

Eine Charakterisierung der Dinghasschen Ableitung

Peter Volkmann¹

1. Resultat. Es sei $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, und es bezeichne R den Bereich der reellen Zahlen. Dann ist $R^R = \{\omega \mid \omega : R \rightarrow R\}$ ein reeller Vektorraum, und für $h \in R$ wird durch

$$\Delta_h \omega(x) = \omega(x+h) - \omega(x) \quad (\omega \in R^R, x \in R)$$

ein linearer Operator $\Delta_h : R^R \rightarrow R^R$ definiert; Δ_h^n sei seine n -te Potenz ($n \in N$), also

$$(1) \quad \Delta_h^n \omega(x) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \omega(x + \nu h).$$

Für

$$(2) \quad f : R \rightarrow R,$$

$\xi \in R$ und $n \in N$ bezeichne

$$(3) \quad D^n f(\xi) = \lim_{\alpha \leq \xi \leq \beta, \beta - \alpha \downarrow 0} \left(\frac{n}{\beta - \alpha} \right)^n \Delta_{(\beta - \alpha)/n}^n f(\alpha)$$

die n -te Dinghassche Ableitung von f an der Stelle ξ (falls dieser Limes existiert und endlich ausfällt); vgl. [1]: $D^n f(\xi)$ verallgemeinert die übliche n -te Ableitung $f^{(n)}(\xi)$. Zur Bildung von (3) braucht f nur in einer Umgebung von ξ definiert zu sein. Fortsetzung eines solchen f auf ganz R ändert aber nichts an (3), und daher kann stets (2) vorausgesetzt werden. Das Resultat dieser Arbeit lautet:

Satz. Für $f : R \rightarrow R$, $\xi \in R$ und $n \in N$ existiert $D^n f(\xi)$ genau dann, wenn

$$(4) \quad f(\xi + h) = f(\xi) + g(h) + \gamma \cdot h^n + o(h^n) \quad (h \rightarrow 0)$$

gilt mit einer Funktion $g : R \rightarrow R$, so daß

$$(5) \quad \Delta_y^n g(x) = 0 \quad (x, y \in R)$$

und

$$(6) \quad g(0) = 0$$

¹Anläßlich eines Gastaufenthaltes an der Universität Katowice im Frühjahr 2001.

ausfällt. Es ist dann $\gamma = \frac{1}{n!}D^n f(\xi)$.

Für stetiges $f : R \rightarrow R$ ist der Satz der Inhalt von [16], und die Beweisführung hier ist eine Modifikation des Beweises dort; manche Details werden nicht wiederholt.

Wird im Satze $f : R \rightarrow R$ als stetig oder – allgemeiner – als in einer Umgebung von ξ beschränkt vorausgesetzt, so folgt aus (4) die Beschränktheit von g in einer Umgebung von Null. Lösungen der Funktionalgleichung (5) mit dieser Eigenschaft sind die Polynome höchstens $(n - 1)$ -ten Grades (vgl. z. B. Kuczma [13]), unter Beachtung von (6) erhält also (4) (mit γ_n an Stelle von γ) die Gestalt

$$(7) \quad f(\xi + h) = f(\xi) + \gamma_1 h + \gamma_2 h^2 + \cdots + \gamma_n h^n + o(h^n) \quad (h \rightarrow 0)$$

(und in dieser Form erscheint (4) in [16]). Für eine Funktion $f : R \rightarrow R$ gilt somit (bei fixierten $\xi \in R$, $n \in N$) Formel (7) genau dann, wenn gleichzeitig $D^n f(\xi)$ existiert und f in einer Umgebung von ξ beschränkt ist.

Nachfolgende Nr. 2 weist auf Zusammenhänge mit der Literatur hin, dann wird ab Nr. 3 der Beweis des Satzes gegeben, und die abschließende Nr. 7 bringt eine Bemerkung über Stabilität.

