http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 2, 3 pp., *23.04.1998*

Croissance d'une suite définie par certaine solution distribution d'une équation fonctionnelle

Alice Simon et Peter Volkmann

Résumé. Soit la suite $(c_n)_{n\geq 0}$, où

$$c_1 = c_0 = 1 \tag{1}$$

et $(n \geq 1)$

$$c_{n+1} + c_{n-1} + 2c_n = \begin{cases} 0 & (n \not\equiv 0 \mod 4) \\ 4c_{n/4} & (n \equiv 0 \mod 4). \end{cases} \tag{2}$$

On montre que $|\, c_n \,| \ \leq \ \sqrt{2}n^{3/2} - 1 \quad (n \geq 2)$. Donc:

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_n, \ \ c_{-n} = c_n \tag{3}$$

définit une distribution tempérée, solution de l'équation fonctionnelle

$$T(x/4) = T(x+1) + T(x-1) + 2T(x). \tag{4}$$

1. Le résultat et ses conséquences.

Théorème. *La suite* $(c_n)_{n\geq 0}$ *donnée par* $(1), (2)$ *satisfait*

$$|\, c_n \,| \ \leq \ \sqrt{2}n^{3/2} - 1 \qquad\qquad (n \geq 2). \tag{5}$$

On a égalité, si $n = 2^{2k-1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Soit l'équation fonctionnelle

$$4q\,T(qx) = T(x+1) + T(x-1) + 2T(x), \tag{6}$$

où $0 < q < 1$. Dans [1] on a déterminé les solutions de (6) dans $\mathcal{E}'$: ce sont les solutions intéressantes pour le «problème de Schilling» (voir [2]). Ici on considère (6) dans le cas particulier $q = 1/4$ (donc (4)), et on s'intéresse aux solutions T dans $\mathcal{S}'\backslash\mathcal{E}'$. On les cherche sous la forme (3), où δ_n désigne la mesure de Dirac au point $x = n$. En supposant seulement

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_n \tag{7}$$

(sans la condition supplémentaire $c_{-n} = c_n$) on déduit de (4) aisément les relations de récurrence (2) ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Les nombres c_0, c_1 étant arbitraires, les autres termes c_n sont déterminés de manière unique, et (7) donne une solution $T \in \mathcal{D}'$ de l'équation (4). On se restreint au cas pair, c.-à-d. $c_{-n} = c_n$. Dans ce cas, (2) pour $n = 0$ entraîne $c_1 = c_0$, on peut donc supposer (1). Alors il résulte du théorème, que (3) définit une distribution tempérée.

2. Démonstration du théorème. 1. En partant de (1), (2) on calcule

$$c_2 = -3, \;\; c_3 = 5, \;\; c_4 = -7, \;\; c_5 = 13. \tag{8}$$

Ensuite on démontre

$$\begin{array}{lcl} c_{8n-4} & = & -7 \\ c_{8n-3} & = & 7 - 2c_{2n} \\ c_{8n-2} & = & 4c_{2n} - 7 \\ c_{8n-1} & = & 7 - 6c_{2n} \\ c_{8n} & = & 8c_{2n} - 7 \\ c_{8n+1} & = & 7 - 6c_{2n} \\ c_{8n+2} & = & 4c_{2n} - 7 \\ c_{8n+3} & = & 7 - 2c_{2n} \end{array} \tag{9}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$): pour $n = 1$ les deux premières formules sont vraies d'après (8) et donnent c_4, c_5; pour $m = 6, 7, 8, \ldots$ l'expression de c_m résulte de celles de c_{m-1} et c_{m-2} grâce à (2).

De $c_2 = -3$ et $c_{8n} = 8c_{2n} - 7$ $(n \geq 1)$ il résulte que

$$c_{2^{2k-1}} = 1 - 2^{3k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

donc pour $n = 2^{2k-1}$ on a égalité dans (5).

2. Les formules (1), (8), (9) entraînent ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$c_n > 0 \;\; (n \text{ impair}), \;\; c_n < 0 \;\; (n \text{ pair}), \tag{10}$$

$$\begin{array}{l} \mid c_{8n-4} \mid \; = \; \mid c_{8n+4} \mid \; = 7 < \; \mid c_{8n-3} \mid \; = \; \mid c_{8n+3} \mid < \\ < \; \mid c_{8n-2} \mid \; = \; \mid c_{8n+2} \mid \; < \; \mid c_{8n-1} \mid \; = \; \mid c_{8n+1} \mid \; < \; \mid c_{8n} \mid . \end{array} \tag{11}$$

En plus on a

$$f_n(x) := \sqrt{2}(8n - x)^{3/2} - (32 - 8x)n^{3/2} - 2x \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 4). \tag{12}$$

En effet, $f_n''(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 4)$, $\; f_n(0) = 0$, $\; f_n'(0) \geq 0$.

3. Pour montrer l'inégalité (5), observons d'abord qu'elle est vraie pour $n = 2, 3$. Il suffit donc de partir de cette inégalité avec $2n$ au lieu de n, et de la vérifier avec n remplacé par

$$8n-4,\ \ 8n-3,\ \ 8n-2,\ \ 8n-1,\ \ 8n,\ \ 8n+1,\ \ 8n+2,\ \ 8n+3 \qquad (13)$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Grâce à (11) il suffit de traiter les cinq premiers termes de (13). On suppose donc

$$|\ c_{2n}\ | \ \leq 4n^{3/2} - 1, \qquad (14)$$

et on montre

$$|\ c_{8n-q}\ | \ \leq \ \sqrt{2}(8n-q)^{3/2} - 1 \qquad (q = 0, 1, 2, 3, 4). \qquad (15)$$

4. D'après (12) on a pour $q = 0, 1, 2, 3, 4$ l'inégalité

$$\sqrt{2}(8n-q)^{3/2} - (32-8q)n^{3/2} - 2q \geq 0.$$

En regroupant on obtient

$$7 + (8-2q)(4n^{3/2} - 1) \leq \sqrt{2}(8n-q)^{3/2} - 1.$$

Avec (14) il en résulte

$$7 + (8-2q)\ |\ c_{2n}\ | \ \leq \ \sqrt{2}(8n-q)^{3/2} - 1.$$

Le premier membre de cette inégalité est $|\ c_{8n-q}\ |$ (voir (9), (10)); la formule (15) est donc établie.

Bibliographie

1. K. Baron, A. Simon et P. Volkmann: *Solutions d'une équation fonctionnelle dans l'espace des distributions tempérées.* C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **319**, 1249-1252 (1994).

2. 35th International Symposium on Functional Equations, Graz 1997, Special Session: *Schilling's problem.* Aequationes Math. **55**, 314-315 (1998).

Adresse des auteurs:

A. Simon, Département de Mathématiques, Université d'Orléans, 45067 Orléans Cedex 2, France. (simon@labomath.univ-orleans.fr)

P. Volkmann, Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Allemagne.