http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 23, 1 p., *23.01.2006*

Instabilität einer zu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ äquivalenten Funktionalgleichung

Peter Volkmann

Bekanntlich ist die Cauchysche Funktionalgleichung

(1) $$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R)$$

(für Funktionen $f : R \to R$) stabil im Sinne von Pólya-Szegő-Hyers-Ulam (vgl. z.B. [1] und die dort zitierte Literatur); R bezeichnet den Bereich der reellen Zahlen.

Hier wird gezeigt, dass die zu (1) äquivalente Gleichung

(2) $$e^{f(x+y)} = e^{f(x)+f(y)} \quad (x, y \in R)$$

nicht stabil ist, dass also die folgende Aussage nicht gilt:

(S) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass für* $g : R \to R$ *aus*

(3) $$|e^{g(x+y)} - e^{g(x)+g(y)}| \le \delta \quad (x, y \in R)$$

die Existenz einer Lösung $f : R \to R$ *von* (2) *folgt mit*

(4) $$|f(x) - g(x)| \le \varepsilon \quad (x \in R).$$

Den Beweis führen wir indirekt, wir nehmen also (S) als richtig an. Es sei $\varepsilon > 0$; wir wählen ein zugehöriges $\delta > 0$ und setzen noch $\delta \le 1$ voraus. Wir definieren $g : R \to R$ durch

$$g(x) = \min\{x, \log \delta\} \quad (x \in R).$$

Dann ist $e^{g(x)} \le \delta$ mit $\delta \le 1$, und daher gilt (3). Nun liefert (S) eine der Ungleichung (4) genügende Lösung $f : R \to R$ von (2). Dann gilt (1), f ist also additiv. Die Funktion g ist nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt. Wegen (4) hat auch die additive Funktion $f : R \to R$ diese Eigenschaften, und das ist unmöglich.

Literatur

[1] Peter VOLKMANN: *Zur Stabilität der Cauchyschen und der Hosszúschen Funktionalgleichung.* Dieses Seminar, No. 1, 5 pp. (1998).

Typoskript: Marion Ewald.

Adresse des Autors: Mathematisches Institut I, Universität, 76128 Karlsruhe, Deutschland.