2. Zusammenhänge mit der Literatur. Dinghas [1] hat die verallgemeinerte Ableitung (3) eingeführt, und er hat unter anderem für stetige $f : I \rightarrow R$ (mit einem nicht ausgearteten Intervall I von R) gezeigt, daß

$$(8) \quad D^n f(\xi) = 0 \quad (\xi \in I)$$

genau dann gilt, wenn f ein Polynom höchstens $(n - 1)$ -ten Grades ist (und analog für f mit Werten in einem Banachraum). Dieses Resultat wurde später von Simon und dem Autor [14] auf beliebige Funktionen $f : I \rightarrow R$ ausgedehnt: In diesem Falle ist (8) äquivalent zu

$$(9) \quad \Delta_\eta^n f(\xi) = 0 \quad (\xi, \xi + n\eta \in I).$$

Doch zunächst hatte Friedel [2] die Dinghassche Ableitung zu anderen verallgemeinerten Ableitungen in Beziehung gesetzt. Für uns ist der Fall interessant, daß für $f : R \rightarrow R$ Formel (7) gilt: Dann heißt $\gamma_n n!$ die n -te Peanosche Ableitung von f an der Stelle ξ (vgl. Zygmund [17]). Aus deren Existenz hat Friedel für stetige f die Existenz von $D^n f(\xi)$ hergeleitet. Die Umkehrung (wieder für stetige $f : R \rightarrow R$) war dann das in Nr. 1 erwähnte Ergebnis aus [16].

Der Satz der gegenwärtigen Arbeit ist für $n = 1$ klar, da $D^1 f(\xi)$ nichts weiter ist als $f'(\xi)$. Für $n = 2$ wurde er von Simon und dem Autor in [15] bewiesen. Dort finden sich auch Zusammenhänge mit Stabilitätsfragen im Sinne von Pólya-Szegő-Hyers-Ulam; vgl. dazu Nr. 7 weiter unten.

Bereits Dinghas [1] hat obere und untere Ableitungen eingeführt, die aus (3) entstehen, wenn man dort an Stelle des Limes den oberen bzw. den unteren Limes nimmt. Diese und ähnliche Größen werden neuerdings von Gilányi und Páles [12] bei der Behandlung von Konvexitätsfragen benutzt.

Analog zur Äquivalenz von (8) und (9) ist für beliebige $f : R \rightarrow R$ nach Gilányi [3] (bzw. [4]) die Funktionalgleichung

$$\Delta_\eta^n f(\xi) = n!f(\eta) \quad (\xi, \eta \in R)$$

äquivalent zu

$$\tilde{D}^n f(\xi) := \lim_{x \leq \xi \leq x+ny, y \downarrow 0} \frac{1}{y^n} [\Delta_y^n f(x) - n!f(y)] = 0 \quad (\xi \in R).$$

Weitere, damit und mit dem Operator \tilde{D}^n zusammenhängende Ergebnisse können in Gilányis Arbeiten [5] - [11] gefunden werden.

3. Beweisanzfang. Da für $n = 1$ alles klar ist (vgl. Nr. 2), setzen wir $n \geq 2$ voraus. (Gemäß [15] würde $n \geq 3$ genügen.) Gilt für $f : R \rightarrow R$ die Entwicklung (4) mit einem (5), (6) genügenden $g : R \rightarrow R$, so kann leicht die Existenz von $D^n f(\xi)$ (mit dem Wert $n!\gamma$) bestätigt werden. Es geht also um die Umkehrung: Die Dinghassche Ableitung $D^n f(\xi)$ existiere, und (4) mit (5), (6) ist gefragt. Es genügt, den Fall $\xi = 0$ zu behandeln (Variablentransformation). Dann kann noch

$$(10) \quad D^n f(0) = 0$$

vorausgesetzt werden; anderenfalls wird statt f die Funktion $f(x) - \frac{1}{n!}D^n f(0)x^n$ betrachtet. Formel (10) bedeutet nach (3) (mit den Substitutionen $\beta = ns$, $\alpha = -nt$) das Bestehen von

$$(11) \quad J_n f(s, t) = \Delta_{s+t}^n f(-nt) = o((s+t)^n) \quad (s, t \geq 0; s+t \downarrow 0),$$

wobei allgemein

$$(12) \quad J_n \omega(s, t) = \Delta_{s+t}^n \omega(-nt) \quad (\omega \in R^R, s \in R, t \in R)$$

gemeint ist. (Aus $\omega : R \rightarrow R$ wird $J_n \omega : R \times R \rightarrow R$.)

Es ist nun das Ziel, aus (11) die Darstellung

$$(13) \quad f(x) = f(0) + g(x) + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

(also (4) für den Fall $\xi = \gamma = 0$) mit einer (5), (6) genügenden Funktion $g : R \rightarrow R$ zu gewinnen.

