http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 4, 2 pp., *11.06.1999*

Calcul du volume d'un morceau de boule

Bruno Haible et Peter Volkmann

Abstract. A formula will be given for computing the volume of liquid in a horizontal cylinder with spherical heads, given the height of liquid in the tank. More precisely, only the volume of liquid in one of the heads will be derived.

On considère un réservoir cylindrique, d'axe horizontal, de rayon $r > 0$, auquel est collée de chaque côté une calotte sphérique de rayon $R \geq r$. On remplit le réservoir de liquide jusqu'à une hauteur h $(0 \leq h \leq 2r)$, et on cherche le volume contenu.

Pour résoudre ce problème, il suffit de calculer le volume $V = V(r, R, h)$ de liquide dans une des calottes sphériques. La formule pour V donnée dans cette note (voir (2), (3)) est la réponse à une question posée par Mr. Wolfgang Karle, ingénieur à Neuburg/Rhein; elle a été trouvée en 1979, et on l'utilise depuis dans la pratique.

On a d'abord

$$V = \int_{-r}^{-r+h} A(z)dz \ ,$$

où $A(z)$ $(|z| \leq r)$ est la surface d'un segment circulaire ayant pour dimension:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(z) = \sqrt{R^2 - z^2} && \text{– rayon du cercle,} \\ \delta &= \rho(z) - \rho(r) && \text{– hauteur du segment circulaire.} \end{aligned}$$

(L'angle de ce segment est donc $\pi - 2\arcsin[(\rho - \delta)/\rho]$). Avec

$$A(z) = \rho^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\rho - \delta}{\rho} \right) - (\rho - \delta)\sqrt{\rho^2 - (\rho - \delta)^2}$$

on obtient

$$A(z) = \frac{\pi}{2}\rho^2(z) - \rho^2(z) \arcsin \frac{\rho(r)}{\rho(z)} - \rho(r)\sqrt{r^2 - z^2} \ ,$$

donc

$$V = \int_{-r}^{-r+h} dz \left\{ \frac{\pi}{2}(R^2 - z^2) - (R^2 - z^2) \arcsin \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 - z^2}} - \sqrt{R^2 - r^2}\ \sqrt{r^2 - z^2} \right\} \ .$$

Le changement $z = r\zeta$ donne

$$V = r^3 \int_{-1}^{-1+(h/r)} \varphi(\zeta) d\zeta \,, \tag{1}$$

où (en posant $\alpha = R/r$)

$$\varphi(\zeta) = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 - \zeta^2) - (\alpha^2 - \zeta^2) \arcsin \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \zeta^2}} - \sqrt{\alpha^2 - 1}\, \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (|\zeta| \leq 1) \,.$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} V \;=\; & \frac{r^3}{3} \Bigg\{ (3\alpha^2\vartheta - \vartheta^3) \arcsin \sqrt{\frac{1 - \vartheta^2}{\alpha^2 - \vartheta^2}} + 2\alpha^3 \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\vartheta \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha \sqrt{1 - \vartheta^2}} \right) \\ & -(1 + 2\alpha^2)\, \sqrt{\alpha^2 - 1}\, \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \vartheta \right) - 2\vartheta\, \sqrt{(\alpha^2 - 1)(1 - \vartheta^2)} \Bigg\} \,, \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$\alpha = \frac{R}{r} \,, \quad \vartheta = -1 + \frac{h}{r} \,. \tag{3}$$

En effet, si l'on remplace dans les accolades de (2) ϑ par la variable ζ, on obtient une fonction $\Phi(\zeta)$ telle que

$$\Phi(-1) = 0 \,, \quad \Phi'(\zeta) = 3\varphi(\zeta) \qquad (|\zeta| < 1) \,,$$

d'où

$$V = r^3 \int_{-1}^{\vartheta} \varphi(\zeta) d\zeta = \frac{r^3}{3} \Phi(\zeta) \Big|_{\zeta=-1}^{\vartheta} = \frac{r^3}{3}\, \Phi(\vartheta) \,.$$

Remarque. En décembre 1990 on a essayé de faire l'intégration de (1) avec des logiciels de calcul formel: Maple (Waterloo Maple, version 4.3) a donné le résultat correct; par contre les systèmes Mathematica (Wolfram Research) et Scratchpad II (IBM) n'ont pas permis de faire cette intégration. Il serait intéressant de faire des expériences analogues avec les logiciels actuels.

Dactylographie: Marion Ewald.

Adresses des auteurs:

B. Haible, Mathematisches Institut II, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Allemagne. (haible@ilog.fr)

P. Volkmann, Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Allemagne.