

## Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes unter Verwendung eines gewissen regulären Kegels

Peter Volkmann

Hier wird der Banachsche Fixpunktsatz in den Rahmen der Herzogschen Arbeit [1] gestellt. Zunächst seine Formulierung:

**Satz.** *Es sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $M \neq \emptyset$ , und für  $f : M \rightarrow M$  gelte*

$$(1) \quad d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x, y) \quad (x, y \in M)$$

*mit einer Konstanten  $\kappa < 1$ . Dann hat  $f$  genau einen Fixpunkt  $p$ , und für jedes  $x \in M$  gilt*

$$(2) \quad f(x), f^2(x), f^3(x), \dots \rightarrow p.$$

*Beweis.* 1. Es genügt, für  $x \in M$  die Konvergenz (2) gegen ein  $p \in M$  zu zeigen; wegen der Stetigkeit von  $f$  ist dann  $p$  ein Fixpunkt dieser Funktion. Die Eindeutigkeit von  $p$  ergibt sich mit  $\kappa < 1$  leicht aus (1).

2. Nach Kunugui [3] läßt sich der metrische Raum  $M$  isometrisch in einen reellen Banachraum  $E$  einbetten. Wir stellen uns dementsprechend  $M$  als abgeschlossene Teilmenge von  $E$  vor ( $M$  ist vollständig), und wir schreiben (1) in der Form

$$(3) \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \kappa \|x - y\| \quad (x, y \in M).$$

3. Wie Herzog [1] bilden wir den Banachraum

$$\tilde{E} = E \times R$$

( $R$  bezeichnet den Bereich der reellen Zahlen;  $\|(x, \xi)\| = \max\{\|x\|, |\xi|\}$  in  $\tilde{E}$ ), und wir ordnen ihn durch den Kegel

$$K = \{(x, \xi) \mid x \in E, \xi \in R, \|x\| \leq \xi\}$$

$((x, \xi) \leq (y, \eta)$  in  $\tilde{E}$  bedeutet also  $(y - x, \eta - \xi) \in K$ ). Der Kegel  $K$  ist regulär (im Sinne von Krasnosel'skiĭ [2]), d.h. jede monotone, ordnungsbeschränkte Folge in  $\tilde{E}$  ist konvergent (im Sinne der Norm).

4. Wir bilden  $\tilde{M} = M \times R$  (es ist also  $\tilde{M} \subseteq \tilde{E}$ ) und definieren  $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  durch

$$F(x, \xi) = (f(x), \kappa\xi) \quad ((x, \xi) \in \tilde{M}).$$

Wegen (3) ist  $F$  monoton wachsend, d.h. für  $(x, \xi), (y, \eta) \in \tilde{M}$  gilt

$$(x, \xi) \leq (y, \eta) \Rightarrow F(x, \xi) \leq F(y, \eta).$$

5. Es sei nun  $x \in M$ . Wir wählen  $\xi \in R$  mit  $\|x - f(x)\| \leq \xi(1 - \kappa)$ ; dann gilt

$$(x, -\xi) \leq F(x, -\xi) \leq F(x, \xi) \leq (x, \xi).$$

Anwendung des monotonen Operators  $F^n : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  liefert für  $n = 1, 2, 3, \dots$  die Ungleichungen

$$F^n(x, -\xi) \leq F^{n+1}(x, -\xi) \leq F^{n+1}(x, \xi) \leq F^n(x, \xi),$$

und insgesamt folgt

$$(x, -\xi) \leq \dots \leq F^4(x, \xi) \leq F^3(x, \xi) \leq F^2(x, \xi) \leq F(x, \xi) \leq (x, \xi).$$

Da  $K$  regulär ist, ist

$$F(x, \xi), F^2(x, \xi), F^3(x, \xi), \dots$$

eine in  $\tilde{E}$  konvergente Folge, wegen  $F^n(x, \xi) = (f^n(x), \kappa^n \xi)$  ist dann die in  $M$  gelegene Folge

$$f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$$

konvergent gegen ein  $p \in E$ , und wegen der Abgeschlossenheit von  $M$  in  $E$  gilt schließlich  $p \in M$ .

## Literatur

[1] Gerd HERZOG: *Quasimonotone embedding of one-sided Lipschitz continuous functions*. Univ. Karlsruhe, Fak. Math., Preprint Nr. 06/4, 12 pp. (2006).

[2] M. A. KRASNOSEL'SKIĬ: *Pravil'nye i vpolne pravil'nye konusy*. Doklady Akad. Nauk SSSR **135**, 255-257 (1960).

[3] Kinjirô KUNUGUI: *Applications des espaces à une infinité de dimensions à la théorie des ensembles*. Proc. Imperial Acad. Japan **11**, 351-353 (1935).

*Typoskript*: Marion Ewald.

*Adresse des Autors*: Mathematisches Institut I, Universität, 76128 Karlsruhe, Deutschland.