Aus (12) folgt zunächst mit Hilfe von (1)

$$(14) \quad J_n \omega(s, t) = (-1)^n J_n \omega(-t, -s) \quad (\omega \in R^R, s \in R, t \in R).$$

Außerdem ist für $\omega : R \rightarrow R$ die Gleichung

$$(15) \quad J_n \omega(s, t) = 0 \quad (s, t \in R)$$

nach (12) offenbar äquivalent zu

$$(16) \quad \Delta_y^n \omega(x) = 0 \quad (x, y \in R).$$

Folgendes Lemma wird später benutzt:

Lemma 1. Für $\omega : R \rightarrow R$ gelte

$$(17) \quad J_n \omega(s, t) = 0 \quad (s, t \geq 0).$$

Dann gilt (15) (also auch (16)).

4. Zum Beweise des Lemmas 1. Für stetiges ω vgl. Satz 3 in [16]. Es genügt, den dortigen Beweis zu modifizieren: Es werde also (17) vorausgesetzt. Gleichung (15) (bzw. (16)) bedeutet, daß für äquidistante reelle Zahlen

$$(18) \quad x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$$

die Beziehung

$$(19) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \omega(x_k) = 0$$

gilt. Um diese zu beweisen, wähle man $a \leq 0$ und $a + h > 0$, so daß die Zahlen (18) unter den Zahlen $a + mh$ ($m \in Z$) vorkommen:

$$(20) \quad x_0, x_1, \dots, x_n \in \{a + mh \mid m \in Z\}.$$

Dann sei P das Polynom höchstens $(n - 1)$ -ten Grades mit

$$P(a + mh) = \omega(a + mh) \quad (m = 0, 1, \dots, n - 1),$$

und es sei $\varphi = \omega - P$, also

$$(21) \quad \varphi(a) = \varphi(a + h) = \varphi(a + 2h) = \dots = \varphi(a + (n - 1)h) = 0.$$

Wegen $J_n P(s, t) = 0$ ($s, t \in R$) folgt aus (17)

$$(22) \quad J_n \varphi(s, t) = 0 \quad (s, t \geq 0).$$

Mit der Beweisführung zu Hilfssatz 2 in [16] kann aus (21), (22) auf

$$(23) \quad \varphi(a + mh) = 0 \quad (m \in Z)$$

geschlossen werden: Z. B. folgt aus (21), (22) sofort $\varphi(a + nh) = 0$ und dann noch sukzessive

$$\varphi(a - h) = 0, \varphi(a - 2h) = 0, \dots, \varphi(a - (n - 1)h) = 0.$$

Unter Verwendung von

$$\varphi(a - (n - 2)h) = \varphi(a - (n - 4)h) = \cdots = \varphi(a + nh) = 0$$

folgt mit (22) dann $\varphi(a - nh) = 0$ (übrigens auch $\varphi(a + (n + 2)h) = 0$), etc.:
Sinngemäße Fortsetzung führt zu (23).

Gemäß (20), (23) ist nun $\omega(x_k) - P(x_k) = \varphi(x_k) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), also

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \omega(x_k) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(x_k) = 0,$$

und (19) ist bewiesen.

5. Heranziehung weiterer Funktionaloperatoren. Für $\tau \in R$ und $0 \leq \alpha \leq n$ werden die linearen Operatoren $Q_\tau, S_\alpha^n : R^R \rightarrow R^R$ erklärt durch

$$Q_\tau \omega(x) = \omega(\tau x) \quad (\omega \in R^R, x \in R),$$

$$S_\alpha^n \omega(x) = J_n \omega \left(\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) x, \frac{\alpha}{n} x \right) = \Delta_x^n \omega(-\alpha x) \quad (\omega \in R^R, x \in R).$$

Offenbar gilt $Q_\tau Q_\sigma = Q_{\tau\sigma} = Q_\sigma Q_\tau$, und da die S_α^n Linearkombinationen von gewissen Q_τ sind, gilt auch $S_\alpha^n S_\beta^n = S_\beta^n S_\alpha^n$. Schließlich wird $T_n : R^R \rightarrow R^R$ durch folgende Eigenschaften (T1) - (T3) definiert:

(T1) Mit $m = n/2$ (n gerade) bzw. $m = (n - 1)/2$ (m ungerade) gilt (für $\omega \in R^R, x \in R$)

$$T_n \omega(x) = \omega(2^m x) + \sum_{\mu=0}^{m-1} [a_\mu^{(n)} \omega(2^\mu x) + b_\mu^{(n)} \omega(-2^\mu x)] + c^{(n)} \omega(0).$$

(T2) $c^{(n)} = 0$, falls n gerade ist.

