

## Charakterisierung des Betrages reeller Determinanten mit Hilfe von Funktionalgleichungen

Peter Volkmann<sup>1</sup>

Es bezeichne  $R$  den Bereich der reellen Zahlen, und es sei  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Für  $n \in N$  werden die Elemente von  $R^n$  als Spalten aufgefaßt, insbesondere sind

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach [4] löst  $f : R^n \rightarrow R$  die Funktionalgleichung

$$(1) \quad \max\{f(x+y), f(x-y)\} = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R^n)$$

genau dann, wenn  $f(x) = |\alpha(x)|$  mit einer additiven Funktion  $\alpha : R^n \rightarrow R$  ist. (Dabei kann statt  $R^n$  auch eine beliebige Abelsche Gruppe genommen werden; eine Pexidersche Form von (1) wird in [3] behandelt.) Dieses Resultat führt zur nachfolgenden Charakterisierung von

$$(2) \quad F(x_1, \dots, x_n) = |\det(x_1, \dots, x_n)| \quad (x_1, \dots, x_n \in R^n),$$

welche ähnlich ist zur Charakterisierung der Funktion  $F(x_1, \dots, x_n) = \det(x_1, \dots, x_n)$  als eine  $n$ -lineare Funktion mit den weiter unten stehenden Eigenschaften (C), (D).

**Satz.** Mit  $n \in N$  sei

$$(3) \quad F : \underbrace{R^n \times \dots \times R^n}_{n \text{ mal}} \rightarrow R.$$

Es gilt (2) genau dann, wenn  $F$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

(A) Bezüglich jeder Veränderlichen ist  $F$  eine Lösung von (1), d.h.: Sind  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in R^n$ , so wird (1) gelöst durch

$$(4) \quad f(x) = F(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (x \in R^n).$$

---

<sup>1</sup>Anläßlich eines Gastaufenthaltes an der Universität Katowice im Frühjahr 2003.

(B) Für die Funktionen (4) gilt  $f(\lambda x) = |\lambda|f(x)$  ( $\lambda \in R, x \in R^n$ ).

(C) Der Wert von  $F$  ist Null, wenn zwei Argumente übereinstimmen; für  $1 \leq k < l \leq n$  gilt also

$$F(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_{l-1}, x, a_{l+1}, \dots, a_n) = 0.$$

(D)  $F(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

*Beweis.* Die Funktion (2) hat die Eigenschaften (A), (B), (C), (D). Umgekehrt folgt im Falle  $n = 1$  die Form (2) bereits aus (B), (D). Es sei nun  $n \geq 2$ , und für die Funktion (3) werde (A), (B), (C) und (D) vorausgesetzt. Nach Sperner [5], S. 117 ff. gilt (2), falls neben (B), (D) noch folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$(5) \quad F(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

$$(6) \quad F(\dots, a, \dots, b, \dots) = F(\dots, a + b, \dots, b, \dots) = F(\dots, a, \dots, a + b, \dots).$$

Wegen (A) gilt nun nach [4]

$$(7) \quad F(x_1, \dots, x_n) = |\alpha(x_k)|$$

mit einer von  $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  abhängigen additiven Funktion  $\alpha : R^n \rightarrow R$ . Daraus folgt zunächst (5). Zum Nachweis von (6) stellen wir uns dort im linken Term  $a$  an der  $k$ -ten und  $b$  an der  $l$ -ten Stelle vor ( $k < l$ ), und wir verwenden (7) mit  $x_l = b$ . Dann wird

$$|\alpha(b)| = F(\dots, b, \dots, b, \dots),$$

also  $\alpha(b) = 0$  (nach (C)), und weiter

$$\begin{aligned} F(\dots, a + b, \dots, b, \dots) &= |\alpha(a + b)| = |\alpha(a) + \alpha(b)| = |\alpha(a)| \\ &= F(\dots, a, \dots, b, \dots). \end{aligned}$$

Das beweist die linke Gleichung in (6); analog gilt  $F(\dots, a, \dots, b, \dots) = F(\dots, a, \dots, a + b, \dots)$ .

**Zusatz.** Der Satz bleibt richtig, wenn (B) durch folgende Bedingung ersetzt wird:

(B') Mit einer (beliebigen) Norm  $\|\cdot\| : R^n \rightarrow R$  ist

$$\sup\{F(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in R^n; \|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_n\| \leq 1\} < \infty.$$

*Beweis.* Zunächst gilt (B') für die Funktion (2). Umgekehrt folgt (B) aus (A) und (B'): Aus (A) folgt (über (7)) für  $m \in N$

$$F(\dots, mx_k, \dots) = |\alpha(mx_k)| = |m\alpha(x_k)| = m|\alpha(x_k)| = mF(\dots, x_k, \dots).$$

Entsprechend läßt sich  $m$  aus jedem Argument von  $F$  herausziehen, also kann (4) geschrieben werden als

$$(8) f(x) = m^{n-1} F(a_1/m, \dots, a_{k-1}/m, x, a_{k+1}/m, \dots, a_n/m) (x \in R^n, m \in N).$$

Sind in (7)

$$(9) \quad \|x_1\|, \dots, \|x_{k-1}\|, \|x_{k+1}\|, \dots, \|x_n\| \leq 1,$$

so folgt aus (B') für die additive Funktion  $\alpha : R^n \rightarrow R$  die Gültigkeit von

$$\sup\{|\alpha(x_k)| \mid x_k \in R^n, \|x_k\| \leq 1\} < \infty,$$

also ist  $\alpha$  stetig und damit linear, insbesondere also homogen (vgl. Aczél [1]). (7) liefert dann

$$(10) \quad F(x_1, \dots, \lambda x_k, \dots, x_n) = |\lambda| F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \quad (\lambda \in R, x_k \in R^n),$$

falls noch (9) gilt. In (8) werde nun  $m$  aus  $N$  so groß gewählt, daß (9) für  $x_j = a_j/m$  ( $j = 1, \dots, n; j \neq k$ ) erfüllt ist. Dann werde in (8)  $x$  durch  $\lambda x$  ersetzt: Es kann (10) angewandt werden, und es ergibt sich so  $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$  ( $\lambda \in R, x \in R^n$ ).

**Bemerkung.** Der Beweis des Satzes beruht auf einer Charakterisierung der Funktion (2) durch die Eigenschaften (B), (D), (5), (6). Nach Bröcker [2], S. 91 wird diese Funktion bereits durch (B), (D), (6) charakterisiert. Den Herren Kollegen Volker Drumm und Stefan Kühnlein verdanke ich die Hinweise auf [2], [5].

## Literatur

[1] János ACZÉL: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Birkhäuser Basel 1961.

[2] Theodor BRÖCKER: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Ibid. 2003.

[3] Raymond M. REDHEFFER und Peter VOLKMANN: *Die Funktionalgleichung  $f(x) + \max\{f(y), f(-y)\} = \max\{f(x+y), f(x-y)\}$* . International Series of Numerical Mathematics 123, Birkhäuser Basel, 311-318 (1997).

[4] Alice SIMON (CHALJUB-SIMON) und Peter VOLKMANN: *Caractérisation du module d'une fonction additive à l'aide d'une équation fonctionnelle*. Aequationes Math. **47**, 60-68 (1994).

[5] Emanuel SPERNER: *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, I*. Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen 1948.

*Typoskript:* Marion Ewald.

*Adresse des Autors:* Mathematisches Institut I, Universität, 76128 Karlsruhe, Deutschland.