(x) - f(y) \in W \quad (x, y \in Z).$$

Istnieje wówczas dokładnie jedna taka funkcja  $h : Z \rightarrow E$ , że

$$h(x \circ y) = h(x) + h(y), \quad h(x) - f(x) \in W \quad (x, y \in Z).$$

Zauważmy, że także do otrzymania równoważności (P') oraz (Q') założenie (11) można zastąpić przez (T).

**4. O równaniu funkcyjnym  $f(\varphi(x)) = \omega f(x)$ .** Odnośnie równania

$$f(\varphi(x)) = \omega f(x) \quad (x \in Z),$$

gdzie  $\omega > 1$ , twierdzenie 1 pozostaje w mocy, gdy w warunku (P) równanie, które spełniać ma funkcja  $h$ , zastąpimy przez  $h(\varphi(x)) = \omega h(x)$ , a nierówność (2) przez

$$\|f(\varphi^n(x)) - \omega^n f(x)\| \leq \omega^n \varepsilon + \eta \quad (x \in Z; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Twierdzenie 2 jest słuszne dla  $\omega > 2$ , jeśli tylko w (6), (7) liczbę 2 zastąpimy przez  $\omega$  i zażądamy dodatkowo, że  $0 \in W$ .

## Literatura

- [1] Karol BARON i Peter VOLKMANN: *On functions close to homomorphisms between square symmetric structures*. Maszynopis.
- [2] Costanza BORELLI i Gian Luigi FORTI: *On a general Hyers-Ulam stability result*. Internat. J. Math. Math. Sci. **18**, 229-236 (1995).
- [3] Gian Luigi FORTI: *An existence and stability theorem for a class of functional equations*. Stochastica **4**, 23-30 (1980).
- [4] —: *The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **57**, 215-226 (1987).
- [5] Roman GER i Peter VOLKMANN: *On sums of linear and bounded mappings*. Ibid. **68**, 103-108 (1998).
- [6] Donald H. HYERS: *On the stability of the linear functional equation*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **27**, 222-224 (1941).
- [7] E. A. LIFŠIC: *Ideal'no vypukle množestva*. Funkcional'. Analiz Priložen. **4**, No. 4, 76-77 (1970).
- [8] Zsolt PÁLES, Peter VOLKMANN i R. Duncan LUCE: *Hyers-Ulam stability of functional equations with a square-symmetric operation*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **95**, 12772-12775 (1998).
- [9] György PÓLYA i Gábor SZEGŐ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I*. Springer Berlin 1925.
- [10] Jacek TABOR: *Ideally convex sets and Hyers theorem*. Funkcialaj Ekvac. **43**, 121-125 (2000).
- [11] Józef TABOR: *Remark 18* (podczas konferencji z równań funkcyjnych w Oberwolfach, 1984 r.). Aequationes Math. **29**, 96 (1985).
- [12] Peter VOLKMANN: *On the stability of the Cauchy equation*. Proceedings of the Numbers, Functions, Equations '98 International Conference, pod redakcją Zsolta Pálesa, Janus Pannonius Tudományegyetem Pécs, 105-151 (1998).
- [13] —: *Zur Rolle der ideal konvexen Mengen bei der Stabilität der Cauchy-schen Funktionalgleichung*. Sem. LV, <http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv>, No. 6, 6 pp. (1999).

*Maszynopis*: Marion Ewald.

*Adres autora*: Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Niemcy.