(T3) $T_n \omega(x) \equiv 0$ für $\omega(x) = 1, x, \dots, x^{n-1}$.

Nach Satz 10 in [16] läßt sich T_n durch endlich viele Operatoren der Form $Q_\gamma S_\nu^n$ ($\nu = 0, 1, \dots, n; \gamma \in Z$) linear kombinieren:

$$(24) \quad T_n = \sum_{\gamma \in Z; \nu=0,1,\dots,n} d_{\nu\gamma} Q_\gamma S_\nu^n.$$

Für den Raum

$$\mathcal{F}_n = \{\omega \mid \omega : R \rightarrow R \text{ stetig, } \omega(x) = o(x^n) \text{ (} x \rightarrow 0)\}$$

gilt nach Satz 9 in [16], daß die Einschränkung

$$(25) \quad T_n |_{\mathcal{F}_n} : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n \text{ bijektiv}$$

ist. Zum Beweise werden die Räume

$$\mathcal{F}_n^\pm = \{\omega \mid \omega \in \mathcal{F}_n, \omega(-x) = \pm\omega(x) \ (x \in R)\}$$

eingeführt, und mit Hilfe der Abschätzung

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} 2^{\mu n} (|a_\mu^{(n)}| + |b_\mu^{(n)}|) < 2^{mn}$$

wird die Bijektivität der Einschränkungen $T_n |_{\mathcal{F}_n^\pm}: \mathcal{F}_n^\pm \rightarrow \mathcal{F}_n^\pm$ gezeigt. Hier interessiert uns der Funktionenraum

$$\mathcal{H}_n = \{\omega \mid \omega : R \rightarrow R, \omega(0) = 0, \omega(x) = o(x^n) \ (x \rightarrow 0)\}.$$

Ganz analog zu (25) kann gezeigt werden:

Lemma 2. *Es ist $T_n |_{\mathcal{H}_n}: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ bijektiv.*

Zur Abkürzung setzen wir

$$(26) \quad U = (T_n |_{\mathcal{H}_n})^{-1}.$$

6. Beweisende. Von (11) ausgehend erhalten wir, daß die Funktionen

$$(27) \quad \varepsilon_\alpha := S_\alpha^n f \ (0 \leq \alpha \leq n)$$

Elemente von \mathcal{H}_n sind:

$$\varepsilon_\alpha(x) = J_n f \left(\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)x, \frac{\alpha}{n}x \right) = o(x^n) \ (x \downarrow 0)$$

folgt aus (11), $\varepsilon_\alpha(x) = o(x^n)$ für $x \uparrow 0$ ergibt sich dann mit Hilfe von (14), und $\varepsilon_\alpha(0) = 0$ gilt auch. Ist noch $0 \leq \beta \leq n$, so wird

$$(28) \quad S_\beta^n \varepsilon_\alpha = S_\beta^n S_\alpha^n f = S_\alpha^n S_\beta^n f = S_\alpha^n \varepsilon_\beta.$$

Mit den Koeffizienten $d_{\nu\gamma}$ aus (24) ist nun

$$\sum_{\gamma \in Z; \nu=0,1,\dots,n} d_{\nu\gamma} Q_\gamma \varepsilon_\nu$$

ein Element von \mathcal{H}_n , nach Lemma 2 und (26) wird dann

$$(29) \quad \varphi := U \sum_{\gamma,\nu} d_{\nu\gamma} Q_\gamma \varepsilon_\nu \in \mathcal{H}_n.$$

Für $0 \leq \alpha \leq n$ ergibt sich mit (28), (24), (26), (27)

$$S_\alpha^n \varphi = U \sum_{\gamma,\nu} d_{\nu\gamma} Q_\gamma S_\alpha^n \varepsilon_\nu = U \sum_{\gamma,\nu} d_{\nu\gamma} Q_\gamma S_\nu^n \varepsilon_\alpha = U T_n \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha = S_\alpha^n f,$$

also ist $S_\alpha^n(f - \varphi) = 0$, d.h.

$$J_n(f - \varphi) \left(\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)x, \frac{\alpha}{n}x \right) = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq n, x \in R).$$

Hieraus folgt

$$J_n(f - \varphi)(s, t) = 0 \quad (s, t \geq 0),$$

denn Zahlen $s, t \geq 0$ lassen sich stets als $s = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)x$, $t = \frac{\alpha}{n}x$ mit $0 \leq \alpha \leq n$ und $x \in R$ darstellen. Anwendung von Lemma 1 liefert nun

$$(30) \quad \Delta_y^n(f - \varphi)(x) = 0 \quad (x, y \in R).$$

Abschließend setzen wir

$$g = f - \varphi - f(0).$$

Dann folgt mit (29)

$$f(x) = f(0) + g(x) + \varphi(x) = f(0) + g(x) + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0),$$

also gilt (13); wegen (30) erfüllt g die Funktionalgleichung (5), und wegen $\varphi(0) = 0$ (vgl. (29)) gilt auch $g(0) = 0$, also (6).

7. Bemerkung über Stabilität. Eine mögliche Interpretation von (11) ist, $f : R \rightarrow R$ als approximative Lösung von

$$(31) \quad \Delta_y^n \psi(x) = 0 \quad (x, y \in R)$$

aufzufassen. Dann bedeutet (13) (wenn $\psi = f(0) + g$ gesetzt wird) die Existenz einer Lösung $\psi : R \rightarrow R$ dieser Funktionalgleichung mit

$$(32) \quad \psi(0) = f(0), \quad |\psi(x) - f(x)| = o(x^n) \quad (x \rightarrow 0).$$

Eine im Sinne von (11) approximative Lösung f von (31) wird also im Sinne von (32) durch eine Lösung ψ angenähert: Es liegt Stabilität vor, wie sie auch in der gemeinsamen Arbeit [15] mit Simon und in den zitierten Arbeiten von Gilányi auftritt.

Literatur

[1] Alexander DINGHAS: *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A, I. Math. **375**, 19 pp. (1966).

[2] Gerhard FRIEDEL: *Zur Theorie der Intervallableitung reeller Funktionen*. Diss. Freie Univ. Berlin, 60 pp. (1968).

[3] Attila GILÁNYI: *Charakterisierung von monomialen Funktionen und Lösung von Funktionalgleichungen mit Computern*. Diss. Univ. Karlsruhe, 75 pp. (1995).

- [4] –: *A characterization of monomial functions*. Aequationes Math. **54**, 289 - 307 (1997) (stammt aus [3]).
- [5] –: *On locally monomial functions*. Publ. math. Debrecen **51**, 343 - 361 (1997).
- [6] –: *On Hyers-Ulam stability of monomial functional equations*. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **68**, 321 - 328 (1998).
- [7] –: *On the stability of the square-norm equation*. Publ. math. Debrecen **52**, 419 - 427 (1998).
- [8] –: *Local stability and global superstability of monomial functional equations*. Advances in Equations and Inequalities, Hadronic Press Palm Harbor, 73 - 95 (1999).
- [9] –: *Hyers-Ulam stability of monomial functional equations on a general domain*. Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A. **96**, 10588 - 10590 (1999).
- [10] –: *On the stability of monomial functional equations*. Publ. math. Debrecen **56**, 201 - 212 (2000).
- [11] –: *On approximately monomial functions*. Functional Equations – Results and Advances, Kluwer Dordrecht, 99 - 111 (2002).
- [12] –, Zsolt PÁLES: *On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order*. Real Analysis Exchange **27**, 485 - 493 (2002).
- [13] Marek KUCZMA: *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa 1985.
- [14] Alice SIMON, Peter VOLKMANN: *Eine Charakterisierung von polynomialen Funktionen mittels der Dinghasschen Intervall-Derivierten*. Results Math. **26**, 382 - 384 (1994).
- [15] –, –: *Perturbations de fonctions additives*. Ann. Math. Silesianae **11**, 21 - 27 (1997).
- [16] Peter VOLKMANN: *Die Äquivalenz zweier Ableitungsbegriffe*. Diss. Freie Univ. Berlin, 30 pp. (1971).
- [17] Antoni ZYGMUND: *Trigonometric series, II*. University Press Cambridge 1968.

Typoskript: Marion Ewald.

Adresse des Autors: Mathematisches Institut I, Universität, 76128 Karlsruhe, Deutschland.